Programme de colle semaine 11 - semaine du 11 décembre

La colle débutera par une ou plusieurs questions de cours. Le cours doit être parfaitement su.

fin du cours Nombres réels

Définition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
Aucune notion sur la dénombralité n'a été vue dans ce cours.

Suites réelles

1. Suites croissantes, décroissantes, monotones. Suites majorées, minorées, bornées.
2. Définition de la convergence d'une suite. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes. Somme, produit, inverse lorsque la limite est non nulle.
3. Limites infinies. Définition. Opérations sur ces suites et notamment somme d'une suite minorée et d'une suite qui tend vers $+\infty$, inverse...
4. Limite et relation d'ordre : conservation des inégalités larges dans un passage à la limite.
5. Théorèmes d'existence de limites : théorème d'encadrement, suites monotones (bornées ou non), suites adjacentes.
6. Compléments : caractérisation séquentielle des bornes sup (inf), caractérisation séquentielle des parties denses.
7. Sous-suites. Si u tend vers $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend vers ℓ. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite ℓ dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors u tend vers ℓ.

Vu en exercice : utilisation des théorèmes du cours, étude de suites définies de façon implicite.

N.B. Le cours n'est pas fini : *le théorème de Bolzano-Weierstrass sera vu la semaine prochaine, ainsi que les suites complexes. Cette semaine nous n'avons pas encore appris les techniques d'encadrement de somme par monotonie intégrale. On a vu juste les encadrements grossiers. La semaine prochaine nous verrons en exercice le théorème de Césàro . Merci de ne pas poser cette semaine d'exercice type "Césàro" ou encadrement somme/intégrale ni bien sûr d'exercice utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

N.B. *Ne pas donner d'exercice du type :* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Les suites récurrentes feront l'objet d'une étude spécifique après le cours sur la dérivabilité et les accroissements finis.*

QUESTIONS DE COURS :

1. Toute suite convergente est bornée et /ou unicité de la limite.
2. Limite d'une somme et/ou d'un produit de suites convergentes.
3. • Si u_n converge vers un réel ℓ strictement positif, alors APCR $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$ et limite de $1/u_n$.
   • Si u_n tend vers 0 et à valeurs strictement positives, limite de $1/u_n$.
   • Si u tend vers $+\infty$, alors APCR $u_n > 0$ et limite de $1/u_n$.
4. Comportement des suites croissantes. Énoncé et démonstration (dans le cas suite majorée ou non majorée, au choix du colleur).
   + Exo : soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Justifiez $\lim u = +\infty$.
5. Convergence de deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et (b_n) avec encadrement de la limite : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - \ell| \leq |b_n - a_n|$.
6. Caractérisation séquentielle d'une partie dense de $\mathbb{R}$: une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite de points de A.
   (On a défini A dense dans $\mathbb{R}$ par :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \mathrm{A} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$)
7. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ ($\ell \in \bar{\mathbb{R}}$), la suite $(u_n)_n$ tend vers ℓ. Pour la démonstration, on choisira $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = \pm\infty$).
8. <u>Exercice</u> Soit u une suite à valeurs strictement positives et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
   (1) On suppose que $\ell < 1$. Montrer que $\lim u_n = 0$ *(on a choisi $\rho \in]\ell, 1[$, et établi $u_n = \mathrm{O}(\rho^n)$)*
   Application : pour tout réel a, la suite de terme général $\frac{a^n}{n!}$ tend vers 0.
   (2) Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.

PRÉVISIONS : Suites (2) : théorème de Bolzano-Weierstrass, encadrement des sommes par monotonie intégrale, théorème de Césàro, exercices types à la Césàro, suites complexes. Puis Structures (groupes, anneaux, corps).