Première partie

Accélérographe mécanique

Le but du problème est d'étudier un accélérographe construit à l'aide d'un oscillateur mécanique.
Les deux parties sont largement indépendantes.
Dans tout le problème on prendra pour l'intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9,8$ m.s^{-2}.

I Étude sommaire

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni du repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on considère un corps solide $(\mathcal{S})$ de masse $m = 0,1$ kg et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (cf. figure 1) ; G est relié au point E par un ressort de raideur k ; $(\mathcal{S})$ est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\overrightarrow{v}(G)$ où $\overrightarrow{v}(G)$ est la vitesse de G par rapport à E.

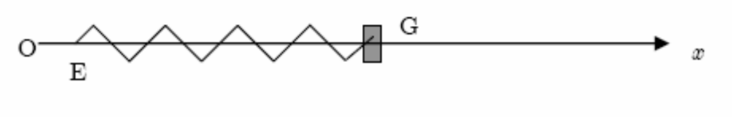


Figure 1

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre ℓ_0 par la relation $x = EG - \ell_0$.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O.

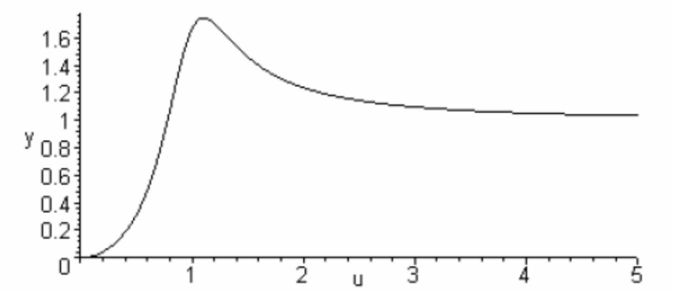
On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_0 = 10$ cm et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'équation du mouvement ; on posera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$.
2. Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
3. La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12$ s. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7,5$ cm.
   En déduire les valeurs de la pseudo pulsation, de β et de k.

2. Mesure d'une accélération

Dans cette question le point E est solidaire d'un solide en vibration dans $\mathcal{R}$. Sa position est donnée par $\overrightarrow{OE}(t) = a\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

1. Déterminer l'equation différentielle vérifiée par $x(t)$.
2. Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).
3. Le tracé de l'amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation a l'allure suivante en coordonnées réduites $y = \dfrac{X_0}{a}$ en fonction de $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.



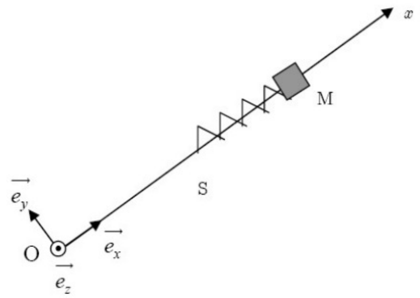
   Que représente le maximum de cette courbe ? Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ? Déduire graphiquement l'amplitude a dans le cas où, pour $\omega = 7$ rad.s^{-1} on mesure $X_0 = 0,2$ m.
4. Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

II Accélération radiale d'un satellite.

Un satellite, de masse m_s, de centre d'inertie S, est en orbite circulaire autour de la terre de centre O. Sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx, fixe dans le satellite (cf. figure suivante). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2$$

avec $\omega_1 = 0,03$ rad.s^{-1} et $\overrightarrow{SM} = x\vec{e}_x$.
Rayon de la terre $R = 6400$ km ; $g = 9,8$ m.s^{-2} intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la terre.



On pose $r_o = OS$ et on désigne par $\mathscr{R}_S$ le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le référentiel $\mathscr{R}_g$ géocentrique est supposé galiléen.

1. (a) Déterminer la vitesse v_o du satellite en fonction de r_o, g et R.
   (b) En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_o, g et R. Calculer numériquement r_o, v_o et la vitesse angulaire ω_o du satellite dans $\mathscr{R}_g$.
2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}_S$.
   (a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
   (b) Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_o$, en ne faisant intervenir que ω_o, ω_1, x et ses dérivées temporelles.
   (c) Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
   (d) Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?

Deuxième partie

Saturne

La mission Cassini-Huygens est une mission spatiale dont l'objectif est l'étude de la planète Saturne et de certains de ses satellites, dont Titan. La sonde spatiale Cassini-Huygens, composée de la sonde Cassini et du module Huygens, s'est placée en orbite autour de Saturne en 2004. Huygens a atterri sur Titan en 2005.

