LMB *MPSI2*

Programme de colle numéro 4 - semaine du 9 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

A - Notion d'applications

1. Définition. Graphe. Image et antécédent. Restriction et prolongement.
2. Composition. Définitions, exemples. Associativité de la composition.
3. Injection, surjection, bijection. Propriété de la composée. Bijection réciproque.
4. Image directe et image réciproque d'une partie.
5. Familles. Définition. Exemple des suites. Famille de parties. Partition d'un ensemble.

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

La colle commencera par la **vérification de la connaissance précise des définitions du cours**
Applications : fonction injective, surjective, bijective et définition d'une image directe d'une partie par une fonction ou d'une image réciproque d'une partie par une fonction. Ensuite Questions de cours :

1. Associativité du produit de composition
2. *Exo* Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on considère $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ qui à $f \in \mathrm{E}$ associe l'application $\mathrm{T}(f)$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{T}(f)(x) = f(x+a)$$
   (1) Déterminer $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}$ (c'est-à-dire expliciter pour $f \in \mathrm{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}(f)(x)$ en justifiant.
   (2) Déterminer ensuite $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}$ (T composée n fois) en démontrant la réponse.
3. *résultat de cours*
   Démontrer que si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont injectives (respectivement surjectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).
4. *résultat de cours*
   Démontrer que pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, :
   $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective et
   $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective .
5. *résultat de cours*
   Démontrer que si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$, on a
$$(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathrm{B})\right) \text{ et } g \circ f(\mathrm{A}) = g\left(f(\mathrm{A})\right)$$
6. *Exo (voir 3.6 Q4)* Soit E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A et A' deux parties de E et B et B' deux parties de F. Montrer que l'on a $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}') \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{A}')$.
   Montrer par un exemple que l'inclusion inverse est fausse en général
   Puis, vérifier que si l'on suppose f injective alors l'égalité $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}') = f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{A}')$ est vraie.
7. Justifier les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ou $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$
   Montrer que pour tout x réel, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. Si P est un polynôme réel de degré impair, P possède une racine réelle (*révision du théorème des valeurs intermédiaires*).

PRÉVISIONS : Révision et compléments d'analyse réelle (à ce stade tous les résultats seront admis), puis étude des fonctions usuelles (fonction puissance d'exposant réel, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, ch, sh, th).