Signaux éléctrique dans l'ARQS

I - Lois de Kirchhoff

1 - Vocabulaire

Électrocinétique : étude des courants et des tensions.
Dipôle électrocinétique : tout système électrique relié à l'extérieur par deux bornes.
Réseau électrique (ou circuit) : ensemble de dipôles électrocinétiques reliés par des fils de connexion.

Un circuit peut être analysé en termes de **nœuds**, **branches** et **mailles**.

Nœud : point de jonction relié à au moins 3 dipôles électrocinétiques.
Branche : portion de circuit entre deux nœuds successifs.
Maille : ensemble de branches formant une boucle fermée.

2 - Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Dans le cas des régimes variables i et u dépendent du temps. Les signaux intensité i du courant électrique et u tension se propagent dans un conducteur à la célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ m.s^{-1}. Dans l'A.R.Q.S. on néglige les phénomènes de propagation : à un instant donné, l'intensité du courant est la même le long d'une branche.

À retenir : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires
Un circuit de taille caractéristique L alimenté par un signal de fréquence f peut être étudié dans le cadre de l'ARQS ssi :

$$L \ll \frac{c}{f} \quad \Leftrightarrow \quad Lf \ll c$$

3 - Courant électrique

a) Définition

On appelle **courant électrique** tout mouvement d'ensemble de porteurs de charge électrique.

Dans les métaux les porteurs de charge sont des électrons ($q = -e$) et dans les solutions électrolytiques, les porteurs de charge sont les ions ($q = Ze$ avec $Z \in \mathbb{Z}$).
Pour les électrons comme pour les ions, la **charge portée est quantifiée** : c'est un multiple de la charge élémentaire e ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ $\mathscr{C}$).
Au niveau macroscopique, il y a tellement de porteurs de charge microscopiques que la charge peut être considérée comme une grandeur continue.

On distingue les **courants de conduction** (porteurs de charge en déplacement dans un milieu matériel fixe), les **courants particulaires** (faisceau de porteurs de charge dans le vide) et les **courants de convection** (milieu matériel en mouvement qui entraîne les porteurs de charge).

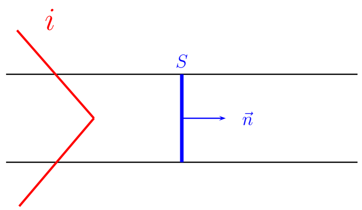
b) Sens conventionnel du courant

Lorsqu'on applique un champ électrique à une solution électrolytique (par exemple de l'eau salée, contenant les ions Na^+ et Cl^-), les anions se déplacent dans une direction et un sens et les cations dans le sens opposé.

Les sens conventionnel du courant est le sens dans lequel se déplacent les porteurs de charge positive.

c) Intensité du courant

On considère un fil de section S parcouru par un courant. L'intensité du courant notée i est le débit de charge à travers la section S orientée du fil.



L'intensité du courant électrique à travers une surface S orientée est la charge algébrique traversant cette surface par unité de temps :

$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

où i est l'intensité du courant en ampères (A), δq la charge algébrique traversant $\vec{S}$ en coulomb ($\mathscr{C}$), et dt une durée en seconde (s).

Remarques :

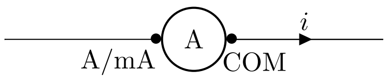
- i est une grandeur algébrique.
- Si $i =$ cste au cours du temps, on parle de **courant continu** (souvent noté I).
- On écrit souvent $i = \dfrac{dq}{dt}$.

d) Ordres de grandeurs et mesure

L'intensité des courants électriques peut varier énormément en fonction de l'application considérée. On peut donner comme exemples :

- l'électronique (ordinateurs, téléphones portables) : de l'ordre du mA,
- l'usage domestique : de l'ordre de l'ampère
- l'électrotechnique (motrices TGV, usines, lignes HT) : jusqu'au kA
- foudre : jusqu'à la centaine de kA.

L'appareil utilisé pour mesurer le courant électrique est un **ampèremètre**, symbolisé par un A encerclé.



L'ampèremètre se branche **en série**, le courant entre par la borne rouge A ou mA, et ressort par la borne noire COM.

Un **ampèremètre idéal** ne perturbe pas le circuit et est équivalent à un **fil**.

e) Lois des nœuds

Pour un nœud donné N, la somme des intensités des courants qui aboutissent à ce nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en repartent :

$$\sum_{k=1}^{p} \epsilon_k i_k = 0$$

$p =$ nombre de branches issues du nœud N, $\epsilon_k = +1$ si i_k pointe vers le nœud, $\epsilon_k = -1$ sinon.

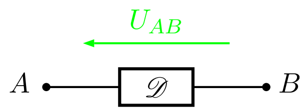
4 - Tension

a) Définition

On appelle **tension électrique** U_{AB} entre deux points A et B d'un circuit la différence de potentiel :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

On la représente par une flèche de base B et de pointe A.



Une tension s'exprime en volts (V). C'est une grandeur algébrique.

Le potentiel est défini à une constante près. La **masse** (M) d'un circuit est un point de potentiel nul par convention $V_M = 0$ V.

