Devoir surveillé n^{o}2

Samedi 03 décembre 2022

Première partie

Un vol en ballon

Données :

- accélération de la pesanteur $g = 9,80$ m.s^{-2} ;
- constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1} ;
- masse molaire de l'air $\mathcal{A} = 29,0$ g.mol^{-1} ;
- masse volumique du mercure dans les conditions standard $\mu_{\mathrm{Hg}} = 1,35 \cdot 10^4$ kg.m^{-3} ;
- rayon moyen de la Terre $R_T = 6380$ km ;
- capacité thermique molaire à pression constante $C_{p,m} = 7R/2$.

L'espace est repéré à l'aide de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et d'un repère $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ associé.

Rappel :
Le centre de masse G, d'un corps $\mathcal{C}$ de masse volumique homogène μ, est l'unique point de coordonnées (x_G, y_G, z_G) vérifiant :

$$\iiint_{\mathcal{C}} (x - x_G)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{C}} (y - y_G)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{C}} (z - z_G)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

Le moment d'inertie J_x d'un corps solide homogène, par rapport à l'axe passant par le centre de masse G et dirigé suivant le vecteur $\overrightarrow{e_x}$, est défini par l'équation :

$$J_x = \mu \iiint_{\mathcal{C}} [(y - y_G)^2 + (z - z_G)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

On a de même, par rapport aux directions $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$J_y = \mu \iiint_{\mathcal{C}} [(x - x_G)^2 + (z - z_G)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$$J_z = \mu \iiint_{\mathcal{C}} [(y - y_G)^2 + (x - x_G)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Les moments d'inertie d'une boule (sphère pleine) homogène de masse M et de rayon R sont :

$$J_x = J_y = J_z = 2MR^2/5.$$

I Statique des fluides incompressibles

1. On considère un fluide incompressible, de masse volumique μ, au repos dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$. Les hauteurs sont rapportées à un axe vertical (Oz) dirigé vers le haut.
En considérant, par exemple, un volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ de fluide, établir la relation différentielle liant la pression P, μ, g (norme de $\overrightarrow{g}$) et z (équation de l'hydrostatique).
2. Donner l'expression de la fonction $P(z)$, pression fonction de la hauteur, solution de l'équation précédente, en prenant comme constante d'intégration $P(0) = P_0$.
3. Énoncer le théorème d'Archimède pour un corps solide quelconque totalement immergé dans le fluide représenté sur la figure I.1.

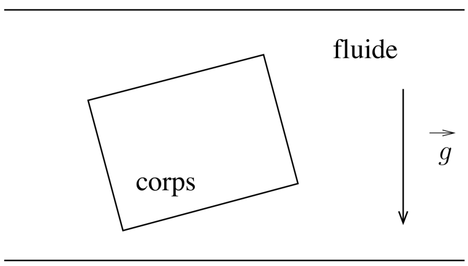


Figure I.1. Parallélépipède rectangle plongé dans un fluide

II Modèle d'atmosphère isotherme

1. L'air est assimilé à un fluide compressible, obéissant à l'équation des gaz parfaits, dont la température est uniforme et constante, indépendante de la hauteur z.
Donner la relation existant entre la masse molaire A, la masse volumique μ, la pression P, la température T et la constante des gaz parfaits.
2. Montrer que, dans ce cas, la solution de l'équation obtenue à la question I.1 est de la forme :
$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$
où H est une longueur que l'on exprimera en fonction de A, R, T et g, puis que l'on calculera numériquement pour $T = 280$ K.
3. Quelle valeur de la pression ce modèle prédit-il au sommet du Puy de Dôme, d'altitude $z_P = 1465$ m, lorsque $T = 280$ K et $P_0 = 1013$ hPa ?
4. Déduire, du profil de pression $P(z)$, l'expression de la masse volumique $\mu(z)$ en fonction de la hauteur.
En supposant que l'on puisse négliger la courbure de la Terre, calculer la masse totale de gaz occupant une colonne semi-infinie, de section horizontale $a = 1$ m^2, s'étendant de la hauteur $z = 0$ jusqu'à l'infini.
Montrer que cette masse s'exprime simplement en fonction de P_0, de a et de g supposé constant et uniforme.
Ce résultat est-il surprenant ?
5. Déduire de la question précédente une estimation numérique de la masse totale de l'atmosphère de la Terre.

