



Devoir surveillé n°1

Samedi 24 septembre 2022

Première partie

Modélisation de la fuite de matière d'un réservoir rempli de dioxyde de carbone gazeux

Présentation générale

Ce sujet repose sur l'étude théorique d'une fuite de matière au sein d'une cuve contenant du dioxyde de carbone $\text{CO}_{2,g}$. Cette partie est dédiée à l'établissement du modèle thermodynamique du phénomène de fuite de matière contenue dans une cuve à travers un orifice.

Précisions concernant les notations utilisées

Symbole	Nom	Unité
$C_{P,m}$	Capacité thermique molaire à pression constante	$\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
c_P	Capacité thermique massique à pression constante	$\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
D_m	Débit massique	kg.s^{-1}
h	Enthalpie massique	J.kg^{-1}
M	Masse molaire	kg.mol^{-1}
m	Masse	kg
P	Pression	Pa
$\dot{Q} = \delta Q/dt$	Puissance thermique	W
R	Constante des gaz parfaits	$\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
T	Température	K
T_c	Température critique	K
U	Énergie interne	J
u	Énergie interne massique	J.kg^{-1}
V	Volume	m^3
$\dot{W} = \delta W/dt$	Puissance utile	W
ω	Vitesse des courants de matière	m.s^{-1}
Ω	Section de fuite	m^2

I Généralités sur les bilans de matière et d'énergie en système ouvert

On s'intéresse au système ouvert décrit par la **figure 1**. Ce système possède une entrée de matière (notée A), une sortie (notée B). Il reçoit du milieu extérieur une puissance thermique \dot{Q}_e et une puissance de force \dot{W}_e . Il fournit au milieu extérieur une puissance thermique \dot{Q}_s et une puissance de force \dot{W}_s .

Les grandeurs \dot{Q}_e , \dot{Q}_s , \dot{W}_e et \dot{W}_s sont définies comme des quantités algébriques. En revanche, les débits massiques $D_{m,A}$ et $D_{m,B}$ sont définis comme des quantités positives.

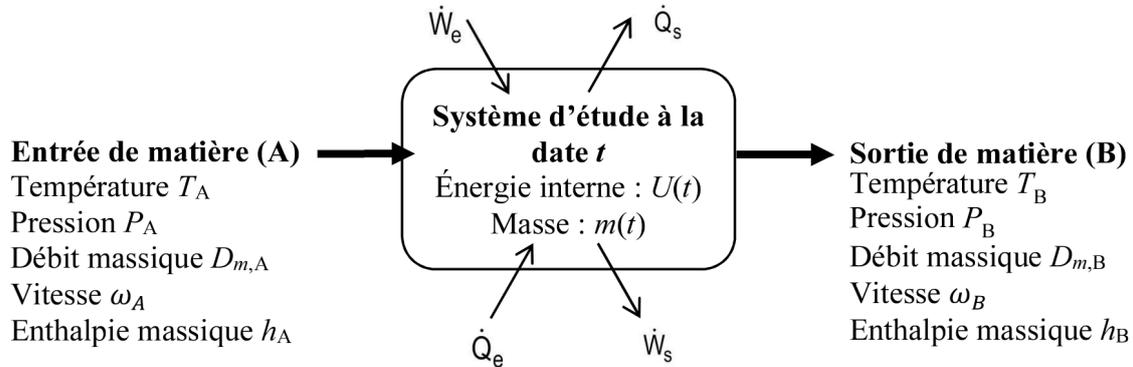


Figure 1 - Représentation schématique d'un système ouvert

- Q1. Donner l'unité des grandeurs \dot{W} , \dot{Q} et D_m mentionnées sur la **figure 1**.
- Q2. Le système considéré est supposé évoluer en régime stationnaire. Quelle est la relation entre les débits des courants de matière entrant $D_{m,A}$ et sortant $D_{m,B}$? Justifier.
- Q3. Appliquer le premier principe industriel de la thermodynamique au système ouvert stationnaire de la **figure 1**. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \text{Débit d'énergie} \\ \text{entrant} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Débit d'énergie} \\ \text{sortant} \end{pmatrix} \quad (1)$$

On explicitera les termes débits d'énergie (homogènes à une puissance) en fonction des grandeurs introduites par la **figure 1**.

