

Oscillateurs électriques libres et forcés

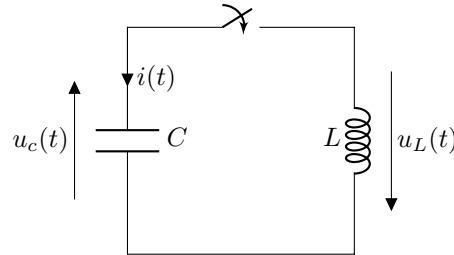
I - Oscillateur libre harmonique : circuit LC

1 - Circuit étudié

On étudie le circuit ci-contre constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L .

Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension E .

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.



2 - Mise en équation

Loi des mailles : $u_c + u_L = 0$

Relation du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt}$

Relation de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

Ainsi $u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0$

Soit

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (OH).

3 - Oscillateur harmonique

Pour l'équation différentielle précédente, on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on a alors

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$$

Oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

avec $\omega_0 > 0$, pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

4 - Résolution de l'équation différentielle

Un oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = D$$

Les fonctions s qui vérifient cette équation sont la somme :

- des solutions dites homogènes et notées s_H , solutions de $\frac{d^2 s_H}{dt^2} + \omega_0^2 s_H = 0$.
- d'une solution particulière notée S_P : $S_P = \frac{D}{\omega_0^2}$.

Les solutions de l'équation différentielle qui régit un oscillateur harmonique sont de la forme :

$$s(t) = \frac{D}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

ou

$$s(t) = \frac{D}{\omega_0^2} + C \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec (A, B) ou (C, φ) deux constantes d'intégration déterminées grâce aux conditions initiales $s(0)$ et $\frac{ds}{dt}(0)$.

Dans le cas du circuit LC, $D = 0$ et s est un signal sinusoïdal centré sur 0.

5 - Le signal sinusoïdal

Il s'agit d'un signal qui s'écrit sous la forme :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi),$$

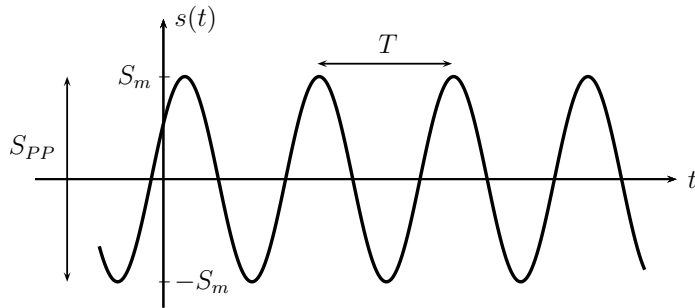
avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation et T la période, φ la phase à l'origine et S_m l'amplitude.

On note $S_{PP} = S_{\max} - S_{\min} = 2S_m$ l'amplitude crête à crête (Peak to Peak).

La valeur moyenne de $s(t)$ est $\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = 0$.

La valeur efficace S_e (ou S_{eff}) est la moyenne quadratique du signal (RMS : Root Mean Square). Elle est définie par $S_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt}$.

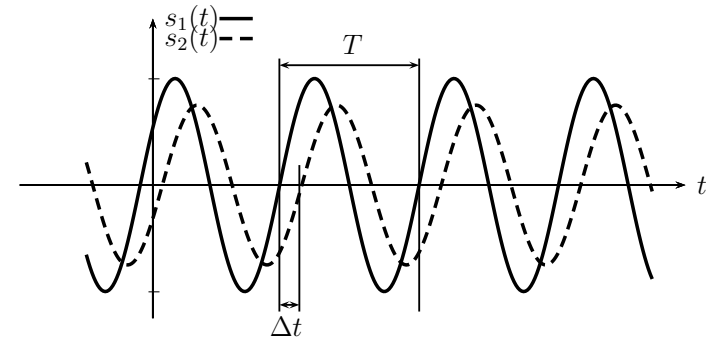
Ici $S_e = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$.



Le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones (même pulsation) est donné

par $\varphi_{2/1} = \pm 2\pi \frac{\Delta t}{T}$.

Sur le schéma suivant, le signal s_2 est en retard sur s_1 donc $\varphi_{2/1} < 0$.



6 - Bilan énergétique

On note \mathcal{E}_C l'énergie stockée dans le condensateur et \mathcal{E}_L l'énergie stockée dans la bobine.

On a

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} C E^2 (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

et

$$\mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L \left(-\sqrt{\frac{C}{L}} E \sin(\omega_0 t) \right)^2 = \frac{1}{2} C E^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} C E^2 (1 - \cos(2\omega_0 t))$$

On a sans cesse conversion d'énergie magnétique stockée dans la bobine en énergie électrique stockée dans le condensateur et inversement, avec une période de $T/2$. L'énergie totale contenue dans le circuit est constante et égale à l'énergie initiale ($\frac{1}{2} C E^2$). Il y a **équipartition** de l'énergie en moyenne entre la bobine et le condensateur.

II - Oscillateur amorti forcé : régime transitoire et régime forcé

On considère un oscillateur électrique amorti. L'amortissement des oscillations est lié à la diminution de l'énergie du système par dissipation (présence d'un conducteur

ohmique). Pour entretenir des oscillations, il faut compenser cette perte d'énergie grâce à une source (de tension ou d'intensité).

Oscillateur forcé :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_m \cos(\omega t)$$

La solution générale de l'équation différentielle précédente est la somme des solutions générales de l'équation différentielle homogène associée $x_h(t)$ et d'une solution particulière de l'équation complète $x_p(t)$. Ce que nous interprétons comme la somme du régime libre de l'oscillateur et d'un régime forcé.

En ce qui concerne le régime libre, c'est un régime transitoire (la plupart du temps) qui finit par disparaître au bout d'un certain temps. On note souvent τ le temps caractéristique du régime transitoire et nous considérons qu'au bout de quelques τ le régime libre a disparu. Le régime établi a la même forme que l'excitation par la source ; il s'agit du **régime forcé**, indépendant des conditions initiales.

III - Le régime sinusoïdal forcé

1 - La notation complexe

Soit s un signal (tension ou courant) que l'on cherche sous forme sinusoïdale :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On lui associe le signal complexe $\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{S}_m = S_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

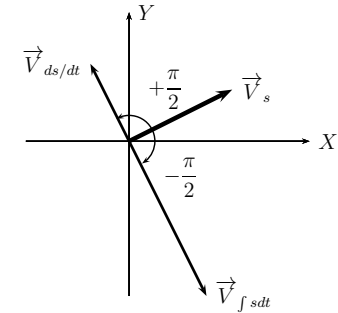
L'amplitude complexe contient toute l'information utile :

- l'amplitude réelle : $S_m = |\underline{S}_m|$
- la phase à l'origine : $\varphi = \arg(\underline{S}_m)$

La dérivée temporelle de la grandeur sinusoïdale, $\frac{ds}{dt}$, est représentée par $j\omega \underline{s}$ et la primitive, $\int s(t)dt$, est représentée par $\frac{\underline{s}}{j\omega}$. Ainsi, l'équation différentielle sur les grandeurs réelles se transforme en polynôme de $j\omega$ avec les grandeurs complexes.