III Poussée d'Archimède dans un profil exponentiel de pression

Le but de cette partie est de vérifier la validité du théorème d'Archimède dans le cas où le profil de pression est de la forme établie à la question II.2.

1. La résultante $\overrightarrow{A}$ des forces de pression s'exprime comme une intégrale autour de la surface extérieure Σ du corps $\mathcal{C}$, avec $\overrightarrow{n}$ vecteur normal sortant de la surface et dS l'élément d'intégration sur la surface :
$$\overrightarrow{A} = \oiint_{\Sigma} -P\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S.$$
On s'intéresse à la composante verticale $A_z = \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{A}$.
Montrer que A_z est égale au flux du vecteur $-P(z)\overrightarrow{e_z}$ à travers la surface Σ.
2. À l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky pour tout champ de vecteur $\overrightarrow{j}$:
$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{C}} \operatorname{div}(\overrightarrow{j})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
exprimer A_z comme une intégrale triple sur le volume occupé par le corps $\mathcal{C}$.
3. Développer l'exponentielle $\exp(-z/H)$ autour de la hauteur z_G du centre de masse du corps $\mathcal{C}$, au deuxième ordre en $(z - z_G)/H$.
En utilisant l'identité :
$$2(z-z_G)^2 = (z-z_G)^2 + (x-x_G)^2 + (z-z_G)^2 + (y-y_G)^2 - (y-y_G)^2 - (x-x_G)^2$$
et la définition des moments d'inertie donnée en préambule, montrer que la résultante A_z des forces de pression se met, à cet ordre du développement, sous la forme :
$$A_z = \left(M + \frac{J_x + J_y - J_z}{4H^2}\right) g$$
où M et J_x, J_y, J_z représentent respectivement la masse et les moments d'inertie d'un corps homogène de masse volumique $\mu(z_G)$ (identique à l'air ambiant) et de forme identique à $\mathcal{C}$.
4. Estimer l'erreur relative commise sur la résultante A_z lorsque l'on applique le théorème d'Archimède à un ballon sphérique plein de rayon $R = 20$ m évoluant dans un profil d'atmosphère isotherme.

IV Ballon à air chaud dans une atmosphère isotherme

Soit un aérostat de volume V supposé constant et dont l'enveloppe et la nacelle sont de masse totale m (la masse de l'air chaud n'étant pas comptée et le volume de la nacelle étant supposé négligeable).
La pression régnant à l'intérieur du ballon reste égale, à tout instant, à la pression extérieure. La température de l'air à l'intérieur du ballon, supposée uniforme, est plus élevée que la température extérieure de l'atmosphère isotherme. On notera, dans cette partie, la température de l'atmosphère $T = T_f$. La masse volumique de l'air au niveau du sol, à pression P_0 est notée $\mu_0 = \mu(0)$ et on introduit la masse $m_0 = \mu_0 V$, égale à la masse d'air présente dans le ballon lorsque celui-ci est posé au sol et que la température interne est égale à T_f.

1. La température régnant à l'intérieur du ballon est T_c, et la masse volumique de l'air situé à l'intérieur est μ_c. Déterminer la relation existante entre μ_c, T_c, T_f et la masse volumique $\mu(z)$ de l'air à l'extérieur du ballon, situé à une altitude z quelconque.
2. Le ballon se trouve à l'altitude nulle $z = 0$, pour laquelle la pression alentour est P_0. Déterminer la température minimale $T_{min}(m)$ devant régner dans le ballon, de masse m (air chaud non compris) pour que celui-ci s'élève spontanément. On pourra exprimer le résultat en fonction de T_f, m_0 et m.
3. L'air du ballon est chauffé jusqu'à une température $T_c > T_{min}(m)$. Déterminer dans ces conditions la hauteur maximale $Z_{max}(m, T_c)$ atteinte par le ballon.
4. Calculer, sur la base du résultat précédent, le volume minimal V d'un ballon permettant d'élever deux passagers, une enveloppe et une nacelle, de masse $m = 500$ kg, à une hauteur de $Z = 1000$ m au dessus du sol, sachant que la température maximale de l'air chaud à l'intérieur du ballon est de 60 K plus élevée que la température extérieure $T_f = 280$ K et que la pression extérieure est de $P_0 = 1,0$ bar.