- Q4. Le système étudié de la **figure 1** est supposé évoluer en régime transitoire. On note $m(t)$, la fonction représentant l'évolution de sa masse m en fonction du temps t . À partir d'un bilan de matière, déduire la relation existant entre $\frac{dm(t)}{dt}$, $D_{m,A}$ et $D_{m,B}$. Proposer une interprétation qualitative du bilan.

On admet dans la suite l'écriture du premier principe en système ouvert, étendue aux systèmes immobiles en régime transitoire :

$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Débit d'énergie} \\ \text{entrant} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Débit d'énergie} \\ \text{sortant} \end{pmatrix} \quad (2)$$

où $\frac{dU}{dt}$ désigne la dérivée de l'énergie interne du système étudié par rapport au temps t .

- Q5. Proposer une interprétation qualitative du bilan d'énergie traduit par l'équation (2).

II Écriture d'un modèle décrivant la fuite d'un réservoir adiabatique contenant du CO₂

On s'intéresse à présent à un réservoir contenant un gaz supposé parfait. Ce réservoir indéformable (donc de volume V fixe) est le siège d'une fuite vers le milieu environnant à la température $T_{\text{ext}} = 293$ K et à la pression $P_{\text{ext}} = 1,01$ bar supposées fixes dans tout le sujet. Il n'est pas agité mécaniquement. Toutefois, les propriétés du gaz dans le réservoir sont supposées uniformes à chaque instant. Ce réservoir est décrit par la **figure 2**.

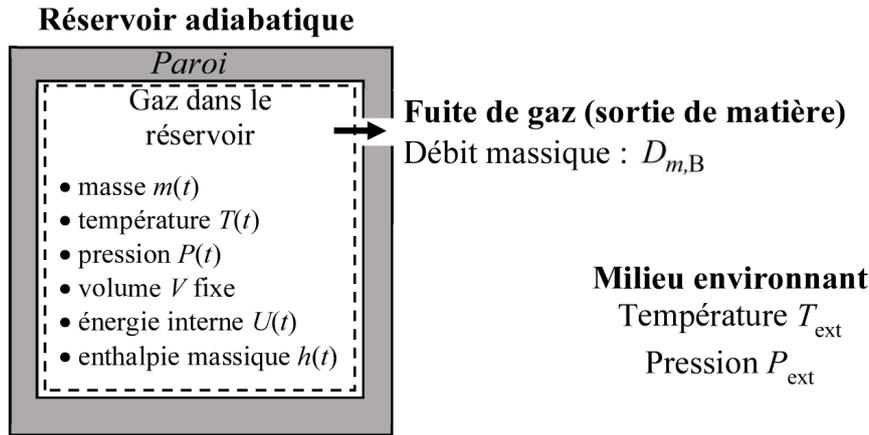


Figure 2 - Réservoir adiabatique renfermant du gaz et soumis à une fuite de gaz vers le milieu environnant

Q6. *Le modèle gaz parfait*

- Dans quelle situation limite un gaz réel s'identifie-t-il exactement à un gaz parfait ?
- Donner la valeur du rapport $C_{P,m}/R$ pour un gaz parfait monoatomique.
- Faire de même pour un gaz parfait diatomique aux températures usuelles.
- Pour le CO₂ gaz parfait, le rapport $C_{P,m}/R$ dépend de la température selon une loi notée par la suite $f(T)$. Donner la relation unissant les variations d'énergie interne molaire dU_m et de température dT à la fonction $f(T)$. En déduire l'expression de du/dT où u désigne l'énergie interne massique d'un gaz parfait pur.

Q7. On suppose que les propriétés intensives du gaz dans le réservoir (entre autres, sa température T , sa pression P et son enthalpie massique h) sont uniformes. On considèrera que les propriétés intensives du gaz sortant sont les mêmes que celles du gaz dans le réservoir. On s'intéresse au système volume contenant le gaz à T et P dans le réservoir, paroi non comprise représenté par des pointillés sur la **figure 2**. Montrer que l'application du bilan de matière et du premier principe au système en pointillés décrit par la **figure 2** amène :

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = -D_{m,B} \\ \frac{dU}{dt} = -D_{m,B} \cdot h(t) \end{cases} \quad (3)$$

On supposera négligeable l'énergie cinétique massique de la matière quittant le système.

Q8. En introduisant la relation entre l'énergie interne massique u (en J.kg⁻¹) et l'énergie interne U (en J) du système étudié, montrer que l'équation (3) amène :

$$\frac{du}{dt} = \frac{R \cdot T}{M \cdot m} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (4)$$

où R et M désignent respectivement la constante des gaz parfaits et la masse molaire du gaz.