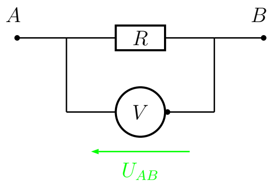
b) Ordre de grandeur et mesure

La tension est aussi une grandeur électrique dont l'ordre de grandeur varie grandement en fonction de l'usage :

- électronique : de l'ordre du millivolt au volt,
- usage domestique : de l'ordre de la centaine de volt (220 V ou 380 V en France),

- électrotechnique ou ligne haute tension : de l'ordre de la centaine de kV,
- foudre : de l'ordre de la dizaine de MV.

La tension entre deux points se mesure avec un voltmètre, symbolisé par un V encerclé. Le voltmètre se branche en **parallèle**, en reliant la borne rouge V au point A et la borne noire COM au point B. Un voltmètre idéal ne perturbe pas le circuit, il est équivalent à un coupe-circuit (un interrupteur ouvert).



c) Loi des mailles

Soient trois points A, B et C d'un circuit. Il y a additivité des tensions :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

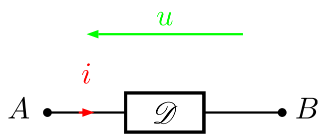
La somme des tensions algébriques u_k aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est nulle :

$$\sum_{k=1}^{p} \epsilon_k u_k = 0$$

p = nombre de branches de la maille, $\epsilon_k = +1$ si u_k est dans le sens de parcours de la maille, $\epsilon_k = -1$ sinon.

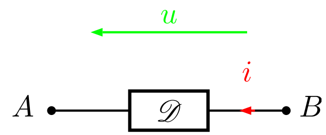
II - Dipôles et circuit

1 - Notation et convention d'orientation



Convention récepteur

Les flèches tension et intensité sont de sens opposés.



Convention générateur

Les flèches tension et intensité sont de même sens.

2 - Caractéristique statique

Un dipôle est caractérisé par la relation entre la tension U à ses bornes et l'intensité du courant I qui le parcourt en régime continu. Cette relation peut être représentée par un graphe. Ce graphe est appelé la **caractéristique statique** du dipôle.

Lorsque deux dipôles sont associés pour former un circuit, on peut représenter sur un même graphe les deux caractéristiques (U tension commune aux deux dipôles en fonction de I courant parcourant le circuit). L'intersection des deux caractéristiques donne le **point de fonctionnement** du circuit c'est-à-dire les valeurs de U et I dans le circuit.

Dipôle passif : un dipôle est dit passif si sa caractéristique statique passe par l'origine ($U_0 = 0$ et $I_0 = 0$). Sinon le dipôle est dit **actif**.
Propriété : un dipôle actif peut engendrer le passage d'un courant dans un circuit dont les autres dipôles sont passifs. Il ne le fait pas forcément.

Dipôle symétrique : un dipôle est dit symétrique si sa caractéristique ne change pas quand on inverse ses bornes d'entrée et de sortie. Les deux bornes jouent le même rôle, la caractéristique est impaire.
Dans le cas contraire, on parle de dipôle **polarisé.**

Dipôle linéaire : un dipôle est linéaire si la tension observée à ses bornes u et l'intensité du courant qui le traverse i sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En statique, U et I sont liées par une relation affine.

3 - Association de dipôles

Association parallèle : deux dipôles en parallèle sont sont reliés aux deux mêmes nœuds et donc soumis à la même tension.
S'il y a plusieurs branches en parallèle (entre 2 nœuds), l'ordre des branches sur le schéma n'a pas d'importance.

Association série : deux dipôles associés en série sont parcourus par le même courant (ils appartiennent à la même branche).

4 - Aspect énergétique

La **puissance algébrique reçue** par un dipôle $\mathscr{D}$ à l'instant t est définie par :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{reçue}}(t) = u_{AB}(t) \times i_{A\to B}(t)}$$

u_{AB} et $i_{A\to B}$ sont en convention récepteur.

Unité de puissance : $\mathscr{P}$ s'exprime en watts (W).

Ordres de grandeur :
- téléphone portable : 1 W,
- ampoule : 10 W,
- ordinateur, télévision : 100 W,
- électroménager : 1-10 kW,
- centrale nucléaire : GW.

Un dipôle a un **comportement récepteur** si la puissance qu'il reçoit est positive : le sens réel du courant est celui des potentiels décroissants.

L'énergie reçue par un dipôle sur un intervalle de temps $[t_1; t_2]$ est donnée par :

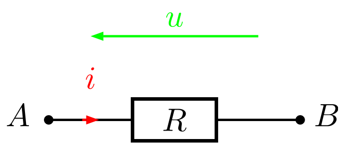
$$W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}_{\text{reçue}}(t)dt$$

III - Exemples de dipôles

1 - Le conducteur ohmique

a) Loi d'Ohm

Représentation :



Caractéristique :

dipôle qui suit la loi d'Ohm

$$\boxed{u = R \cdot i \text{ en convention récepteur}}$$

R résistance du conducteur ohmique (grandeur positive).
R s'exprime en ohms (Ω).

b) Aspect énergétique

$$\mathscr{P}_{\text{reçue}} = Ri^2 = \frac{u^2}{R} > 0$$

Un conducteur ohmique se comporte toujours en récepteur.