Deuxième partie

Centrifugeuse

Une centrifugeuse est un appareil destiné à séparer la phase solide d'une suspension liquide-solide. Cette séparation a pour origine la différence des masses volumiques du liquide et des particules solides en suspension dans le fluide. La partie essentielle de cet appareil est constituée d'un rotor lequel est entraîné en rotation à vitesse élevée, autour de son axe de symétrie, supposé ici vertical. Ce rotor supporte une série de tubes à essais identiques dans lesquels se situe la suspension à traiter.
Soit $\mathfrak{R}$ un repère lié au laboratoire et considéré comme galiléen.
Soit $\mathfrak{R}'$ un repère mobile (relativement à $\mathfrak{R}$) d'axes $Ox, Oy, Oz,$ les vecteurs unitaires associés s'écrivant $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$. Les axes verticaux des deux repères coïncident, $\mathfrak{R}'$ est animé, relativement à $\mathfrak{R}$, d'un mouvement de rotation uniforme autour de la verticale. Le vecteur vitesse rotation de $\mathfrak{R}'$ relativement à $\mathfrak{R}$ est noté $\overrightarrow{\Omega} = \Omega.\overrightarrow{e_z}$ (voir schéma n° 1.a).
Soit (A) une droite, fixe relativement à $\mathfrak{R}'$, située dans le plan yOz. Cette droite est orientée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$, l'angle situé entre les directions de $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_y}$ est noté α (voir schéma n° 1.b). On va considérer un point P se déplaçant sur la droite (A), la position de P étant repérée par $r = r(t)$ tel que $\overrightarrow{OP} = r.\overrightarrow{e_r}$. On notera $\vec{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$ le vecteur accélération due à la pesanteur.

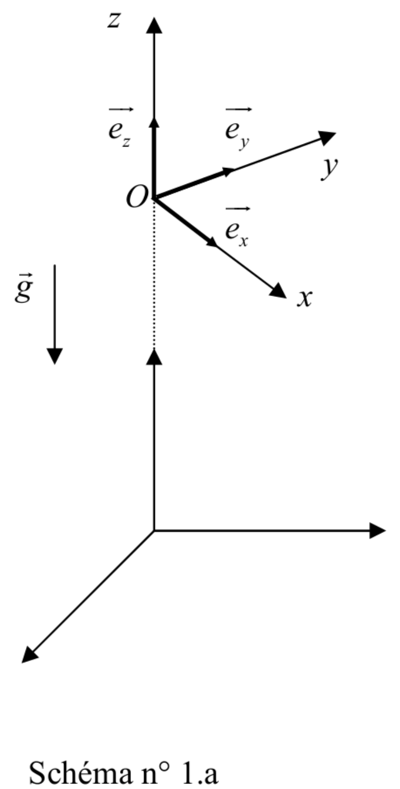


Schéma n° 1.a

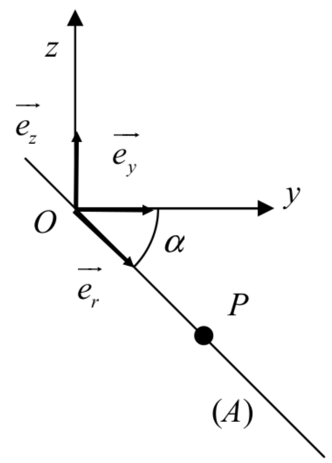


Schéma n° 1.b

Schémas n° 1

Questions préliminaires

1.1. Déterminer les composantes suivant $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ des vecteurs $\overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{a_c}, \overrightarrow{a_e}$ qui sont respectivement les vecteurs accélération relative de P par rapport à $\mathfrak{R}$', accélération de Coriolis de P relativement à $\mathfrak{R}$ et accélération d'entraînement de P relativement à $\mathfrak{R}$.

1.2. Établir l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{a_p}$ où $\overrightarrow{a_p}$ désigne le vecteur accélération de P relativement à $\mathfrak{R}$. Cette expression sera fournie en fonction de r, $\frac{d^2r}{dt^2}$, Ω et α.