2 - Diagramme de Fresnel

On peut également représenter une grandeur sinusoïdale par un vecteur \vec{V}_s tournant à la vitesse angulaire ω , de norme $\|\vec{V}_s\| = S_m$, faisant un angle $\omega t + \varphi$ avec un axe de référence prédéterminé. On représente en général ces vecteurs à l'instant $t = 0$. Ce vecteur s'identifie à la représentation graphique de la grandeur \underline{s} dans le plan complexe.



La dérivée de s est représentée par un vecteur qui aurait "tourné" de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique (multiplication par j dans le plan complexe).

La primitive de s est représentée par un vecteur qui aurait "tourné" de $-\frac{\pi}{2}$ (multiplication par $-j$).

IV - Circuits en RSF

1 - Impédances - Admittances

Pour les dipôles linéaires, la relation courant-tension, qui faisait éventuellement intervenir les dérivées, est désormais une loi multiplicative.

On définit alors l'impédance \underline{Z} et l'admittance \underline{Y} d'un dipôle par : $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ et $\underline{i} = \underline{Y} \underline{u}$ ou plutôt, avec les amplitudes complexes :

$$\underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m$$

et

$$\underline{I}_m = \underline{Y} \underline{U}_m$$

Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
Relation $i - u$	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
Relation $\underline{i} - \underline{u}$	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$
Impédance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Admittance	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$
TBF $\omega \rightarrow 0$	inchangé	fil	interrupteur ouvert
THF $\omega \rightarrow \infty$	inchangé	interrupteur ouvert	fil
Référence i	$I_{Rm} = \frac{U_m}{R}$ 	$U_{Lm} = L\omega I_m$ 	$U_{Cm} = \frac{I_m}{C\omega}$
Référence u	$I_{Rm} = \frac{U_m}{R}$ 	$I_{Lm} = \frac{U_m}{L\omega}$ 	$I_{Cm} = C\omega U_m$

2 - Lois des mailles et des nœuds

a) Lois des nœuds en RSF

Pour un nœud donné N , la somme des intensités des courants qui aboutissent à ce nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en repartent :

$$\sum_{k=1}^p \epsilon_k I_{m_k} = 0$$

p = nombre de branches issues du nœud N , $\epsilon_k = +1$ si i_k pointe vers le nœud, $\epsilon_k = -1$ sinon.

I_{m_k} amplitude complexe associée à i_k .

b) Lois des mailles en RSF

La somme des tensions algébriques u_k aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est nulle :

$$\sum_{k=1}^p \epsilon_k U_{m_k} = 0$$

p = nombre de branches de la maille, $\epsilon_k = +1$ si u_k est dans le sens de parcours de la maille, $\epsilon_k = -1$ sinon.

U_{m_k} amplitude complexe associée à u_k .

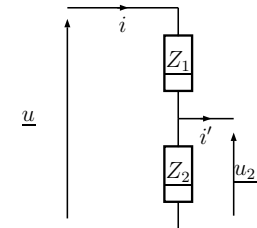
3 - Associations de dipôles

	Groupeement série	Groupeement parallèle
Impédances	$\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}_k$	$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_k}$
Admittances	$\frac{1}{\underline{Y}_{eq}} = \sum \frac{1}{\underline{Y}_k}$	$\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}_k$
Diviseur	de tension : $\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{eq}} \underline{u}$	de courant : $\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{eq}} \underline{i}$

Remarque : pour le diviseur de tension obtenu avec deux dipôles, on a une expression simplifiée :

Si $i' = 0$, on a alors

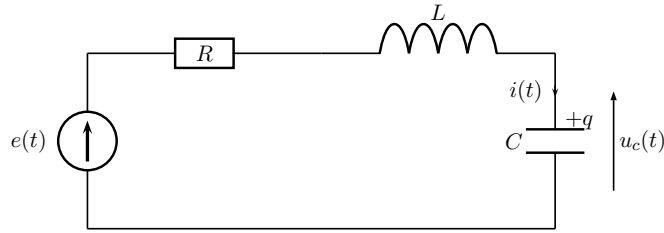
$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_1} \underline{u}$$



V - Résonance

On étudie le circuit RLC série, alimenté par une source de tension sinusoïdale

$$e(t) = E_m \cos(\omega t).$$



Rappel : l'équation différentielle qui régit u_C la tension aux bornes du condensateur est :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E_0}{LC} \cos(\omega t)$$

Forme canonique associée :

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur et Q facteur de qualité de l'oscillateur.

1 - Réponse en tension aux bornes du condensateur

a) Expression de l'amplitude complexe

Première méthode : exploitation de l'équation différentielle

En RSF, avec les amplitudes complexes, l'équation différentielle qui régit la tension aux bornes du condensateur se retrouve sous la forme :

$$-\omega^2 \underline{U}_C + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{U}_C + \omega_0^2 \underline{U}_C = \omega_0^2 E_0$$

On a :

$$\underline{U}_C(j\omega) = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

Autre méthode : d'après la formule du pont diviseur de tension

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} E_0 \\ &= \frac{1}{1 + \underline{Y}_C \cdot \underline{Z}_L + \underline{Y}_C \cdot \underline{Z}_R} E_0 \\ &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} E_0 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q\omega_0} \omega} E_0 \\ &= \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega} \end{aligned}$$

En revenant aux grandeurs réelles :

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

et

$$\begin{cases} \tan(\varphi_C(\omega)) &= -\frac{\omega \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ \sin(\varphi_C(\omega)) &\leq 0 \end{cases}$$

Si on introduit $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite (qui est une grandeur sans dimension), on peut écrire :

$$\underline{U}_C(jx) = \frac{E_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

et

$$U_{Cm}(x) = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

et

$$\begin{cases} \tan(\varphi_C(x)) &= -\frac{x}{Q(1-x^2)} = \frac{1}{Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} \\ \sin(\varphi_C(x)) &\leq 0 \end{cases}$$

On constate que l'amplitude et la phase à l'origine de la réponse dépendent de la pulsation d'excitation.