En déduire que :

$$[f(T) - 1] \frac{dT}{dt} = \frac{T}{m} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (5)$$

On cherche à présent à estimer le débit $D_{m,B}$ de gaz quittant le réservoir. Pour ce faire, on s'intéresse à la zone de l'espace dans laquelle se produit la fuite.

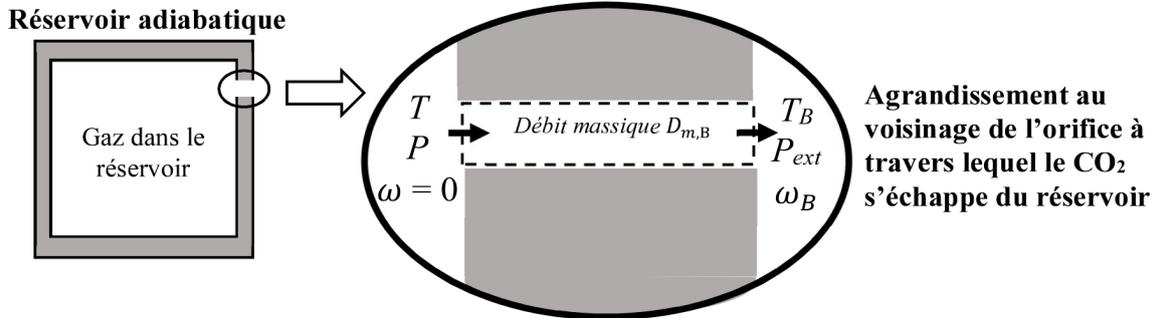


Figure 3 - Fuite de CO₂ gazeux à travers l'orifice dans la paroi du réservoir

On considère le système orifice dans la paroi du réservoir ; on supposera que :

- l'écoulement de gaz à travers l'orifice est adiabatique et stationnaire ;
- la vitesse du gaz en entrée du système est nulle ; elle est notée ω_B en sortie ;
- la température et la pression du gaz en entrée sont notées T et P (ce sont celles du gaz à l'intérieur du réservoir) ; en sortie, elles sont notées T_B et $P_B = P_{ext} = 1,01$ bar.

Q9. Montrer que le débit massique $D_{m,B}$ de fluide à travers la section de l'orifice est donné par :

$$D_{m,B} = \frac{\Omega \cdot \omega_B \cdot M \cdot P_{ext}}{R \cdot T_B} \quad (6)$$

où la surface Ω désigne la section de passage du fluide à travers l'orifice.

Q10. *Expression de ω_B en fonction de T_B*

En appliquant l'expression du premier principe en système ouvert stationnaire, donnée par l'équation (1), au système orifice dans la paroi du réservoir délimité par des pointillés sur la **figure 3**, montrer que la vitesse de sortie du CO₂ a pour expression :

$$\omega_B = \sqrt{2 \frac{R}{M} \int_{T_B}^T f(T) dT} \quad (7)$$

Q11. *Méthode de calcul de T_B*

- (a) En négligeant les frottements au sein du système considéré, on peut supposer l'écoulement **réversible**. Montrer, par application du second principe, que cette hypothèse amène à supposer l'écoulement *isentropique massique* (ou molaire) (i.e., à entropie massique - ou molaire - constante).
- (b) La variation d'entropie massique d'un gaz parfait pur s'écrit :

$$ds = \frac{R}{M} \left[\frac{C_{P,m}}{R} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right]. \quad (8)$$

En déduire que T_B est solution de l'équation :

$$\int_T^{T_B} \frac{f(T)}{T} dT + \ln \left(\frac{P}{P_{ext}} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad P = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V}. \quad (9)$$

Finalement, en réunissant les équations (3), (5), (6), (7) et (9), le modèle ainsi constitué est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{T}{m[f(T) - 1]} \cdot \frac{dm}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = \frac{\Omega P_{\text{ext}} \sqrt{2 \int_{T_B}^T f(T) dT}}{\sqrt{\frac{R}{M} T_B}} \end{cases} \quad (10)$$