c) Lois d'association

Série

Deux dipôles sont dits en série lorsqu'ils sont parcourus par le même courant i (ils appartiennent à une même branche).
N conducteurs ohmiques en série sont équivalents à un conducteur ohmique de résistance R_S tel que :

$$\boxed{R_S = \sum_{k=1}^{N} R_k}$$

Pour deux conducteurs ohmiques de résistances R_1 et R_2,

$$\boxed{R_S = R_1 + R_2}$$

Parallèle

Deux dipôles sont dits en parallèle lorsqu'ils ont la même tension u à leurs bornes.
N conducteurs ohmiques en parallèle sont équivalents à un conducteur ohmique de résistance R_P tel que :

$$\boxed{\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}}$$

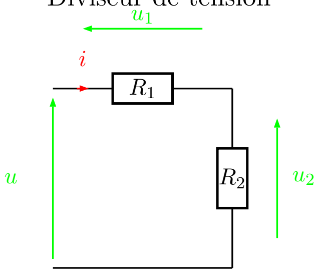
Pour deux conducteurs ohmiques de résistances R_1 et R_2,

$$\boxed{R_P = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}}$$

d) Les ponts diviseurs

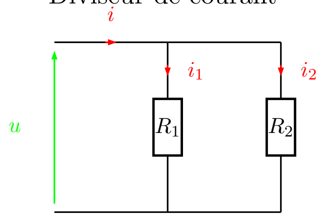
On peut utiliser les propriétés d'association des résistors pour prélever une partie seulement d'une tension ou d'un courant :

Diviseur de tension



$$u_1 = u\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Diviseur de courant



$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2 - Le fil conducteur ou fil de connexion

On l'assimile à un conducteur ohmique de résistance négligeable devant les autres résistances du circuit :

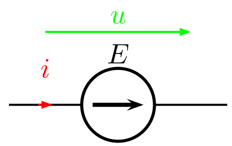
$$u = 0, \forall i$$

3 - L'interrupteur ouvert

$$i = 0, \forall u$$

4 - Les générateurs

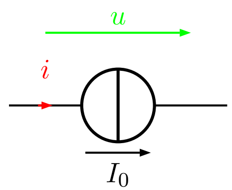
a) La source idéale de tension



$$u = E, \forall i$$

En associant deux sources de tension en série, on obtient une source de tension de f.é.m la somme algébrique des f.é.m. associées.

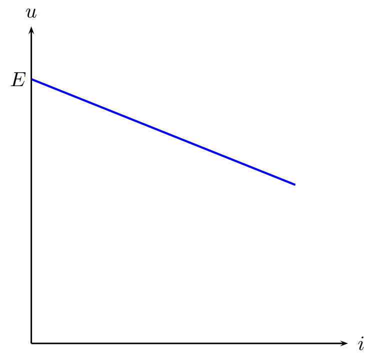
b) La source idéale de courant



$$i = I_0, \forall u$$

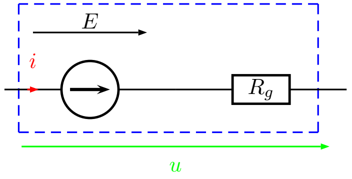
En associant deux sources de courant en parallèle, on obtient une source de courant de c.é.m la somme albébrique des c.é.m. associés.

c) Le dipôle actif linéaire



Caractéristique linéaire : $u = E - R_g i$

Modèle de Thévenin

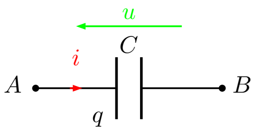


Circuits du premier ordre

I - Bobine et condensateur

1 - Le condensateur

Représentation :



Relation caractéristique : La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge portée par les armatures :

$$\boxed{q = Cu, \text{ si } u \text{ pointe vers } q}$$

C est la capacité du condensateur ; C s'exprime en farads (F).

Par définition, $i = \dfrac{dq}{dt}$ si i pointe vers q, il vient $\boxed{i = C\dfrac{du}{dt} \text{ en convention récepteur}}$

Puissance reçue : $\mathscr{P}_{\text{reçue}} = u \times C\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu^2\right)$

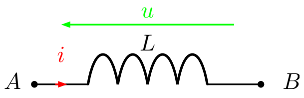
Énergie électrique stockée : $\mathscr{E}_C = \dfrac{1}{2}Cu^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$

Il y a **continuité de la tension** aux bornes d'un condensateur : $\forall t, u(t^-) = u(t^+)$.

En **régime continu** le condensateur se comporte comme un **interrupteur ouvert**.

2 - La bobine

Représentation :



Relation caractéristique : La tension aux bornes d'une bobine est proportionnelle aux variations de l'intensité du courant au sein de la bobine :

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}, \text{ en convention récepteur}}$$

L est l'inductance de la bobine ; L s'exprime en henrys (H).

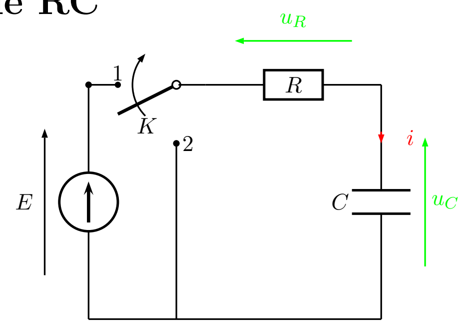
Puissance reçue : $\mathscr{P}_{\text{reçue}} = L\frac{di}{dt} \times i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

Énergie magnétique stockée : $\mathscr{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$

Il y a **continuité du courant** parcourant une bobine : $\forall t, i(t^-) = i(t^+)$.