- Quand x (ou ω) tend vers 0 : $U_{Cm}(0) = E_0$ et $\varphi_C(0) = 0$.
- Quand x (ou ω) tend vers l'infini, $U_{Cm}(x)$ tend vers 0 et φ_C tend vers $-\pi$.

b) Les courbes de réponse en amplitude

On trace $U_{Cm}(x)$ en fonction de x pour différentes valeurs du facteur de qualité :

$$Q = 5$$

$$\frac{U_{Cm}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Quand il y a résonance,

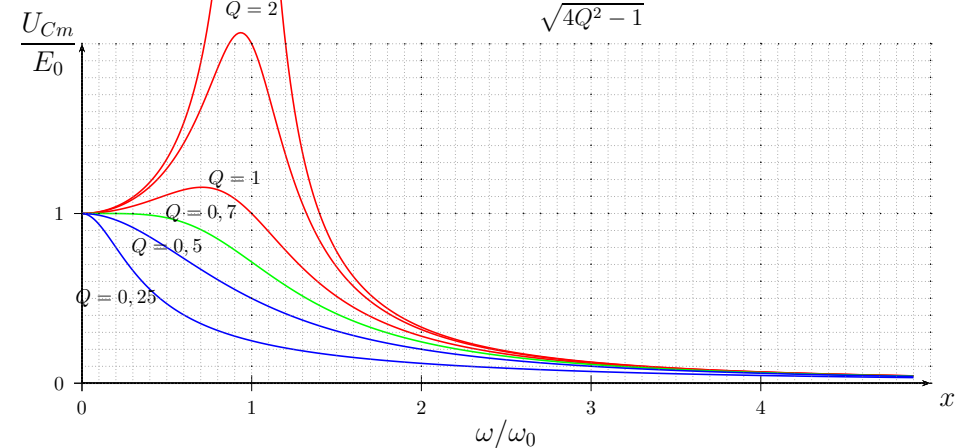
$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

ou

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) (< \omega_0^2)$$

Quand il existe (pour $Q > \sqrt{2}/2$), le maximum vaut

$$\frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$



c) La résonance en amplitude

On parle de résonance lorsque la réponse en amplitude d'un système physique (ici la réponse en tension aux bornes du condensateur pour le RLC série), dépendant de la fréquence d'excitation, passe par un maximum.

On cherche s'il existe un maximum en amplitude, pour cela on étudie $U_{Cm}(x) = \frac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$.

L'amplitude U_{Cm} est maximale lorsque

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

est minimale.

$\frac{df}{dx}$ s'annule pour $x = 0$ (toujours) ou $x^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$. La deuxième solution n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Si $Q \leq 1/\sqrt{2}$ alors $U_{Cm}(x)$ décroît avec la pulsation, il n'y a pas de résonance.
- Si $Q > 1/\sqrt{2}$, alors $U_{Cm}(x)$ passe par un maximum pour $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ ou

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

La valeur du maximum est :

$$U_{Cm}(\omega_r) = E_0 \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

Il y a résonance en amplitude.

d) Bande passante

La finesse de la résonance se définit à l'aide de la bande passante. Il s'agit du domaine de fréquences (ou de pulsations) pour lesquelles l'amplitude est supérieure ou égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

On cherche les ω telles que :

$$U_{Cm}(\omega) \geq \frac{U_{Cm_{max}}}{\sqrt{2}}$$

soit

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

En notant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, on obtient :

$$x^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)x^2 + 1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4} \leq 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 - 4\left(1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4}\right) = \frac{4Q^2 - 1}{Q^4} > 0.$$

$$x_{1,2}^2 = -\frac{1}{2Q^2} + 1 \pm \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2} = \frac{2Q^2 - 1 \pm \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}$$

$$x_2^2 = \frac{2Q^2 - 1 + \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2} \text{ existe toujours } (Q > 1/\sqrt{2}).$$

Mais $x_1^2 = \frac{2Q^2 - 1 - \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}$ n'existe que si le numérateur est positif, c'est-à-dire :

$$2Q^2 - 1 \geq \sqrt{4Q^2 - 1} \text{ ou } 4Q^4 - 4Q^2 + 1 \geq 4Q^2 - 1.$$

On doit avoir : $Q^4 - 2Q^2 + 1/2 \geq 0$ ou $Q^2 \geq 1 + 1/\sqrt{2}$.

Remarque : le cas limite $Q^2 = 1 + 1/\sqrt{2}$ correspond à :

$$\frac{U_{Cm_{max}}}{\sqrt{2}} = U_{Cm}(0) = E_0 = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\text{soit } 4Q^2 - 1 = 2Q^4 \text{ ou } Q^4 - 2Q^2 + 1/2 = 0.$$

Pour $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, la bande passante correspond à l'intervalle :

$$\left[0; \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1 + \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}}\right].$$

Et pour $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} < Q$, la bande passante correspond à l'intervalle :

$$\left[\omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1 - \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}}; \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1 + \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}}\right].$$

2 - Réponse en intensité

a) Expressions de l'amplitude et de la phase

On s'intéresse ici à la tension aux bornes de la résistance \underline{u}_R ou l'intensité \underline{i} .

En passant aux amplitudes complexes, et en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, il vient :

$$\boxed{\underline{U}_{Rm}(\omega) = \frac{E_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{I}_m(\omega) = \frac{E_0/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

En revenant aux grandeurs réelles :

$$\boxed{I_m(\omega) = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

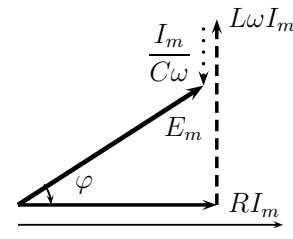
et

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\tan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \text{ car } \cos \varphi > 0}$$

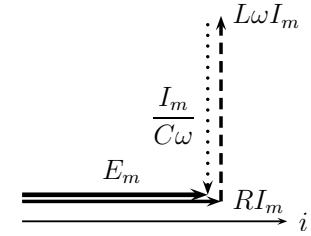
Lorsque la pulsation (ou la fréquence) du signal d'entrée $e(t)$ varie, la réponse en intensité (ou en tension aux bornes de R) voit son amplitude varier. Elle passe par un maximum lorsque la fonction sous la racine est minimale, soit pour $\boxed{x_r = 1}$ ou encore $\boxed{\omega_r = \omega_0}$.

En $x_r = 1$: $U_{Rm,max} = E_0$ et $\varphi = 0$ (courant en phase avec $e(t)$).

