LMB *MPSI2*

Programme de colle - semaine 1 (18 septembre)

Le cours doit être parfaitement su. La colle commencera par une ou plusieurs questions de cours (listées en fin de programme de colle) au choix du colleur.

Chap I - Révisions et compléments d'algèbre

1. Sommes classiques : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, identités remarquables $a^n - b^n$. Somme géométrique. Utilisation du symbole $\sum$, et $\prod$, changement d'indice, sommes télescopiques.
2. Coefficients binomiaux, propriété de symétrie et relation de Pascal. Notation $n!$. Expression de $\binom{n}{k}$ à l'aide des factorielles. Formule du binôme de Newton.
3. Sur des exemples, calcul de sommes doubles, inversion de l'ordre de sommation (également sur des sommes triangulaires).

Chap III - Trigonométrie

1) Formulaire de trigonométrie concernant les fonctions $\cos$ et $\sin$. Valeurs particulières, arcs associés. Formule d'addition, conséquence $\cos(2a) = ...$, $\sin(2a) = ...$; Formules de linéarisation ;
Formules de transformation (à savoir retrouver à partir des formules d'addition) $\cos a \cos b = ...$, $\sin a \sin b = ...$, $\sin a \cos b = ...$ et $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
Résolution d'équations $\cos(x) = \cos\theta$ ou avec sinus.
Réduction de $a\cos\theta + b\sin\theta$, et interprétation géométrique. Application à la résolution d'équation $a\cos x + b\sin x = c$ d'inconnue x réel.

2) Définition et étude de la fonction tangente. Formules : $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$. Formule d'addition $\tan(a+b)$, $\tan(2a)$. Savoir retrouver l' expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Chap III - Nombres complexes

1 Le corps des nombres complexes

1. *Construction rapide des complexes* ($\mathbb{R}^2$ muni de deux lois addition et multiplication) NON EXIGIBLE. Propriétés algébriques usuelles.
2. Représentation géométrique, plan complexe. **Conjugaison**. Propriétés classiques.
3. **Module.** Propriété classiques. Inégalité triangulaire.
4. **Arguments** a) Groupe multiplicatif $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1. b) Notation $e^{i\theta}$. c) Arguments d) Forme trigonométrique d'un nombre complexe ; d) Propriétés des arguments, interprétation géométrique. Utilisation des nombres complexes en géométrie : Interprétation du complexe $\frac{c-a}{b-a}$ pour la configuration de trois points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ d'affixes a, b, c.

2 Applications des complexes à la trigonométrie :

1. Somme de deux complexes de même module : technique de l'angle moitié et interprétation géométrique.
2. Calcul de sommes trigonométriques (exemple $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$)

N.B. *Le cours n'est pas fini. Sont reportées à la semaine prochaine les notions suivantes :- Linéarisation, -expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, équations du second degré, - racines n-ièmes d'un nombre complexe, - exponentielle complexe et - écriture des similitudes planes.*

QUESTIONS DE COURS : Les questions de cours relèvent de démonstrations de cours ou de techniques de calcul à maîtriser. Vérifier que les étapes sont bien comprises par les étudiants.

1. Démonstration de la formule du binôme de Newton.
2. Reprise d'exos vus en classe :
   — exprimer $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)$ à l'aide de factorielle et de puissance de 2
   — et/ou calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ en simplifiant $k\binom{n}{k}$ pour $k \geq 1$
   — et/ou Calcul d'une somme double triangulaire (exemple) : $\sum_{0\leq k\leq \ell\leq n} \binom{\ell}{k}$ ou $\sum_{0\leq k\leq p\leq n} \frac{(-1)^p}{3^{k+p}}$.
   — et/ou pour $p \leq q$ deux entiers, expression de $f(x) = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} 2^k x^{2k}$ pour toute valeur du réel x.

3. Tracé du graphe de tangente. Puis on justifie selon la demande du colleur (expression de la dérivée ou position par rapport à la tangente en 0,...)
4. Expression de $\cos(p) + \cos(q)$ (ou des autres) (il n'est pas exigé de savoir par coeur cette formule, mais on attend de savoir la retrouver rapidement à partir des formules d'addition)
   Déterminer l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$ lorsque $\theta \not\equiv 0[\pi]$ (avec démo)
5. Résolution d'équations trigo : $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$ (ou toute autre du même genre).
6. Inégalité triangulaire (pour 2 complexes) avec cas d'égalité *(énoncé et démo)*.
   Puis démonstration du corollaire : $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|$.
7. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}$ trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, z. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Z} = \frac{z-b}{z-a}$ dans chacun des cas suivants : a) les trois points soient alignés, b) ABM soit un triangle équilatéral, c) ABM triangle rectangle et isocèle en M.
8. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ ou de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ pour tout réel θ.

N.B. Le vocabulaire : *groupe, élément neutre, loi associative, etc* a pu être évoqué au cours des exemples du cours. Il n'est pas encore exigible des étudiants.

PRÉVISIONS : Suite et fin des nombres complexes. Et éléments de logiques et notations sur les ensembles.