En **régime continu** la bobine se comporte comme un **interrupteur fermé** ou fil de connexion.

II - Le dipôle RC



L'équation différentielle du circuit est donnée par la loi des mailles couplée aux relations courant-tension aux bornes des dipôles :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \begin{cases} \frac{E}{RC} & \text{interrupteur en position 1} \\ 0 & \text{interrupteur en position 2} \end{cases}}$$

On pose $\tau = RC$, constante de temps caractéristique du dipôle RC.

1 - Réponse indicielle

Le condensateur étant déchargé, $u_C(0^-) = 0$, l'interrupteur K passe à la position 1.

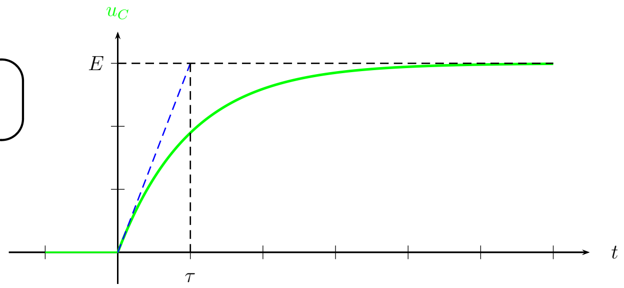
On observe la réponse indicielle à un échelon de tension (charge du condensateur).

Réponse en tension :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ pour } t \geq 0}$$

u_C est continue.

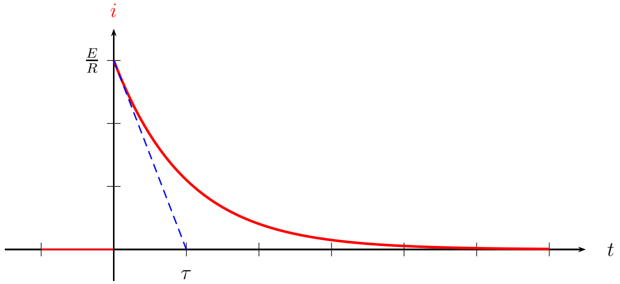
La charge s'effectue en quelques τ.



Réponse en intensité :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} \text{ pour } t > 0}$$

i est discontinue en 0.



Bilan énergétique :

On commence par un bilan en puissance en multipliant la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

Soit $\mathscr{P}_{gen} = \mathscr{P}_{Joule} + \frac{d}{dt}(\mathscr{E}_{elec})$ avec $\mathscr{P}_{gen}$ puissance **fournie** par le générateur, $\mathscr{P}_{Joule}$ puissance **reçue** par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule et $\mathscr{E}_{elec}$ énergie stockée dans le condensateur.

En intégrant les différents termes de ce bilan entre $t = 0$ et $t \to \infty$ (en pratique quelques τ suffisent), on obtient un bilan énergétique :
$W_{gen} = CE^2$, $W_{cond} = \mathscr{E}_{elec}(\infty) - \mathscr{E}_{elec}(0) = \frac{1}{2}CE^2$ et $W_{Joule} = \frac{1}{2}CE^2$, soit :

$$\boxed{W_{gen} = W_{Joule} + \mathscr{E}_{elec}(\infty) \text{ avec } W_{Joule} = W_{cond} = \mathscr{E}_{elec}(\infty)}$$

Il y a **équipartition** de l'énergie fournie par le générateur entre le condensateur et le conducteur ohmique lors de la charge.

2 - Régime libre

Le condensateur étant chargé, $u_C(0^-) = E$, l'interrupteur K passe à la position 2.

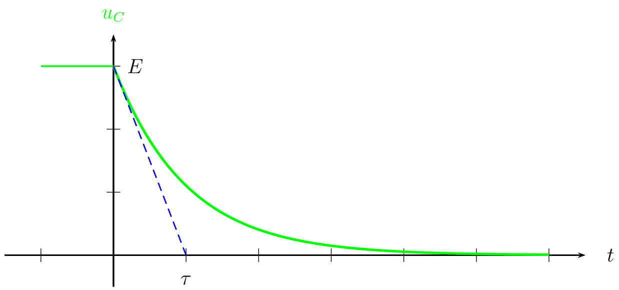
On observe l'établissement du régime libre (décharge du condensateur).

Réponse en tension :

$$\boxed{u_C(t) = Ee^{-t/\tau} \text{ pour } t \geq 0}$$

u_C est continue.

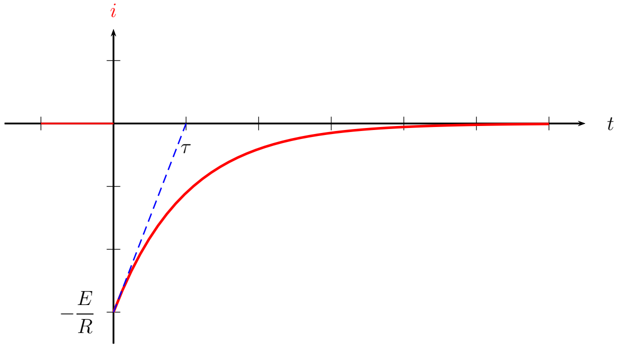
La décharge s'effectue en quelques τ.



Réponse en intensité :

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau} \text{ pour } t > 0}$$

i est discontinue en 0.