On peut retrouver la condition de résonance avec un diagramme de Fresnel. Les dipôles étant en série, on prend l'intensité comme référence pour le tracé :

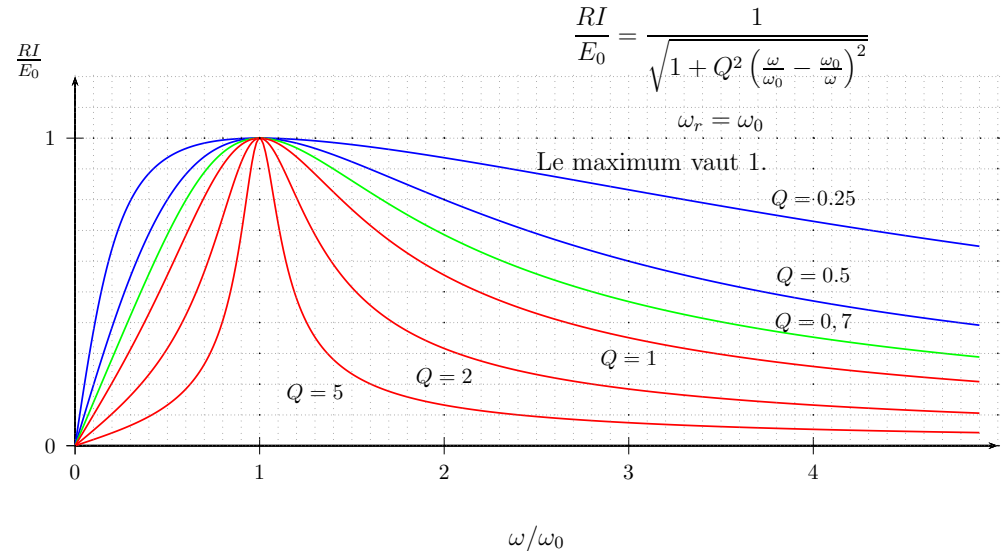


Cas quelconque : $\varphi \neq 0$



$$\frac{I_m}{C\omega} = L\omega I_m \text{ soit } \boxed{LC\omega^2 = 1} : \varphi = 0.$$

b) Étude de la résonance



c) Largeur de bande

On cherche les ω telles que :

$$I_m(\omega) \geq \frac{I_{mmax}}{\sqrt{2}}$$

soit, à la limite,

$$I_m(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2}R} = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

On a

$$2 = 1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$$

En notant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, on obtient :

$$\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Δ le discriminant associé : $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$. Les racines positives sont :

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Les deux pulsations de coupure sont $\omega_1 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right)$

La largeur de bande $\Delta\omega$ a pour expression :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Filtres linéaires

I - Notion de filtre

1 - Définitions

Tout signal réalisable en pratique peut se décomposer en une somme de composantes sinusoïdales.

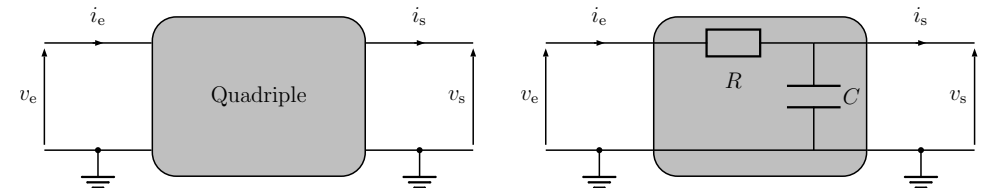
Pour un signal s **périodique** de période $T_s = \frac{1}{f_s}$, on peut écrire :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

où A_0 est la **composante continue** (valeur moyenne),
 A_1 l'amplitude du **fondamental** (fréquence $f_1 = f_s$)
et les A_n les différents **harmoniques** (fréquences $f_n = n f_s$, $n > 1$).

L'action d'un filtre sur un tel signal sera de transmettre différemment les différentes composantes fréquentielles.

On se limite ici à l'étude des filtres linéaires (régis par une équation différentielle linéaire). En électronique, il s'agit d'un opérateur quadripolaire, réalisé par un circuit comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, circuit constitué de dipôles linéaires (passifs ou éventuellement actifs).



Si la réponse à un signal d'entrée e_1 (resp. e_2) est s_1 (resp. s_2), alors la réponse à une entrée $\alpha e_1 + \beta e_2$ sera $\alpha s_1 + \beta s_2$. Il nous suffit donc d'étudier le comportement du filtre en régime sinusoïdal forcé à une fréquence donnée, pour en déduire comment seront transmises les différentes composantes spectrales d'un signal périodique quelconque,

et ainsi reconstituer la réponse du filtre.

2 - Fonction de transfert

Pour une fréquence donnée ω , la réponse du filtre linéaire est caractérisée par sa fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}_m(j\omega)}{\underline{E}_m}$$

Son module donne le **GAIN** du filtre :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|.$$

Son argument donne le **déphasage** du signal de sortie par rapport à l'entrée :

$$\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e.$$

Les grandeurs réelles $e(t)$ et $s(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire :

$$a_n \frac{d^n s}{dt} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m e}{dt} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0$$

La fonction de transfert s'exprime alors comme le rapport de deux polynômes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

Le système linéaire considéré est un filtre si \underline{H} est bien fonction de ω . L'**ordre** du filtre est le degré maximum des polynômes N et D .

Remarque : Cette fonction de transfert peut se décomposer en produit de filtres d'ordre 1 ou 2 donc on se limitera à l'étude de ces ordres particuliers.

3 - Diagramme de Bode

Il résume le comportement d'un filtre par le tracé (en échelle logarithmique), de **deux courbes**,

— gain en décibels $G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = f_1(\omega)$

— phase $\varphi_{s/e}(\omega) = f_2(\omega)$

4 - Pulsation de coupure et bande passante

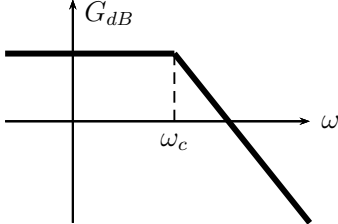
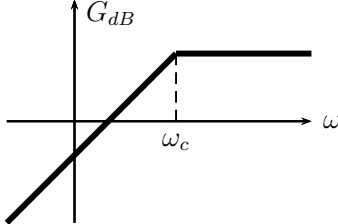
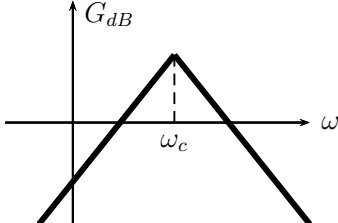
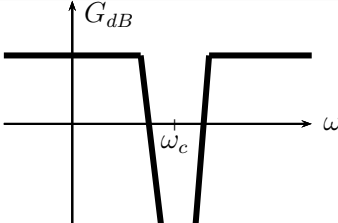
On considère que le signal est transmis correctement si l'amplitude est suffisamment grande, c'est-à-dire si $S_m(\omega) \geq \frac{S_{m,max}}{\sqrt{2}}$.

Les pulsations limites (ω_c) vérifiant l'égalité sont les **pulsations de coupure**.