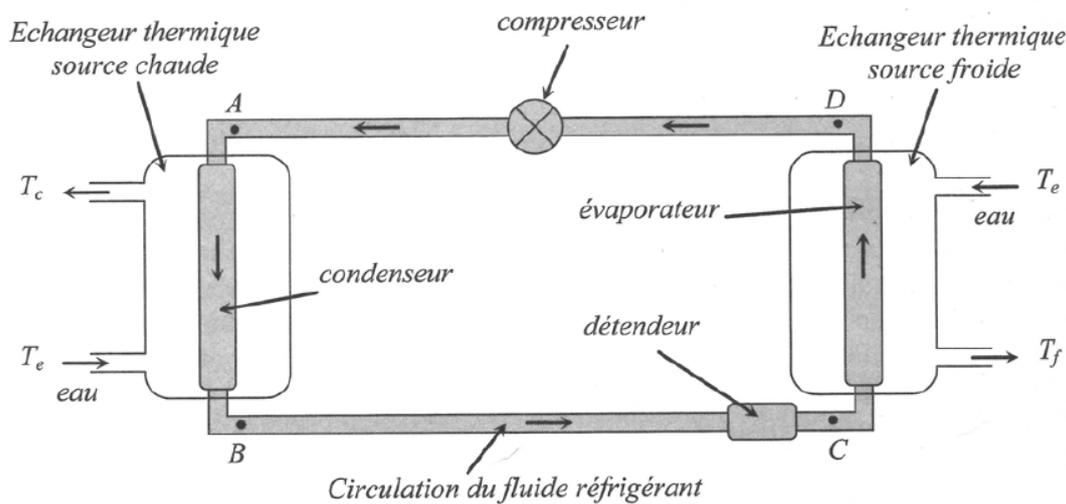
avec T_B solution de :

$$\int_T^{T_B} \frac{f(T)}{T} dT + \ln \left(\frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V \cdot P_{\text{ext}}} \right) = 0 \quad (11)$$

Deuxième partie

Machine thermique ditherme

Le problème suivant propose une étude expérimentale d'une machine thermique ditherme utilisant la circulation forcée d'un fluide réfrigérant, le dichlorodifluorométhane CCl_2F_2 appelé aussi fréon R12, entre une source chaude et une source froide. La puissance électrique fournie à la machine est transmise à un compresseur qui entraîne le fluide à travers un condenseur, un détendeur, puis un évaporateur. Un schéma simplifié du dispositif est représenté ci-dessous.



Des appareils de mesure permettent de caractériser le fluide réfrigérant à différents stades du cycle, par son débit massique, sa température et sa pression.

Le fluide réfrigérant subit les transformations suivantes :

- De A à B : Le fluide, en A , sous forme de vapeur sous pression, est mis en contact avec la circulation d'eau dans l'échangeur thermique de la source chaude, et subit une condensation isobare de l'état vapeur à l'état liquide. L'énergie libérée par la condensation est en partie transférée à l'eau dont la température augmente de T_e à T_c .
- De B à C : Le liquide subit une détente isenthalpique à travers une vanne d'expansion. Le fluide en C se trouve alors partiellement vaporisé.

- De C à D : Le mélange liquide-vapeur est mis en contact avec l'eau en circulation dans l'échangeur thermique de la source froide, et se vaporise entièrement de façon isobare. L'énergie thermique nécessaire à cette vaporisation est partiellement apportée par l'eau dont la température diminue de T_e à T_f .
- De D à A : Le fluide sous forme vapeur subit une compression adiabatique en recevant l'énergie mécanique du compresseur.

On a reporté les mesures expérimentales dans le tableau ci dessous :

- Compresseur : puissance électrique consommée : 500 W
- Circulations d'eau
 - Source chaude : débit massique $D_{mc} = 72 \text{ kg.h}^{-1}$; $T_e = 18,5^\circ\text{C}$; $T_c = 28,0^\circ\text{C}$
 - Source froide : débit massique $D_{mf} = 40 \text{ kg.h}^{-1}$; $T_e = 18,5^\circ\text{C}$; $T_f = 6,0^\circ\text{C}$
- Circulation du fluide réfrigérant
 - Débit massique $D_m = 25 \text{ kg.h}^{-1}$
 - Condenseur Pression en A : 10 bars $T_A = 64,0^\circ\text{C}$; $T_B = 42,0^\circ\text{C}$
 - Évaporateur Pression en C : 2,5 bars $T_C = -7,0^\circ\text{C}$; $T_D = 0,0^\circ\text{C}$

Les températures sont mesurées à $0,5^\circ\text{C}$ près et les pressions à $0,1$ bar près. Les débits massiques sont obtenus à 10% près. Le constructeur précise que le compresseur a un rendement mécanique de l'ordre de 45% . La machine thermique est supposée avoir atteint son régime de fonctionnement stationnaire.