Modélisation du mouvement d'une particule

On considère maintenant une particule solide de masse volumique ρ_s et de volume V, cette particule se situe au sein d'un fluide de masse volumique ρ différente de ρ_s. Le fluide est lui-même contenu dans un tube cylindrique fixé sur le rotor de la centrifugeuse. Le repère $\mathfrak{R}$' est supposé lié au rotor et le centre de masse de particule sera le point P, défini précédemment (voir schéma n° 2).

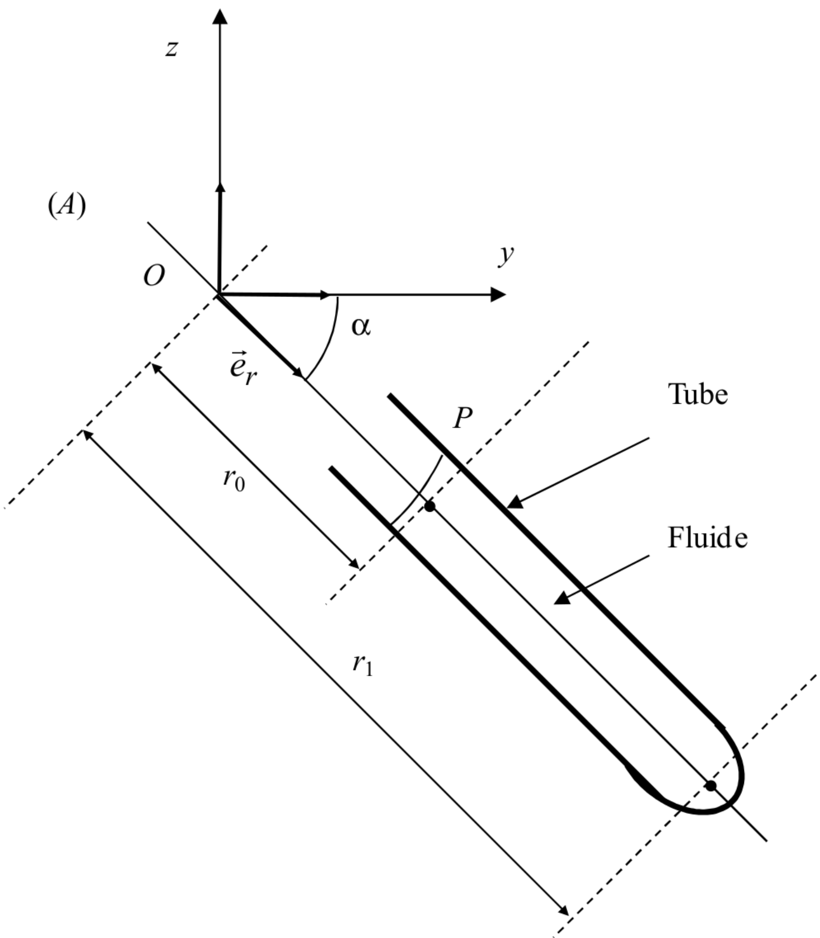


Schéma n° 2

Étant donné les dimensions du tube, on va considérer dans la suite que le mouvement de P ne s'effectue que selon l'axe longitudinal du tube, axe coïncidant avec la droite (A) définie précédemment. La particule est soumise aux trois forces qui sont respectivement : son poids propre, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F^A}$ et une force $\overrightarrow{F^r}$ opposée au mouvement que l'on peut interpréter comme étant due à la viscosité du fluide. La poussée d'Archimède s'écrit : $\overrightarrow{F^A} = -V.\overrightarrow{grad}(p)$ où p désigne la pression en un point de coordonnées x, y, z du fluide. On a :

$$p = p(x,y,z) = \frac{1}{2}.\rho.\Omega^2.(x^2+y^2) - \rho.g.z + c^{ste}.$$

Remarques : ce fluide est à l'équilibre relativement à $\Re$', équilibre supposé non perturbé par le mouvement de la particule, l'expression de p fait intervenir une constante qui ne nécessite pas d'être précisée dans ce problème.

La force $\overrightarrow{F^r}$ est exprimée sous la forme $\overrightarrow{F^r} = -k.\overrightarrow{v_r}$ où $\overrightarrow{v_r}$ désigne la vitesse de P relativement à $\Re$', k étant une constante physique supposée positive.