L'intervalle de pulsation (ou de fréquence) telle que la condition précédente est remplie constitue la **bande-passante**. Cette grandeur est caractéristique de la qualité d'un filtre.

II - Nature d'un filtre

La nature d'un filtre se déduit de son comportement aux fréquences extrêmes : très basses (TBF) et très hautes (THF)

Passe-bas	Passe-haut
TBF : $G \neq 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G = 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$	TBF : $G = 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G \neq 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$
	
Passe-bande	Coupe-bande
TBF : $G = 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G = 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$	TBF : $G \neq 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$ THF : $G \neq 0$, $G_{dB} \rightarrow -\infty$
	

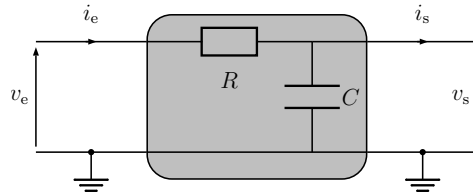
1 - Filtre passe-bas d'ordre 1

Exemple : circuit RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

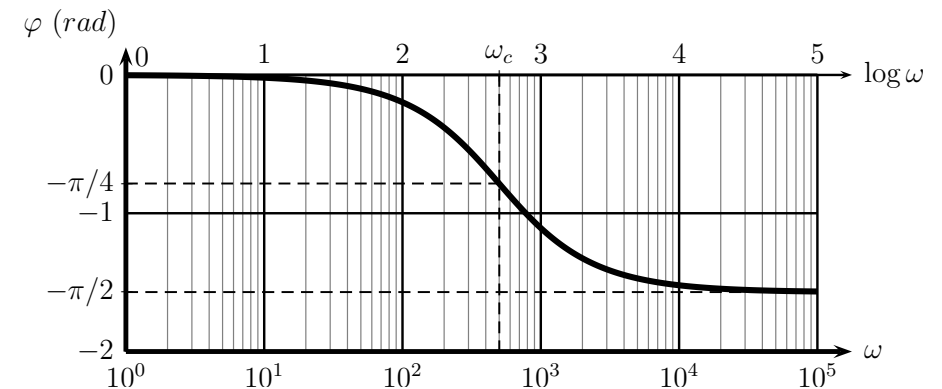
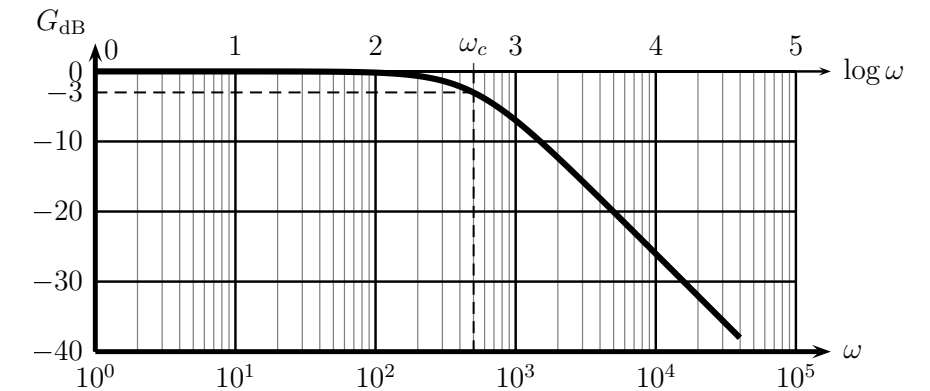


Comportement asymptotique :

TBF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$
$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{j\tau\omega}$	$G \sim \frac{1}{\tau\omega}$	$G_{dB} \sim -20 \log(\tau\omega)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Ce filtre présente une asymptote de pente -20 dB/dc aux THF. Il a donc un comportement *intégrateur* ($\underline{H} \sim \frac{1}{j\tau\omega}$).



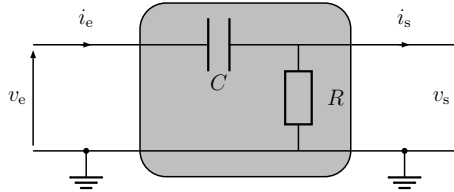
2 - Filtre passe-haut d'ordre 1

Exemple : circuit RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

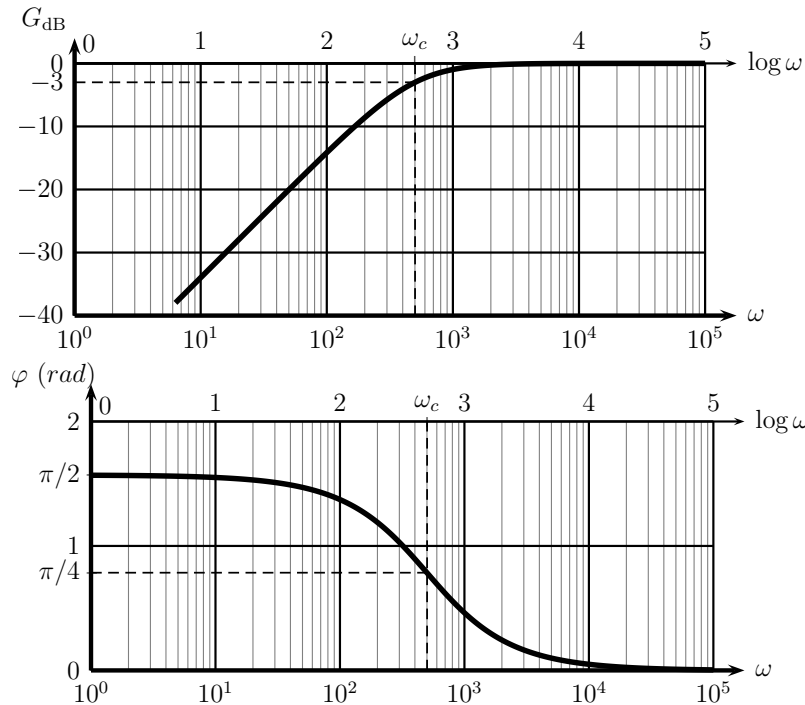
$$G(\omega) = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$$



Comportement asymptotique :

TBF	$\underline{H} \sim j\tau\omega$	$G \sim \tau\omega$	$G_{dB} \sim 20 \log(\tau\omega)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$\omega_c = \frac{1}{RC}$	$\underline{H} = \frac{j}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$



La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Ce filtre présente une asymptote de pente 20 dB/dc aux TBF. Il a donc un comportement *dérivateur* ($\underline{H} \sim j\tau\omega$).

