Programme de colle - semaine 27 (12 mai)

Le cours doit être parfaitement su.

Séries

Tout exercice sur le sujet

Probabilités sur un univers fini

En MPSI le programme se limite aux expériences aléatoires pour lequel l'univers est fini. Le cours a été traité dans ce cadre mais vous pouvez poser des exercices avec un univers infini, sans soulever de difficulté, en admettant l'existence d'un espace probabilisé et à condition que l'exercice n'utilise que les propriétés d'une probabilité vues en 1ère année (pas de σ-additivité en MPSI, ni de limite monotone.)

1) Univers et événements.

Langage des probabilités : Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, conjonction ou disjonction d'événements, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

2) Probabilités sur un univers fini

Une probabilité sur Ω (fini) est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ tel que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et pour toutes parties A et B disjointes, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Exemple : équiprobabilité sur Ω.

Propriétés : probabilité de l'événement contraire, probabilité d'une réunion de 2 événements (la formule du crible pour une union de $n \geq 3$ événements a été écrite mais n'est pas au programme), propriété de croissance.

3) Probabilités conditionnelles.

Définition : si $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ ou $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ et définie par $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$. *Par convention, si* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$

L'application P_{B} est une probabilité sur Ω.

Formule des probabilités composées. *Représentation avec arbre de probabilité, comme au lycée possible et à valoriser mais, dans un exercice, on exigera l'écriture de la formule*.

Formule des probabilités totales (associée à un système complet d'événements $(\mathrm{A}_i)_{i=1..n}$:
$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ (représentations : partition de Ω où on fait figurer la partie B de Ω ou arbre de probabilité). *On exigera l'expression explicite de la formule avec nom des événements formant le système complet d'événements (même si la représentation par des parties ou par un arbre est à valoriser).*

Formule de Bayes.

4) Événements indépendants. Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants. Exemple d'événements deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé (fini) et B un événement tel que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$. Montrer que l'application P_{B} appelée, probabilité conditionnelle sachant B, est une probabilité sur Ω.
2. Formule des probabilités composées (énoncé et démo).
3. Formule des probabilités totales (énoncé et démo).

4. *Exercice* On considère n menteurs $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n$. I_1 reçoit une information sous forme de OUI ou NON et la transmet à I_2 qui la transmet à I_3 ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et son contraire avec probabilité $q = 1 - p$ et les réponses des n personnes sont indépendantes. On note A_i l'événement «I_i transmet l'information initiale »et $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$.
   (1) Déterminer une relation de récurrence entre p_i et p_{i-1} (Indication : conditionner en considérant notamment $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{A}_{i-1})$).
   (2) En déduire la probabilité que l'information soit fidèlement transmise et préciser $\lim_n p_n$
5. *Exercice.* Un pion évolue sur 3 cases A, B, C entre les instants 0 et $\mathrm{N} \geq 3$. À l'instant $t = 0$, il est en A. Puis, il se déplace de façon aléatoire sur les cases en respectant les règles suivantes (pour $n \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$) :
   — s'il est en A ou B au temps $t = n$, il va au temps $t = n + 1$ sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité.
   — s'il est en C au temps $t = n$, il y reste.

   On note (pour $n \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$) A_n (resp. B_n et C_n) l'événement "À l'instant $t = n$, le pion est sur la case A (resp. sur les cases B et C)". On pose enfin $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$, $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$.
   a) Trouver une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.
   b) Calculer c_N puis trouver $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} c_\mathrm{N}$.
6. *Exercice (sera corrigé lundi) Exigible à partir de mercredi ou si élève volontaire.* On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$ tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier naturel non nul et $\leq n$. Soit A_p l'événement «le nombre choisi est divisible par p»
   (1) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A}_p)$ lorsque p divise n.
   (2) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $\mathrm{A}_{p_1}, \mathrm{A}_{p_2}, \ldots, \mathrm{A}_{p_k}$ sont indépendants.
   (3) On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction ϕ définie sur $\mathbb{N}$ dont la valeur $\phi(n)$ est égale au nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n. Montrer que
   $$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier }, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
7. *Exo* On note pour $\alpha > 0$ et $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.
   (1) Pour quelles valeurs de α y a t-il convergence absolue de $\sum u_n$?
   (2) Pour quelles valeurs de α y a t-il convergence de $\sum u_n$?
8. *Exo* Soit u et v deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ converge. Justifier que $\sum u_n v_n$ converge absolument et puis montrer que $|\sum_{n=0}^\infty u_n v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^\infty u_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^\infty v_n^2}$

Pas de colle la semaine du 26 mai (ascension)

PRÉVISIONS : (ordre non garanti)

— Proba (2) : Variables aléatoires
— Espaces euclidiens
— Déterminant
— Intégration
— Fraction rationnelles et décomposition en éléments simples
— Fonctions de plusieurs variables
— Familles sommables