Bilan énergétique :

On commence par un bilan en puissance en multipliant la loi des mailles par i :

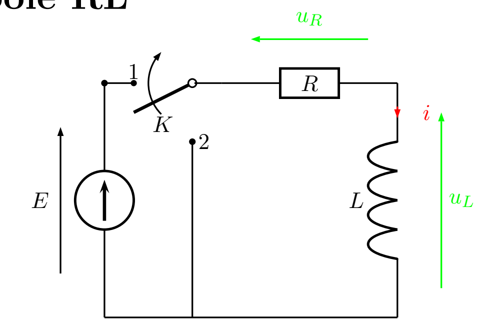
$$0 = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

En intégrant les différents termes de ce bilan entre $t = 0$ et $t \to \infty$ (en pratique quelques τ suffisent), on obtient un bilan énergétique :
$W_{cond} = \mathscr{E}_{elec}(\infty) - \mathscr{E}_{elec}(0) = -\frac{1}{2}CE^2$ et $W_{Joule} = \frac{1}{2}CE^2$, soit :

$$\boxed{W_{Joule} = \mathscr{E}_{elec}(0)}$$

L'énergie stockée dans le condensateur chargé est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique lors de la décharge.

III - Le dipôle RL



L'équation différentielle du circuit est donnée par la loi des mailles couplée aux relations courant-tension aux bornes des dipôles :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \begin{cases} \frac{E}{L} & \text{interrupteur en position 1} \\ 0 & \text{interrupteur en position 2} \end{cases}}$$

On pose $\tau = \dfrac{L}{R}$, constante de temps caractéristique du dipôle RL.

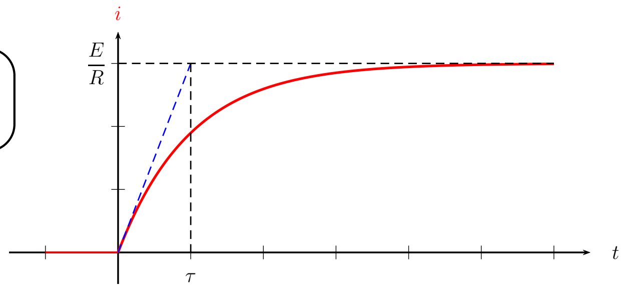
1 - Réponse indicielle

L'interrupteur K étant en position 2 depuis longtemps, $i(0^-) = 0$, il passe à la position 1.

On observe la réponse indicielle à un échelon de tension (établissement du régime inductif).

Réponse en intensité :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ pour } t \geq 0}$$

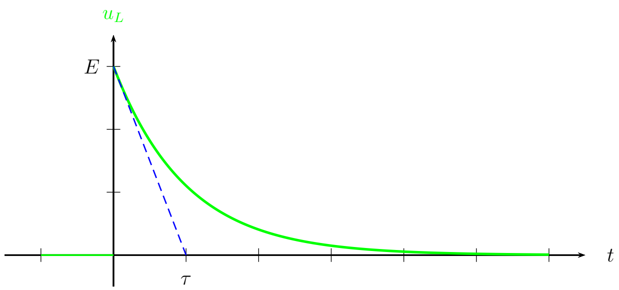


i est continue.

Le régime inductif s'établit en quelques τ.

Réponse en tension :

$$\boxed{u_L(t) = Ee^{-t/\tau} \text{ pour } t > 0}$$



u_L est discontinue en 0.

Bilan en puissance :

On obtient le bilan en puissance en multipliant la loi des mailles par i :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Soit $\mathscr{P}_{gen} = \mathscr{P}_{Joule} + \dfrac{d}{dt}(\mathscr{E}_{magn})$ avec $\mathscr{P}_{gen}$ puissance **fournie** par le générateur, $\mathscr{P}_{Joule}$ puissance **reçue** par le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule et $\mathscr{E}_{magn}$ énergie stockée dans la bobine.

En régime continu $\mathscr{P}_{gen} = \mathscr{P}_{Joule}$.

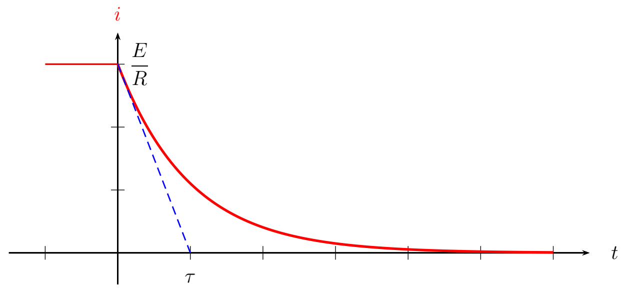
2 - Régime libre

Le régime inductif de la bobine étant établi, $i(0^-) = \dfrac{E}{R}$ (K est en position 1 depuis longtemps), l'interrupteur passe à la position 2.

On observe l'établissement du régime libre.

Réponse en intensité :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} \text{ pour } t \geq 0}$$

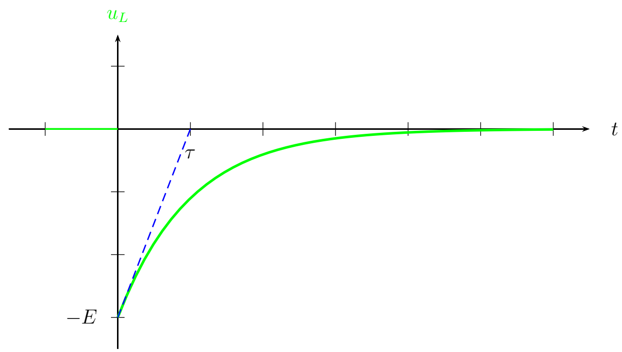


i est continue.