1.3 Donner les expressions des projections suivant $\overrightarrow{e_r}$ des trois forces indiquées précédemment.

1.4 D'après les résultats obtenus aux questions **1.2** et **1.3**, établir l'équation différentielle générale du mouvement de la particule, équation faisant intervenir ρ_s, ρ, Ω, α, g, k/V, r, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2r}{dt^2}$.

1.5 L'équation différentielle obtenue possède une solution notée r_e correspondant à une position d'équilibre de la particule. Établir l'expression de r_e en fonction de g, α et Ω.

1.6 Pour α = 45 °, g = 10 m.s^{-2} et Ω = 5 000 tour.min^{-1}, calculer la valeur de r_e.

1.7 Dans un premier temps, on cherche une solution simplifiée du mouvement et pour cela on va négliger l'influence de la force $\overrightarrow{F^r}$. La masse volumique de la particule en suspension ρ_s étant supposée supérieure à la masse volumique du fluide, on pourra utilement poser $\omega = \sqrt{\left(1-\frac{\rho}{\rho_s}\right)}.\Omega.\cos\alpha.$ Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement, en supposant qu'à l'instant $t = 0$ s, la particule se situe en $r = r_0$ sans vitesse relative. Cette solution sera écrite en fonction de r_0, r_e, ω et t.

1.8 Le temps mis par la particule pour passer de la position $r = r_0$ (haut du tube) sans vitesse relative initiale à la position r_1 (fond du tube) étant noté T, exprimer T en fonction de ω, r_0, r_1, r_e.

Application numérique pour r_0 = 10 cm et r_1 = 20 cm

Constater que r_e est négligeable devant r_0 ou r_1. Donner la valeur de T correspondant aux valeurs numériques de la question **1.6** et pour $\frac{\rho}{\rho_s} = \frac{1}{1{,}01}$.

1.9 Dans certaines situations, la force $\overrightarrow{F^r}$ peut jouer un rôle non négligeable ; on va rechercher maintenant une solution exacte de l'équation différentielle du mouvement. On pourra poser :

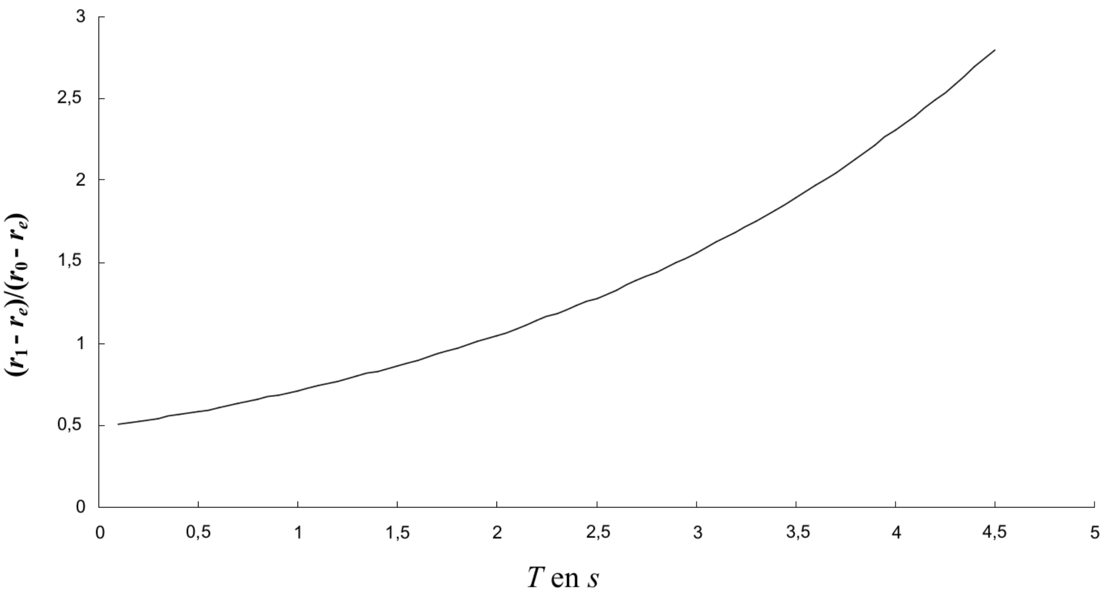
$$\lambda = \frac{k}{2\rho_s . V} \quad \text{et} \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}\ .$$

Rechercher les expressions des deux racines de l'équation caractéristique en fonction de λ et ω. Quels sont les signes de ces deux racines ?

