Programme de colle - semaine 10 - 4 décembre

Le cours doit être parfaitement su.

A) Révision

Tout exercice sur les thèmes Calcul de primitives, encadrement d'intégrales, Développements limités, Equations différentielles.

B) Relations binaires

• Relations d'équivalence.
• Relations d'ordre.

1. Ordre total, ordre partiel, plus grand élément, plus petit élément.
   Propriété de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Conséquence : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
2. Si A est une partie d'un ensemble ordonné E, définition d'un majorant de A de E, d'un minorant de A dans E. Partie majorée, minorée, bornée.
   Définition de la borne supérieure et inférieure d'une partie A de E.
3. Propriété de la borne sup (borne inf) pour $\mathbb{R}$ (admise) : toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée possède une borne sup.
   Caractérisations de la borne sup dans $\mathbb{R}$:
   — $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et si $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in \mathrm{A}, b - \varepsilon < a$;
   — $b = \sup \mathrm{A}$ ssi b est un majorant de A et s'il existe une suite de points de A qui converge vers b. (admis, sera justifié dans le chapitre *suites réelles*)

   Caractérisations analogues pour les bornes inf.

C) Nombres réels (le début)

1. Inégalités dans $\mathbb{R}$: révision des propriétés des valeurs absolues, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ (admise à ce stade de l'année) et corollaire : inégalité de Minkowski (inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$).
2. Définition de la partie entière (notation $\lfloor \cdot \rfloor$). Propriétés de la partie entière, de la partie fractionnaire.
   Le cours n'est pas fini. Les notions d'approximation, de parties denses dans $\mathbb{R}$ sont repoussées à la semaine prochaine.

QUESTIONS DE COURS :

1. Donner la définition de relation d'équivalence, ou relation d'ordre, ou plus petit élément, ou partie majorée dans un ensemble ou d'une borne sup.
2. Soit deux suites réelles bornées telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, demander de comparer les inf et les sup
3. Soit A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$ telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Justifier $\inf \mathrm{B} \leq \inf \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{B}$.
4. Énoncer la caractérisation séquentielle d'une borne inf (ou d'une borne sup) d'une partie A de $\mathbb{R}$ (sans démonstration). Application : déterminer $\inf_{\mathbb{R}} \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$.

5. *Exo* Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour un réel x fixé, on appelle distance de x à la partie A la quantité
$$d(x, \mathrm{A}) = \inf\{\,|x-a|,\, a \in \mathrm{A}\,\}$$
   (1) Montrer que $d(x, \mathrm{A})$ est bien définie pour tout réel x.
   (2) Soit x, y deux réels fixés.
   Justifier que
$$\forall a \in \mathrm{A},\ d(x, \mathrm{A}) \leq |x-y| + |y-a|$$
   En déduire
$$d(x, \mathrm{A}) \leq |x-y| + d(y, \mathrm{A})$$
   (3) Établir que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A})| \leq |x-y|$$
6. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Énoncé avec les cas d'égalité (sans démonstration : nous l'avons admis pour l'instant). Corollaire : Inégalité de Minkowski (inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$) (vous pouvez demander la démonstration du corollaire).
7. Savoir démontrer des propriétés sur la partie entière comme :
   — l'unicité de la partie entière,
   — $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$
   — $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor\, x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$

Note aux colleurs : Ce chapitre est introduit pour 1) réviser les techniques d'inégalités dans $\mathbb{R}$ (hors convexité, et encadrement séries/intégrales) et 2) introduire la notion de borne sup avant le chapitre sur les suites numériques.
Cette semaine, les exercices pourront porter sur ces thèmes (exos avec sup/inf ou avec la partie entière, ou inégalités et/ ou exercices sur les chapitres précédents (intégrales, encadrement d'intégrales, Développements limités et Équations différentielles linéaires).

PRÉVISION : Parties denses dans $\mathbb{R}$. Suites numériques.