LMB *MPSI2*

Programme de colle numéro 5 - semaine du 16 octobre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours citées en fin de programme de colle. Le cours doit être parfaitement su.

A - Révision d'analyse de terminale et compléments

Comme la semaine dernière : la notion de limite est admise (pas de définition pour l'instant autre qu'intuitive). Continuité en un point, sur un intervalle.

— Énoncés ci-dessous à connaître parfaitement (*)) (*résultats admis à ce stade de l'année* :

— Passage à la limite dans une inégalité.

— Théorème d'encadrement.
On veillera à ce que les élèves ne confondent pas ces deux premiers résultats et qu'ils vérifient que toutes les limites existent avant de passer aux limités dans une inégalité. On corrigera les $\lim$ *écrits trop tôt (avant de savoir que la limite existe).*

— Théorème des valeurs intermédiaires (dans ses différentes versions) : si f continue sur $[a, b]$ et si y est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors y possède au moins un antécédent dans $[a, b]$ ou "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

— Théorème de la bijection monotone (on a évoqué et admis la continuité de la réciproque).

— Règles opératoires sur les dérivée ; en particulier dérivée d'une composée.

— Lien entre le signe de la dérivée et la monotonie de la fonction sur des intervalles.

• *Les nouveautés* :

— Théorème de dérivation de l'application réciproque. *(Théorème nouveau, on l'a démontré en admettant la continuité de f^{-1}).*

— Rappel des résultats de convexité vus au lycée et notamment : position relative des tangentes pour une fonction f telle que f' est croissante. Application aux fonctions usuelles ($x \mapsto \ln(1+x)$, exp, $sinus$...)

— Effet des transformations élémentaires du plan sur le graphe d'une fonction, en particulier, à partir du graphe d'une fonction f savoir construire rapidement le graphe de $x \mapsto f(x+a)$, de $x \mapsto f(x) + b$, de $x \mapsto f(\mathrm{T} - x)$, de $x \mapsto f(ax)$, de $x \mapsto af(x)$.
Savoir déterminer si une fonction possède une symétrie par rapport à une droite d'équation $x = a$.

— Vocabulaire sur les branches infinies (asymptotes obliques, branches paraboliques de direction $(0x)$, $(\mathrm{O}y)$ ou $(y = ax)$). *Vu en exo* $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$

B -Nouvelles fonctions usuelles (le début)

1. **Fonctions puissances** $x \mapsto x^\alpha$**,** $\alpha \in \mathbb{R}$**.** Définition, étude, graphe, convexité. $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^\alpha - 1}{h} = \alpha$.
   Sera vu lundi seulement (donc ne pas considéré comme vu pour les colles de lundi et mardi)
   — résultats de croissances comparées de ces fonctions en 0 et $+\infty$.
   — calcul de limites utilisant les croissances comparées
   — en exo (lundi) étude de $x \mapsto x^x$ et de $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
   Sont reportées à la semaine prochaine l'étude des fonctions $\arcsin$*,* $\arccos$*,* $\arctan$*, et les fonctions hyperboliques*

QUESTIONS DE COURS ou exo de cours :

1. (a) Donner le graphe de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ à partir du graphe de $\ln$ (et position de la tangente en 0) et/ou celui de $x \mapsto \sqrt{2 - x}$ à partir de $\sqrt{.}$.
   (b) Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, écrire la caractérisation de la propriété "le graphe de f possède une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = a$.
2. *Exo* Si f est une fonction réelle continue sur $[a, b]$ avec $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
3. $f : x \mapsto x^2\sqrt{|\ln(x)|}$. Etude et graphe de f (avec branche infinie).
4. *exo* Montrer que l'application $u : x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (on a raisonné par l'absurde et utiliser le principe de composition des limites avec des suites bien choisies qui tendent vers 0.) Ou (similaire) montrer que $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
5. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[1, +\infty[$. Étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression simple de $(f^{-1})'(t)$ lorsque ça a du sens.
6. (a) Démonstrations des règles sur les exposants : pour $x > 0, y > 0$, α, β réels, valeurs de $x^{-\alpha}$, $x^{\alpha+\beta}$, $(x^\alpha)^\beta$, et $(xy)^\alpha$.
   (b) Graphes de $x \mapsto x^\alpha$ (sans démonstration) selon les valeurs de α. *On précisera quels exposants α ont permis un prolongement par continuité en* 0 *et parmi eux ceux qui donnent une fonction dérivable en* 0.
7. *exo (pour les colles à partir de mercredi).* Déterminer l'expression de la dérivée $n$ième de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. *On veillera à ce que les élèves écrivent* $1/x^n = x^{-n}$ *avant de dériver, pour dériver comme une fonction puissance et non comme un quotient.*

PRÉVISIONS : Étude de $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, ch, sh, th. Puis techniques de calcul intégral.