3 - Filtre passe-bande

Exemple : circuit RLC $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - j\frac{1}{RC\omega}}$

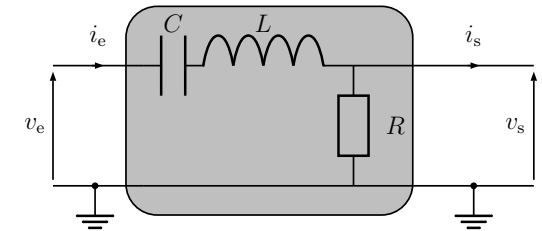
On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} ; \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$



Comportement asymptotique :

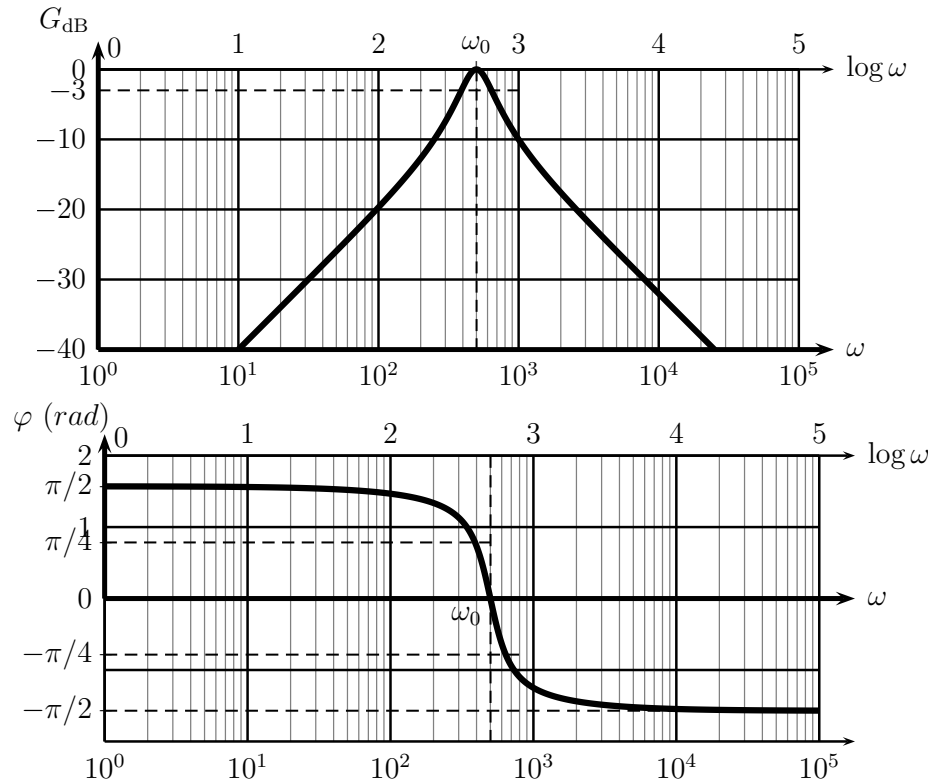
TBF	$\underline{H} \sim j\frac{x}{Q}$	$G \sim \frac{x}{Q}$	$G_{dB} \sim 20 \log \left(\frac{x}{Q} \right)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$x_{c,1} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1-j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
$x = 1$	$\underline{H} = 1$	$G = 1$	$G_{dB} = 0$	$\varphi = 0$
$x_{c,2} = +\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1+j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{jQx}$	$G \sim \frac{1}{Qx}$	$G_{dB} \sim -20 \log(Qx)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

La pulsation de résonance est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Les pulsations de coupures sont données

dans le tableau, elles définissent la *bande-passante* du filtre :

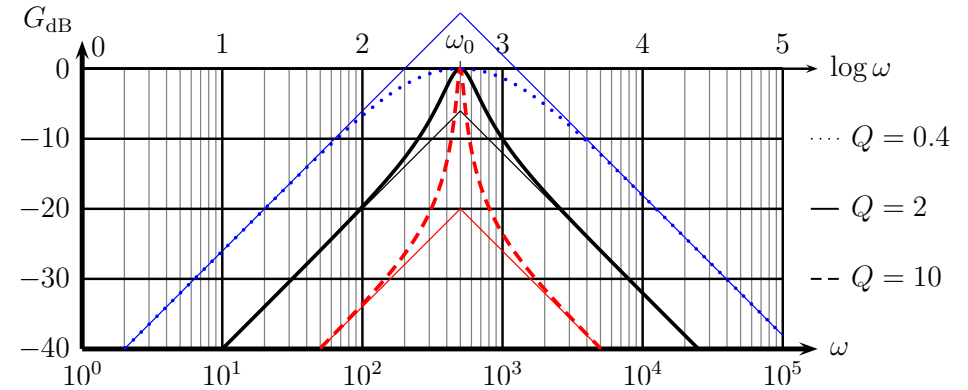
$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Ce filtre présente une asymptote de pente +20 dB/dc aux TBF (comportement *dérivateur*) et une asymptote de pente -20 dB/dc aux THF (comportement *intégrateur*).



Influence du facteur de qualité

Il contrôle l'acuité de la résonance et donc la largeur de la bande passante. Les asymptotes TBF et THF se coupent toujours pour $x = 1$ soit $\log x = 0$ en $y = -20 \log Q$.



Si $Q < 1$, la résonance est floue, la bande passante large, et la courbe de gain est en dessous des asymptotes. Si $Q > 1$, la résonance est aigüe, la bande passante étroite, et la courbe de gain au dessus des asymptotes.

