Programme de colle semaine 16 - 27 janvier

Le cours doit être parfaitement su.

Cette semaine, les exercices porteront uniquement sur l'arithmétique. Les questions de cours peuvent porter sur l'arithmétique ou l'algèbre linéaire.

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1. Relation de divisibilité et division euclidienne

1. Relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Propriétés élémentaires (réflexivité, transitivité, antisymétrie dans $\mathbb{N}$). Lien avec les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.
2. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Algorithme de la division euclidienne. Application : sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
3. Relation de congruence. Définition. Opération de somme et de produit. Application aux critères de divisibilité usuels (3,9,11).

2. PGCD, PPCM

1. Définition du pgcd de deux entiers. (pour $(a, b) \neq (0, 0)$ le pgcd de a, b se note $a \wedge b$ et est le plus grand diviseur commun des entiers a et b. Algorithme d'Euclide. Il existe u, v entiers tels que $a \wedge b = au + bv$. Si on note $\mathrm{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n, on a $\mathrm{D}(a) \cap \mathrm{D}(b) = \mathrm{D}(a \wedge b)$. Propriété : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$.
   Algorithme d'Euclide étendu.
2. Entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Application à la définition du représentant irréductible d'un rationnel.
3. Définition du ppcm. Propriétés élémentaires. a$\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$. Conséquence : un multiple commun à a et b est un multiple du ppcm.
4. Produit du pgcd et du ppcm de deux entiers.
5. Extension des notions de pgcd et ppcm de n entiers.

EXOS À MAÎTRISER :

— Savoir utiliser des congruences pour répondre à des questions de divisibilité.

— Résolution d'équations diophantiennes du type $ax + by = n$ avec n multiple du pgcd de (a, b)

3. Nombres premiers

Définition. Pté : un nombre premier est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas. Si p premier, et $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$. Crible d'Eratosthène.
Exo : Si p est un nombre premier alors pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$. Petit théorème de Fermat.
Théorèmes.

1. Tout entier naturel $n \geq 2$ admet un diviseur premier.
2. L'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Théorème de décomposition en facteur premiers.

p-valuation d'un entier. Utilisation pour caractériser la divisibilité, pour exprimer le pgcd ou le ppcm d'une famille d'entiers.

QUESTIONS ou exos DE COURS :

1. Infinité de l'ensemble des nombres premiers.
2. Exo : Si p est un nombre premier alors pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$
3. Exo : Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
4. Savoir démontrer qu'une partie d'un ev est un sev d'un ev de référence. Par exemple :
   (1) $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ x - 2y + 3z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   (2) $\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{D}^2(\mathbb{R}) \ / y'' + 2x^2y' - 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ou de $\mathrm{D}^2(\mathbb{R})$, ev des applications deux fois dérivables.
   (3) $\mathrm{F} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
5. Définition d'une famille génératrice d'un ev F.
   Savoir déterminer une famille génératrice. Par exemple, donner une famille génératrice de F sev de $\mathbb{R}^4$ défini par : $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ x = y, x + 2z + t = 0\}$ ou du sev F de K[X] défini par $\{\mathrm{P} \in \mathrm{K[X]}, \mathrm{P}(1) = 0\}$
6. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, alors $\ker f$ est un sev de E et/ou $\mathrm{Im}\, f$ un sev de F.
7. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, montrer que Im $f = $ Vect$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_\mathrm{E}\}$
8. Exo : pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, on a : ($g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\, f \subset \ker g$).
9. Définition d'une somme et d'une somme directe de sous-espaces vectoriels de E.
   Pour F et G deux sev d'un K-ev E, caractérisation de la somme directe par $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$
   Pour $n \geq 3$ sev de E, caractérisation de la somme directe.

N.B. Le colloscope a changé au semestre 2 et les trinômes de colle aussi. Le nouveau colloscope est en ligne. Il y a un groupe fantôme.

PRÉVISIONS : Espaces vectoriels et Applications linéaires (sans dimension).