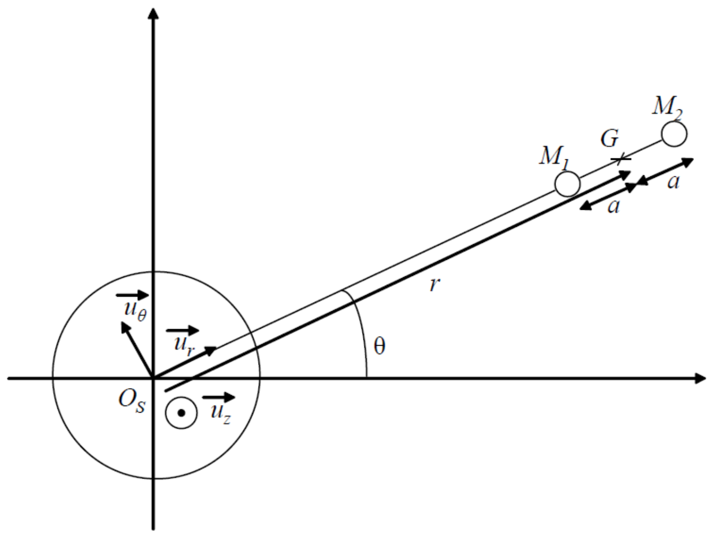
I Étude dynamique des anneaux de Saturne

La planète Saturne est assimilée à un corps à répartition sphérique de masses, de centre O_S, de masse $m_S = 6 \times 10^{26}$ kg, de rayon R_S. On suppose que le référentiel saturnien, de point fixe O_S et en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, est galiléen. On note Γ la constante de gravitation.

1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

   Supposons qu'un anneau soit un agglomérat solide de corps (rochers, cailloux, blocs de glace), en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Saturne. On isole deux de ces corps formant un doublet $\Sigma = \{M_1, M_2\}$, de faible taille à l'échelle astronomique, de centre d'inertie G, de même masse m, à la distance $2a$ l'un de l'autre ; on suppose, en outre, que :

- O_S, M_1 et M_2 restent alignés en permanence ;
- on pose $\overrightarrow{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{O_SG}}{O_SG}$, $\overrightarrow{O_SG} = r\overrightarrow{u}_r$, $\theta = \omega \times t$, et on définit le repère cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$;
- il vient $\overrightarrow{O_SM_1} = (r-a)\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{O_SM_2} = (r+a)\overrightarrow{u}_r$;
- $a \ll r$;
- le référentiel $\mathscr{R}_{Sd}$ est appelé référentiel saturno-doublet : c'est un référentiel non galiléen en rotation uniforme par rapport au référentiel saturnien, à la vitesse angulaire ω et dans lequel O_S, G, M_1 et M_2 sont immobiles.



On néglige l'influence de tous les autres corps de l'anneau sur le système Σ.

(a) En écrivant le théorème de la résultante cinétique pour le centre d'inertie G affecté de la masse totale $2m$, dans le référentiel saturnien, établir l'identité suivante :

$$\frac{\Gamma m_S}{r^2} = \omega^2 r.$$

(b) Faire l'inventaire de toutes les forces subies par M_1 dans $\mathscr{R}_{Sd}$ et montrer que leur somme vectorielle peut s'écrire $\Sigma\overrightarrow{f} = f(a,r)\overrightarrow{u}_r$: on donnera l'expression de $f(a,r)$ comme une fonction des variables a et r et des paramètres Γ, m et m_S.

(c) Par un développement limité au premier ordre en $\dfrac{a}{r} \ll 1$, montrer que cette fonction a pour valeur approchée :

$$f(a,r) = \frac{\Gamma m^2}{4a^2} - \frac{3\Gamma m_S m a}{r^3}.$$

Il y aura **dislocation** progressive de l'anneau si la résultante des forces a tendance à éloigner M_2 de M_1, donc si $f(a,r) < 0$.

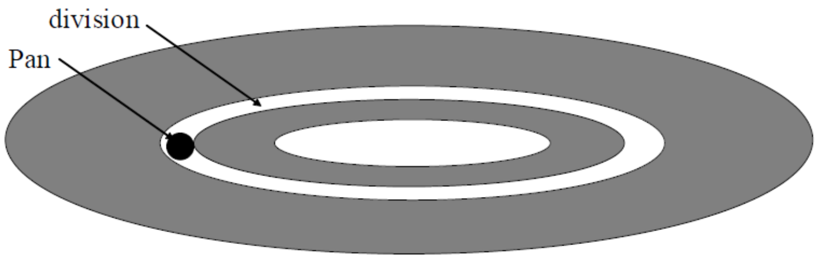
(d) Montrer que cette condition se traduit par l'existence d'une valeur limite r_0 de r (on l'appelle **limite de Roche**) ne dépendant que de m_S et de $\mu = \dfrac{m}{a^3}$. On donne $\mu = 720\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
Déduire de ce qui précède un ordre de grandeur de r_0. Conclure en considérant que les anneaux ont un rayon de l'ordre de 10^8 m.

Dans ce qui suit, on assimile tous les corps autour de Saturne à des petits et moyens blocs solides indépendants en orbite circulaire et on néglige toutes les forces d'interaction entre eux devant l'attraction gravitationnelle de la planète.

2. Divisions des anneaux

Les anneaux sont divisés : la première division fut observée par Cassini qui détecta le premier une bande circulaire vide de blocs, et découpant ainsi « l'anneau » en deux anneaux distincts (cette division est encore appelée division Cassini). On en a détecté un très grand nombre depuis.

On s'intéresse ici à la division observée sur le rayon orbital d'un petit satellite sphérique, Pan, de centre O_P, de rayon R_P, et de rayon orbital $r_P = O_S O_P$.