On donne la capacité thermique de l'eau : $c_{eau} = 4,18.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

I Premier principe de la thermodynamique

On considère un fluide circulant de façon stationnaire dans une canalisation avec le débit massique D_m et recevant une puissance thermique P_{th} et une puissance mécanique P_{meca} . On note h_e et h_s les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la canalisation.

On néglige les variations d'énergie cinétique du fluide et les variations d'énergie potentielle de pesanteur.

1. (a) Démontrer rapidement le premier principe industriel de la thermodynamique appliqué à un fluide en écoulement stationnaire.
- (b) En déduire la relation liant les enthalpies h_e, h_s , et les paramètres de l'écoulement étudié.

II Utilisation des diagrammes

On se propose d'effectuer une étude détaillée des échanges thermiques effectués lors des transitions de phase du fluide réfrigérant. Les diagrammes thermodynamiques enthalpique (p, h) et entropique (T, s) du dichlorodifluorométhane sont fournis.

On utilise dans un premier temps le diagramme enthalpique.

2. (a) Reporter la position des points A, B, C et D sur le diagramme enthalpique (p, h). En déduire l'état physique du fluide dans chaque cas.
- (b) Relever les enthalpies massiques des points A, B, C et D .
3. En déduire :
 - (a) la puissance P_c reçue par le fluide de la part de la source chaude.
 - (b) la puissance P_f reçue par le fluide de la part de la source froide.
 - (c) la puissance mécanique P_u fournie au fluide par le compresseur ; évaluer son rendement réel. Commenter.

4. Effectuer un bilan énergétique pour le cycle. Commenter.

On souhaite confirmer ces résultats à l'aide du diagramme entropique.

5. (a) Reporter la position des points A , B , C et D sur le diagramme entropique (T, s) , et tracer le cycle.
(b) Calculer les entropies massiques des points A , B , C et D .
6. Au cours d'une évolution isobare, l'énergie thermique massique échangée est donnée par l'aire sous la courbe d'évolution dans un diagramme entropique. En déduire une nouvelle mesure des puissances thermiques P_c et P_f reçues par le fluide lors de son passage dans le condenseur et l'évaporateur. Commenter.
7. La compression du fluide est-elle isentropique ? Évaluer l'entropie produite par unité de temps dans le compresseur. Quelle est son origine ?
8. Mesurer l'enthalpie massique et l'entropie massique de liquéfaction à la pression de 10 bars. Quelle relation lie ces grandeurs ?
9. Préciser la composition du mélange liquide-vapeur au point C . On effectuera la mesure sur les diagrammes enthalpique et entropique. Conclure.

III Efficacités thermodynamiques

Les mesures précédentes de puissances thermiques et de puissance reçues par le fluide vont permettre d'estimer l'efficacité thermodynamique de la machine thermique, en tant que pompe à chaleur ou machine frigorifique.

10. (a) Définir l'efficacité e_{PAC} de la machine en tant que pompe à chaleur, et l'efficacité e_{MF} de la machine en tant que machine frigorifique.
(b) Calculer numériquement e_{PAC} et e_{MF} .
On souhaite à présent comparer ces efficacités à l'efficacité maximale obtenue en suivant un cycle de Carnot proche du fonctionnement de la machine et passant par $B' = B$ et le point D' d'entropie $s_{D'} = 0,70 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de température $T_{D'} = -6,0^\circ\text{C}$.
11. Représenter le cycle de Carnot noté $A'B'C'D'$ dans le diagramme entropique.
12. (a) En déduire numériquement les efficacités de Carnot e_{PAC}^C pour un fonctionnement en pompe à chaleur, et e_{MF}^C pour un fonctionnement en machine frigorifique.
(b) Comparer ces valeurs à l'efficacité théorique de Carnot. Conclure.

On peut définir le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique par le rapport de son efficacité expérimentale sur l'efficacité de Carnot.

13. Calculer le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique proposée, en tant que pompe à chaleur et en tant que machine frigorifique. Conclure.

IV Rendement global

En pratique, la machine thermique reçoit directement la puissance électrique P_{elec} qui alimente le compresseur, tandis qu'elle fournit sa puissance thermique à la circulation d'eau. On souhaite donc estimer le rendement global de la machine, en ne tenant compte que des transferts énergétiques réellement effectués.