4 - Filtre passe-bas d'ordre 2

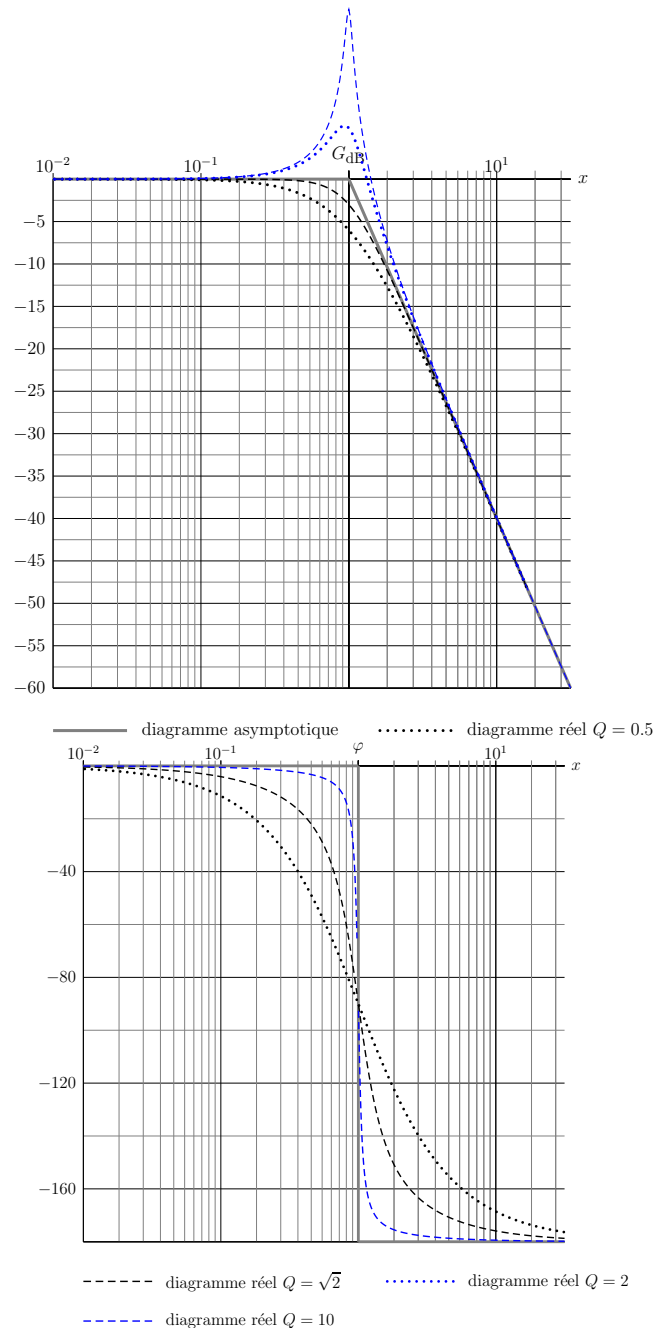
Forme générale de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

avec x pulsation réduite, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 pulsation propre et Q facteur de qualité.

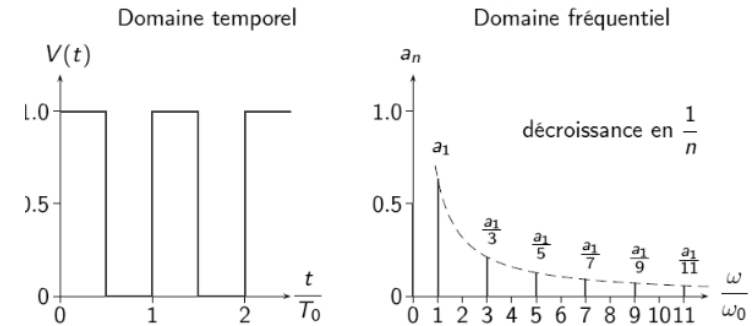
$$G_{dB}(x) = 20 \log(H_0) - 10 \log \left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]$$

$$\begin{cases} \tan(\varphi) = -\frac{x}{Q(1 - x^2)} \\ \sin(\varphi) < 0 \end{cases}$$



III - Compléments

On s'intéresse à l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique mais non sinusoïdal. Le contenu fréquentiel est transmis sélectivement. La figure suivante représente ce signal dans le domaine temporel, puis spectral.



Tracés pour $E_0 = 1 \text{ V}$.

$$V(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\omega_0 t) \right)$$

a) Moyenneur

Il s'agit d'un filtre passe-bas qui va donc systématiquement laisser passer la composante continue (valeur moyenne) et plus ou moins couper les hautes fréquences selon les valeurs respectives de la fréquence de coupure f_c du filtre et la fréquence fondamentale f_e du signal d'entrée.

Si $f_c \gg f_e$, le signal est partiellement transmis en plus de sa composante continue. Si $f_c \ll f_e$ alors seule la composante continue est transmise par le filtre, on a un *moyenneur*.

b) AC-DC

Sur un oscilloscope, il existe plusieurs positions pour observer un signal. La position *DC* (Direct Current) correspond au signal direct, non filtré, mais la position *AC* (Alternative Current) a été filtrée avant d'être observée. On a coupé la composante continue à l'aide d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure assez basse pour

laisser passer l’essentiel des composantes spectrales du signal de départ.

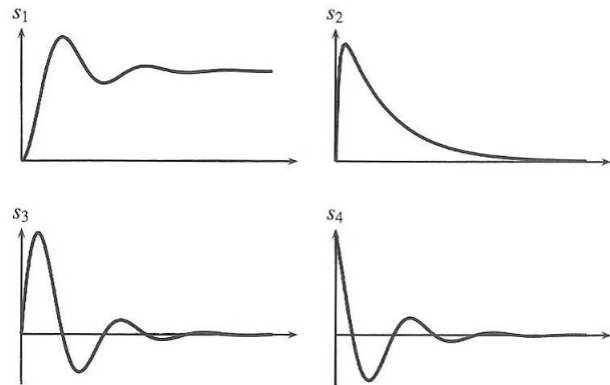
Privé de composante continue, le signal AC observé à l’oscilloscope est centré sur 0.

c) Réponse indicielle

La réponse indicielle d’un système correspond au signal de sortie recueilli lorsqu’on envoie en entrée une marche (ou fonction de Heaviside). L’allure de cette réponse renseigne sur la nature du filtre.

Pour qu’il existe de brusques variations (discontinuités) dans le signal de sortie, il faut que celui-ci contienne des hautes fréquences : le système qui agit comme filtre doit présenter un caractère passe-haut.

Pour qu’il existe une valeur moyenne non nulle dans le signal de sortie, celui-ci doit contenir des basses fréquences (composante continue) : le système qui agit comme filtre doit présenter un caractère passe-bas.



	Continuité en 0	Valeur finale	Nature du filtre
Système 1	oui (pas de HF)	non nulle (BF)	passe-bas
Système 2	oui (pas de HF)	nulle (pas de BF)	passe-bande
Système 3	oui (pas de HF)	nulle (pas de BF)	passe-bande
Système 4	non (HF)	nulle (pas de BF)	passe-haut

IV - Filtres actifs en électronique

1 - Modèle de l’ALI idéal en régime linéaire

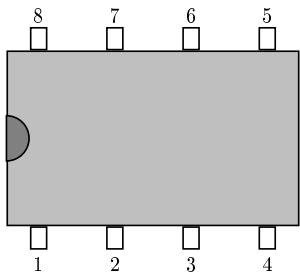
Un ALI est un macrocomposant qui a été, à l’origine, conçu pour les besoins des calculateurs analogiques. C’est aujourd’hui un circuit intégré sur une puce de silicium et qui comporte divers éléments : résistances, condensateurs, diodes...

a) Présentation de l’ALI

L’**Amplificateur Linéaire Intégré** (ALI) est un amplificateur différentiel : il amplifie la différence de potentiel entre ses deux entrées appelées entrée non inverseuse \oplus et entrée inverseuse \ominus .