Le régime libre s'établit en quelques τ.

Réponse en tension :

$$\boxed{u_L(t) = -Ee^{-t/\tau} \text{ pour } t > 0}$$



u_L est discontinue en 0.

Bilan énergétique :

On commence par un bilan en puissance en multipliant la loi des mailles par i :

$$0 = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

En intégrant les différents termes de ce bilan entre $t = 0$ et $t \to \infty$ (en pratique quelques τ suffisent), on obtient un bilan énergétique :

$$W_{recue,bob} = \int\limits_{t=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) dt = \mathscr{E}_{magn}(\infty) - \mathscr{E}_{magn}(0) = 0 - \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

et $W_{Joule} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$, soit :

$$\boxed{W_{Joule} + W_{recue,bob} = 0}$$

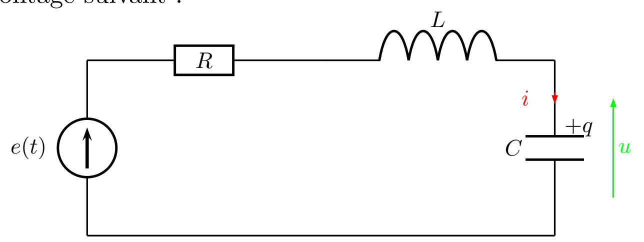
L'énergie qui était stockée dans la bobine est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

Circuits du second ordre

I - Dipôle RLC série, mise en équation

1 - Circuit étudié

On étudie le montage suivant :



La source de tension délivre un échelon de tension :

- $e(t) = 0$ pour $t < 0$, le régime continu est établi ;
- $e(t) = E$ pour $t > 0$.

ou

- $e(t) = E$ pour $t < 0$, le régime continu est établi ;
- $e(t) = 0$ pour $t > 0$.

On s'intéresse à l'évolution temporelle des grandeurs physiques de ce montage lors du régime transitoire.

D'après la loi des mailles, nous avons, pour $t > 0$:

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) + u(t),$$

avec $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$. On obtient alors :

$$e(t) = RC\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2} + u, \text{ pour } u$$

ou

$$e(t) = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}, \text{ pour } q$$

ou encore (en dérivant par rapport au temps, avec $e(t) = cste$ pour $t > 0$) :

$$0 = RC\frac{di}{dt} + LC\frac{d^2i}{dt^2} + i, \text{ pour } i$$

On en déduit que i, u et q sont régies par une même équation différentielle avec second membre constant.

Si on note x, la grandeur physique avec laquelle on travaille, on peut écrire l'équation différentielle précédente (équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, avec second membre) sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = \frac{\text{cste}}{LC},$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_e}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ pulsation propre et $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ facteur de qualité.

X_e est la valeur de x à l'équilibre (futur régime continu).

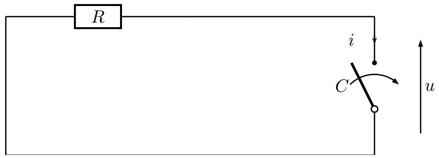
On parle de **forme canonique** de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

2 - Conditions initiales

x est une solution d'une équation différentielle du **second ordre**. Il nous faut donc **deux conditions initiales** sur x pour la déterminer.

a) Charge du condensateur

- Le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes, soit u. On a donc $u(0^+) = u(0^-)$.
  Or pour $t < 0$ le circuit équivalent au montage est (on considère le régime libre établi) :



On a donc $i(0^-) = 0$ et, d'après la loi des mailles :
$u(0^-) = 0$.

$$\boxed{u(0^+) = 0}$$

- La bobine impose la continuité de l'intensité du courant qui la parcourt, soit i. On a donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

$$\boxed{i(0^+) = 0}$$

  Or $i(0^+) = C\frac{du}{dt}(0^+)$ soit

$$\boxed{\frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0.}$$

- Pour connaître $\frac{di}{dt}(0^+)$, on utilise la loi des maille en 0^+ :

$$E = Ri(0^+) + L\frac{di}{dt}(0^+) + u(0^+)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$$

b) Établissement du régime libre

À faire :

$\boxed{u(0^+) = E}$ $\boxed{i(0^+) = 0}$ $\boxed{\frac{du}{dt}(t = 0^+) = 0}$ $\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{E}{L}}$

II - Les trois régimes transitoires

Il faut résoudre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_e.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont la somme d'une solution particulière notée x_p et des solutions de l'équation différentielle homogène associée notées x_h :

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx_h}{dt} + \omega_0^2 x_h = 0.$$

- Une **solution particulière** : on s'inspire du second membre !

$$\boxed{x_p(t) = cste = X_e}$$

- Les solutions de l'équation différentielle homogène associée : il faut passer par l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

On note Δ le discriminant de cette équation ; $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

Suivant le signe de Δ les racines de l'équation caractéristique sont réelles ou complexes et on observe différents types de régimes.