Le référentiel saturno-Pan $\mathscr{R}_{SP}$ est en rotation uniforme autour du référentiel saturnien, suiveur du mouvement de Pan, dans lequel O_S et O_P restent fixes. On considère deux petits rochers A et B encore présents dans cette bande et tournant dans le même sens (cf. figure 3). A est en orbite circulaire de rayon r_A légèrement inférieur à r_P, B est en orbite circulaire de rayon r_B légèrement supérieur à r_P.

(a) Montrer que plus le rayon de l'orbite circulaire d'un corps satellisé autour de Saturne est grand, plus sa vitesse le long de son orbite est faible.

(b) Tracer, sur la figure 3.a, dans le référentiel saturnien, l'allure des vecteurs vitesses des centres des trois corps (l'échelle est arbitraire).

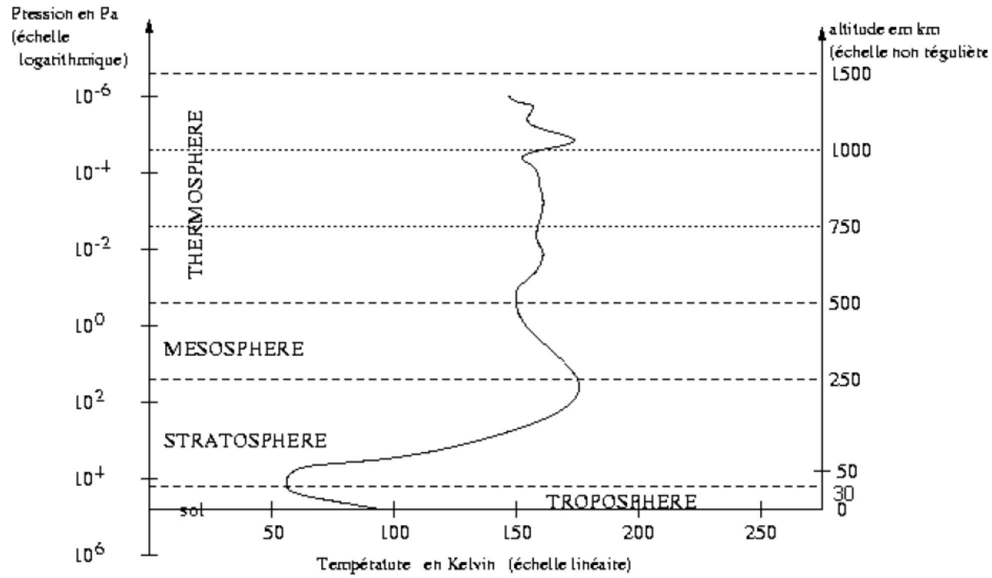
(c) En déduire, dans le référentiel $\mathscr{R}_{SP}$, l'allure des vecteurs vitesses de A et de B et les tracer sur la figure 3.b.

(d) En déduire pourquoi A et B ne pourront rester sur leur orbite, et pourquoi on dit que Pan « nettoie » la bande décrite par sa trajectoire en dessinant une division dans les anneaux.

II l'atmosphère de Titan (Partie facultative)

Saturne possède un satellite remarquable, Titan, sur lequel la sonde Huygens, véhiculée par la capsule spatiale Cassini, s'est posée avec succès le 14 janvier 2005. Les capteurs embarqués ont permis d'enregistrer les variations de la pression et de la température en fonction de l'altitude.

La figure suivante donne sur l'axe de gauche la pression de l'atmosphère en pascals, en échelle logarithmique, sur l'axe de droite l'altitude correspondante en km, en échelle non régulière, et sur l'axe horizontal la température en Kelvin en échelle linéaire. La courbe tracée permet donc de suivre l'évolution de la température en fonction de l'altitude ou de la pression.



On admettra que dans l'atmosphère, l'accélération de la pesanteur de Titan garde une valeur constante $g_T = 1,37\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. On note $R = 8,314\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ la constante des gaz parfaits. On note $\mu(z)$ la masse volumique du gaz et $P(z)$ sa pression à l'altitude z.

1. On assimile la mésosphère et la thermosphère à un gaz parfait en évolu-

tion isotherme de masse molaire M. En écrivant l'équation d'état des gaz parfaits et la loi de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.

2. Résoudre cette équation sans chercher à déterminer la constante d'intégration et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.

3. Dans la troposphère, on admet que le principal constituant est le diazote N_2, de masse molaire $M = 28$ g·mol^{-1}, assimilé à un gaz parfait. On note P_0 et T_0 les valeurs de la pression et de la température au niveau du sol ($P_0 = 1,46$ bar et $T_0 = 93$ K). À une altitude $z_1 = 40$ km, on observe une température $T_1 = 70$ K. On adopte un modèle de décroissance linéaire de la température : $T(z) = T_0 + A \times z$ avec A gradient de température.

   (a) Calculer A gradient de température.

   (b) Établir l'expression de la pression P en fonction P_0, T_0, A, M, R,g_T et z.

   (c) Déterminer la valeur de P à l'altitude z_1. On observe $P(z_1) =$ 140 mbar. Commentez.