

Programme de colle - semaine 9 - du 27 novembre

Le cours doit être parfaitement su.

Développements limités et asymptotiques : exercices

Équations différentielles linéaires

Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sur un intervalle I , d'une solution sur I . Vocabulaire : second membre, équation homogène.

Structure : si S désigne l'ensemble des solutions d'une ED Linéaire et S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

- S_H contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
- si $y_p \in S$, on a : $(y \in S \iff (y - y_p) \in S_H)$, soit $S = \{y_p\} + S_H$.

1) Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène et normalisée $(y' + a(x)y = 0)$, où a est continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
2. Existence et calcul d'une solution particulière à l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont continues par la méthode de la variation de la constante.
3. Problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 normalisées.
4. Équation non normalisée : recherche de solutions (par analyse/synthèse).

2) Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.
Solutions réelles dans le cas où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.
2. Recherche de solutions particulières : principe de superposition des solutions, utilisation de second membres complexes. Cas particulier de second membre de type $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et P polynôme. Exemple avec second membre du type $e^{mx} \cos(\alpha x)$ ou $e^{mx} \sin(\alpha x)$
Exemples du cours : $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$ (en passant par $\operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$) et $y'' - y = \operatorname{ch}x$.
3. Existence et unicité au problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (on a admis l'existence d'une solution.)

Rien d'autre dans le cours concernant les équations différentielles.

N.B. Cette semaine, on commencera la colle par un **exercice sur les DL**. Ensuite, exercice sur les EDL. Les exercices sur les EDL seront encore proposés la semaine prochaine, avec le début du cours sur les relations binaires et les relations d'ordre.

QUESTIONS DE COURS :

1. Présenter la méthode de variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière d'une EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ où a, b continues sur l'intervalle I .
2. Solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = 0$ ou de $y'' - 2y' + y = 0$ ou de $y'' + \omega^2 y = 0$ (où $\omega \in \mathbb{R}$) ou de $y'' + y' + y = 0$
3. Expliquer comment trouver une solution particulière de $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$ ou de $y'' - y = \operatorname{ch}(x)$.

PRÉVISION : Relations binaires, ensemble ordonné, borne sup. Nombres réels. Puis Suites numériques.