1 - Régime apériodique

$$\boxed{\Delta > 0\,;\, Q < \frac{1}{2}\,;\, R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Les racines sont réelles négatives :

$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}}$$

Les solutions x_h sont de la forme :

$$x_h(t) = Ae^{(-\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2})t} + Be^{-(\frac{\omega_0}{2Q}+\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2})t}.$$

Pour déterminer A et B, il faut travailler sur la solution complète : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$!

Cas de la charge du condensateur, $x = u$: $u(t)$ est de la forme :

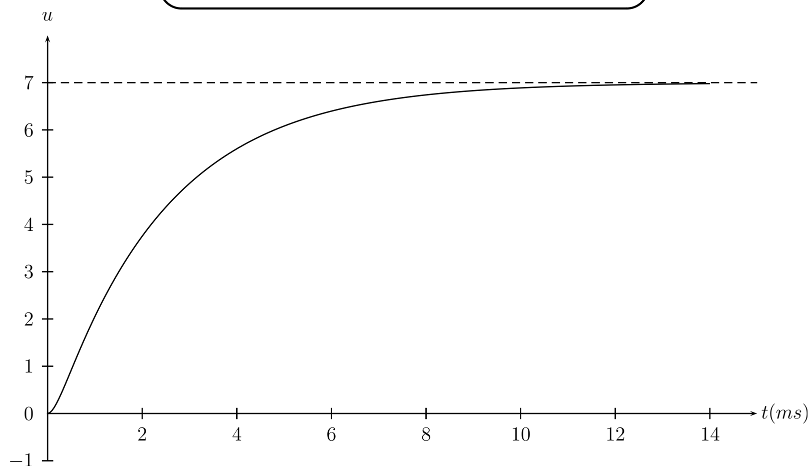
$$u(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Avec, à $t = 0$ $u(0) = 0$, $0 = E + A + B$, et $\dfrac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$. Il vient :

$$A = \frac{r_2}{r_1 - r_2}E$$

$$B = -\frac{r_1}{r_1 - r_2}E$$

$$\boxed{u(t) = E\left(1 + \frac{1}{r_1 - r_2}(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t})\right)}$$



Ce régime est le **régime apériodique**.

2 - Régime critique

$$\boxed{\Delta = 0\,;\, Q = \frac{1}{2}\,;\, R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

L'équation caractéristique associée comporte une racine double :

$$\boxed{r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0}$$

Les solutions x_h sont de la forme :

$$\boxed{x_h(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}}$$

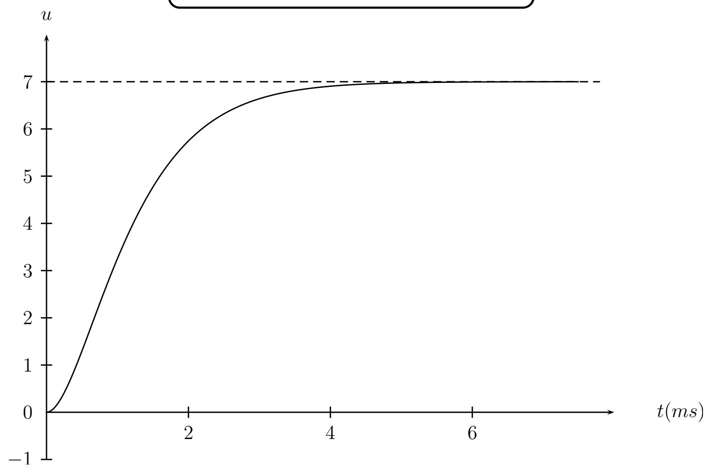
Pour déterminer A et B, il faut travailler sur la solution complète : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$!

Cas de la charge du condensateur, $x = u$: u est de la forme :

$$u(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

Avec, à $t = 0$, $u(0) = 0$ soit $0 = E + A$. Et $\dfrac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$, soit $0 = -\omega_0 A + B$.
On a donc $A = -E$ et $B = -\omega_0 E$.

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)}$$



Pour $Q = 1/2$, on parle de régime critique. Ce dernier sépare le régime apériodique du régime pseudo-périodique.
Le régime critique correspond au régime transitoire le bref.

3 - Régime pseudo-périodique

$$\boxed{\Delta < 0\,;\, Q > \frac{1}{2}\,;\, R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Le discriminant est négatif les racines de l'équation caractéristique associée sont complexes et conjuguées :

$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Les solutions x_h sont de la forme :

$$\boxed{x_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] = A_1 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi_1)}$$

avec ω pseudo-pulsation :

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

et A et B deux constantes d'intégration (ou A_1 et φ_1).

Pour déterminer A et B, il faut travailler sur la solution complète : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ **!**

Cas de la charge du condensateur, $x = u$: u est de la forme :

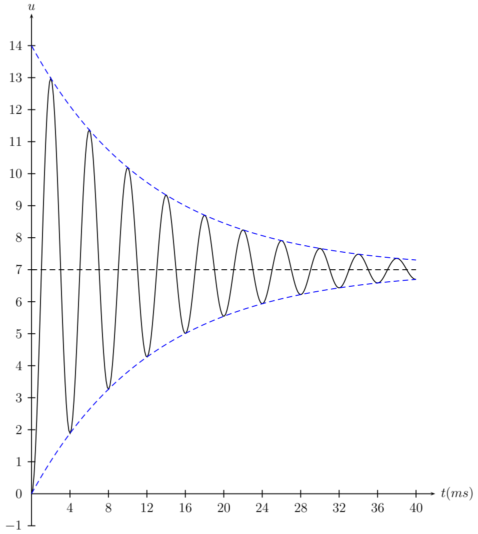
$$u(t) = E + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

Avec, à $t = 0$, $u(0) = 0$ soit $0 = E + A$. Et $\dfrac{du}{dt}(t = 0^+) = 0$, soit $0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + B\omega$.