C’est un quadripôle qui ne fonctionne que s’il est alimenté par une source de tension symétrique $\pm 15\text{ V}$.

Les ALI utilisés en TP sont intégrés dans un petit boîtier de la forme d’un petit rectangle (environ $1\text{ cm} \times 6\text{ mm}$) de très faible épaisseur. Ce boîtier comporte 8 broches de connexion. Le schéma correspondant est donné ci-dessous.



- On utilisera 5 connexions de l’ALI :
- 2 Entrée inverseuse E^-
 - 3 Entrée non inverseuse E^+
 - 4 Alimentation ($-V_{cc} = -15\text{ V}$)
 - 6 Sortie
 - 7 Alimentation ($+V_{cc} = +15\text{ V}$)

b) Représentation conventionnelle

On ne représente que les deux entrées inverseuse et non inverseuse, et la sortie.

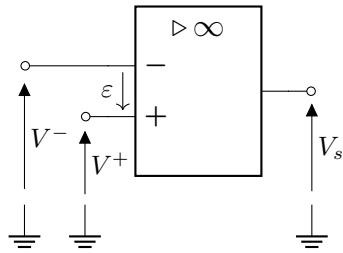


Schéma européen

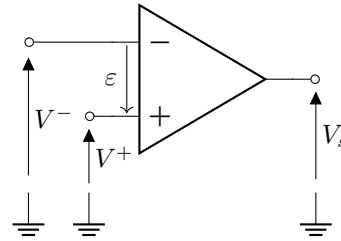
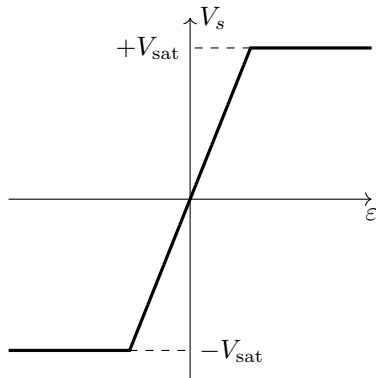


Schéma américain

c) Régimes linéaire et de saturation

La caractéristique statique de l'ALI représente la tension de sortie V_s en fonction de $\varepsilon = V^+ - V^-$ en régime permanent continu.



On distingue deux régimes :

- Si $-V_{\text{sat}} < V_s < +V_{\text{sat}}$:
régime linéaire.
- Si $V_s = \pm V_{\text{sat}}$:
régime de saturation

Le régime linéaire :

En régime linéaire et en statique, on note μ_0 le gain statique :

$$V_s = \mu_0 \varepsilon$$

Pour les ALI usuels, $\mu_0 \approx 2.10^5$

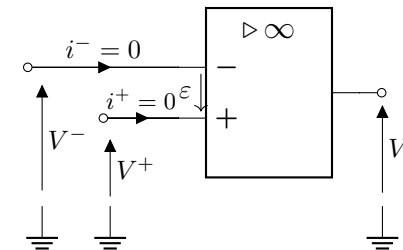
En régime variable, l'ALI se comporte comme un filtre passe-bas du 1^{er} ordre de fréquence de coupure de l'ordre de 20 Hz.

De façon générale, une rétroaction sur la borne \ominus a un effet stabilisant, ainsi **tous les ALI fonctionnant en régime linéaire ont une boucle de rétroaction sur**

l'entrée inverseuse

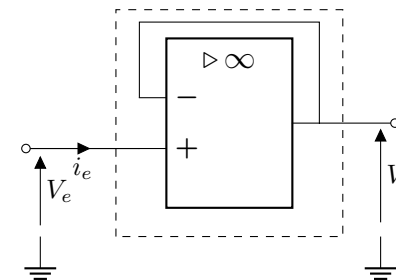
d) Modèle de l'ALI idéal

- Les courants de polarisation i^+ et i^- sont nuls.
- Le courant de sortie i_s est indépendant de la tension de sortie V_s : l'impédance de sortie de l'ALI est nulle.
- La réponse de l'ALI est instantanée.
- La relation entrée-sortie en régime linéaire est $\varepsilon = 0$ tant que $-V_{\text{sat}} < V_s < V_{\text{sat}}$ (régime linéaire)



2 - Exemples de montages à ALI

a) Montage suiveur

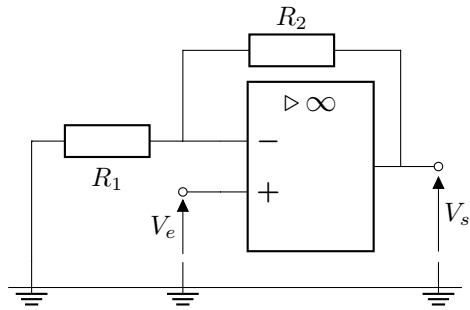


Relation entrée-sortie :

$$V_e = V_s$$

Impédance d'entrée : $i_e = i^+ = 0$ donc l'impédance d'entrée Z_e est infinie.

b) Montage non inverseur

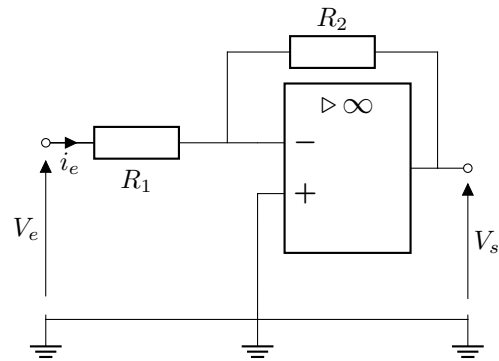


Relation entrée-sortie :

$$V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_e$$

Impédance d'entrée : $i_e = i^+ = 0$ donc l'impédance d'entrée Z_e est infinie.

c) Montage inverseur

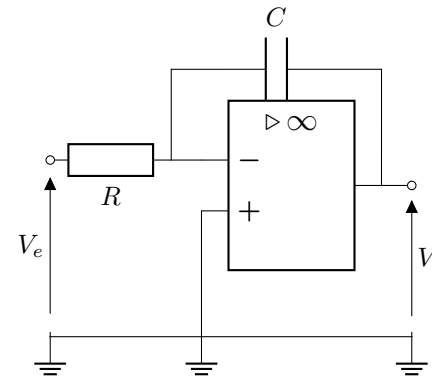


Relation entrée-sortie :

$$V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

Impédance d'entrée : $i_e = \frac{V_e}{R_1}$ donc l'impédance d'entrée vaut R_1 .

d) Montage intégrateur



Relation entrée-sortie :

$$\frac{V_e}{R} = -C \frac{dV_s}{dt}$$

Impédance d'entrée : $i_e = \frac{V_e}{R}$ donc l'impédance d'entrée vaut R .