14. Déterminer les puissances thermiques reçues par l'eau à la source chaude et à la source froide. Commenter.
15. En déduire l'efficacité globale réelle, rapport des puissances utiles réelles sur la puissance dépensée, de la machine thermique en tant que pompe à chaleur ou en tant que machine frigorifique.
Comparer à l'efficacité du cycle de Carnot correspondant et conclure.

Troisième partie

Conditionnement d'air dans la cabine d'un avion

Le renouvellement de l'air de la cabine d'un avion est essentiel au confort et à la sécurité des passagers. Pour maintenir un niveau suffisant d'oxygène, de l'air est prélevé à l'extérieur de l'avion. Cependant, cet air est trop froid pour être amené directement en cabine. Pour amener l'air extérieur à une température acceptable (en général réglable entre 18 et 26°C), on utilise de l'air chaud en provenance des moteurs que l'on refroidit. Cet air froid est ensuite à nouveau mélangé à de l'air chaud avant d'être envoyé en cabine.

On s'intéresse au système de climatisation pneumatique dont le principe de fonctionnement est présenté figure 1. De l'air provenant des moteurs et préalablement refroidi à 180°C est amené en entrée de l'ACM (« Air Cycle Machine ») ; la pression de l'air entrant vaut $P_1 = 2,5$ bar. Cet air est ensuite amené à $T_2 = 110^\circ\text{C}$ après avoir traversé un premier échangeur thermique, puis il est comprimé ($T_3 = 210^\circ\text{C}$), à nouveau refroidi dans un second échangeur thermique ($T_4 = 100^\circ\text{C}$) et finalement détendu dans une turbine ($T_5 = 5^\circ\text{C}$).

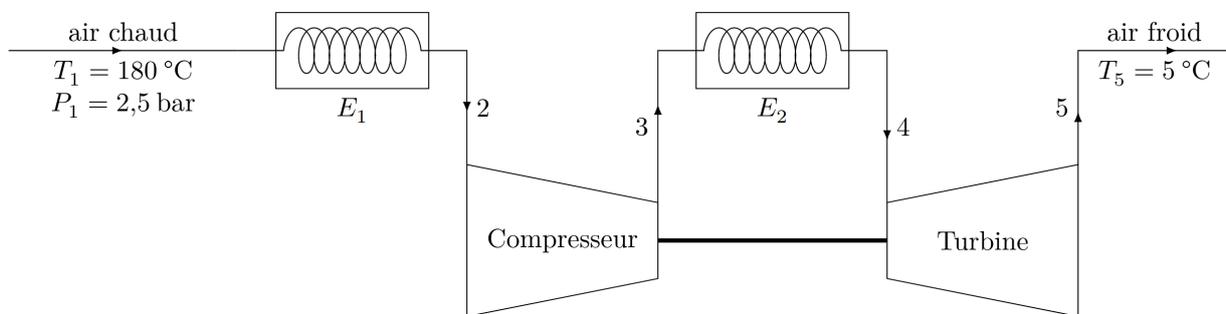


Figure 1 Air Cycle Machine

On fera les hypothèses de transformations adiabatiques réversibles pour l'air traversant le compresseur ou la turbine et de transformations isobares dans les échangeurs. L'air sera considéré comme un gaz parfait de coefficient $\gamma = C_p/C_v = 1,4$. On rappelle que C_p et C_v sont des capacités thermiques massiques à volume et pression constants.

1. Citer des différences entre ce dispositif et un système de climatisation « classique ».
2. Déterminer la pression d'air en sortie du compresseur (P_3), puis en sortie de la turbine (P_5).
3. Rappeler, pour un écoulement stationnaire, l'expression du premier principe "industriel", ou premier principe de la thermodynamique en système ouvert, mettant en jeu des grandeurs massiques, en définissant avec précision les notations utilisées.
4. La puissance récupérée par la turbine est-elle suffisante pour entraîner le compresseur ?
5. Montrer qu'envoyer directement l'air issu du premier échangeur thermique dans la turbine ne permet pas de produire, à une pression suffisante, un air à la température de sortie de 5°C .
Il faut une pression partielle en dioxygène supérieure à la pression limite $P_\ell = 0,148$ bar. Rappel : l'air est composé à 20% de dioxygène.
6. Pourquoi ne se contente-t-on pas de refroidir l'air à l'aide d'un simple échangeur thermique ?