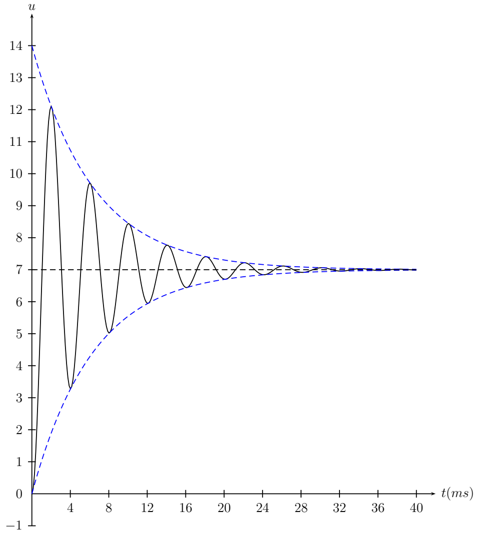
On a donc $A = -E$ et $B = -\dfrac{\omega_0}{2Q\omega}E$.

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right)\right)}$$

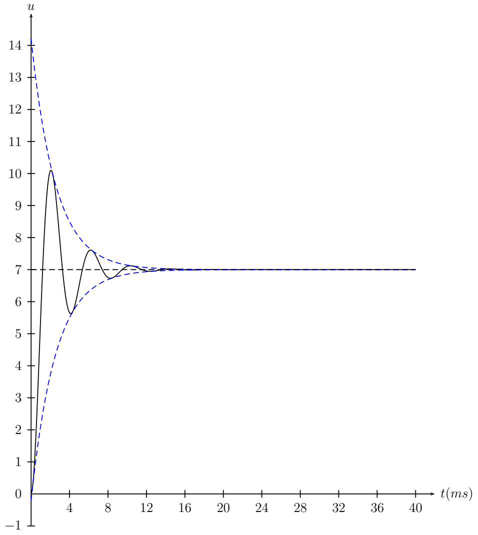
Cas où $Q = 10$ et $T_0 = 4$ s :



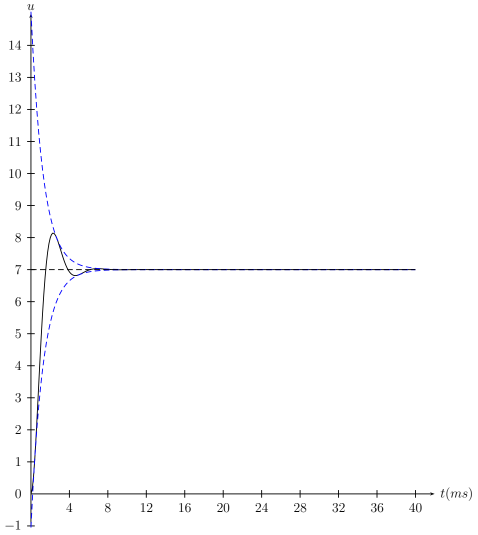
Cas où $Q = 5$ et $T_0 = 4$ s :



Cas où $Q = 2$ et $T_0 = 4$ s :



Cas où $Q = 1$ et $T_0 = 4$ s :



III - Bilan énergétique (charge du condensateur)

D'après la loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt}(t) + u(t)$.
En la multipliant par i on obtient :

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + Li(t)\frac{di}{dt} + u(t)i(t)$$

La puissance fournie par la source de tension $e(t)i(t)$ est répartie entre le conducteur ohmique (puissance reçue Ri^2), la bobine (puissance reçue $Li\dfrac{di}{dt}$) et la condensateur (puissance reçue $Cu\dfrac{du}{dt}$).

On note W_g l'énergie fournie par la source de tension lors de la charge du condensateur.

$$\begin{aligned} W_g &= \int_0^{+\infty} Ei(t)dt \\ &= E\int_0^{+\infty} \frac{dq}{dt}dt \\ &= E\left[q(t)\right]_0^{+\infty} \\ &= CE^2 \end{aligned}$$

Soit W_C l'énergie reçue par le condensateur lors de sa charge :

$$\begin{aligned} W_C &= \int_0^{+\infty} u(t)i(t)dt \\ &= C\int_0^{+\infty} u(t)\frac{du}{dt}dt \\ &= C\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right)dt \\ &= \frac{C}{2}\left[u^2(t)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}CE^2 \end{aligned}$$

Soit W_L l'énergie reçue par la bobine lors de la charge du condensateur :

$$\begin{aligned} W_L &= \int_0^{+\infty} L\frac{di}{dt}i(t)dt \\ &= L\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}i^2\right)dt \\ &= \frac{L}{2}\left[i^2(t)\right]_0^{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La bobine n'intervient pas dans le bilan énergétique global.

Soit W_R l'énergie reçue par le conducteur ohmique lors de la charge du condensateur :

$$W_R = W_g - W_C - W_L = \frac{1}{2}CE^2$$

Au cours de l'opération de charge du condensateur, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est emmagasinée par le condensateur, l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.