1.10 Dans des conditions initiales identiques à celles de la question **1.7**, déterminer l'expression de $r(t)$ en fonction de r_0, r_e, ω', λ et t.

1.11 Établir l'expression du rapport $\dfrac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e}$ en fonction de λ, ω' et T, où T est le temps mis pour passer de r_0 à r_1.

1.12 À partir du graphe n° 1 représentant les variations du rapport $\dfrac{r_1 - r_e}{r_0 - r_e}$ en fonction de T, donner la valeur de T (ce graphe est tracé pour $\lambda = 25\ s^{-1}$ et les valeurs numériques précédemment données).



Graphe n° 1

Troisième partie

Étude mécanique d'un disque optique numérique

Sur un compact-disc, les informations sont stockées sous forme de creux et de plats le long d'une piste métallique réfléchissante en forme de spirale. Celle-ci démarre à une distance $R_1 = 2,50$ cm de l'axe du CD et se termine à $R_2 = 5,80$ cm.

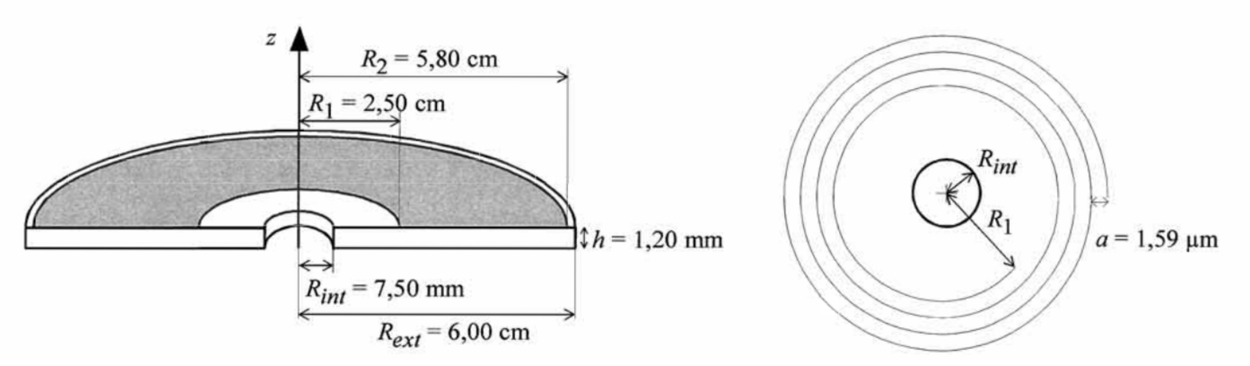


figure 1

Sur la figure 1 qui donne une vue en perspective d'un demi CD, la zone grisée correspond à la portion du CD occupée par la piste métallique, la partie blanche est le substrat en polycarbonate. Les spécifications du CD recommandent une vitesse de lecture linéaire $v_0 = 1,22$ m.s^{-1} et un pas de spirale de $a = 1,59$ μm. On peut noter que $a \ll R_1$.

I Étude de la piste

1. Établir l'expression de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ de rotation que doit avoir le disque lorsque la tête de lecture est à une distance r de l'axe de rotation et qu'elle voit défiler la piste à la vitesse linéaire constante v_0.
2. Dans l'intervalle $[R_1; R_2]$, pour quelle valeur de r la fonction $\Omega(r)$ est-elle maximale ?
3. Donner la valeur numérique de la vitesse angulaire maximale Ω_{max} que doit posséder le CD au cours de la lecture de sa piste à la vitesse v_0.
4. Les lecteurs de CD-ROM ont des vitesses beaucoup plus importantes que celles des lecteurs de CD audio. Un lecteur dit "52 x" a ainsi une vitesse de lecture linéaire égale à 52 v_0. Quelle est alors la valeur numérique, exprimée en tr/min, de sa vitesse angulaire maximale de rotation $\Omega_{0,max}$?

II Mécanique en référentiel non galiléen

Afin de rendre plus rapide l'accès aux données, les vitesses de rotation des lecteurs ont augmenté au fil des années. Des expériences menées sur des CD-ROM ont montré qu'ils pouvaient se briser en une multitude de petits fragments lorsque la vitesse angulaire devient supérieure à $3,00 \cdot 10^4$ tr.min^{-1}.

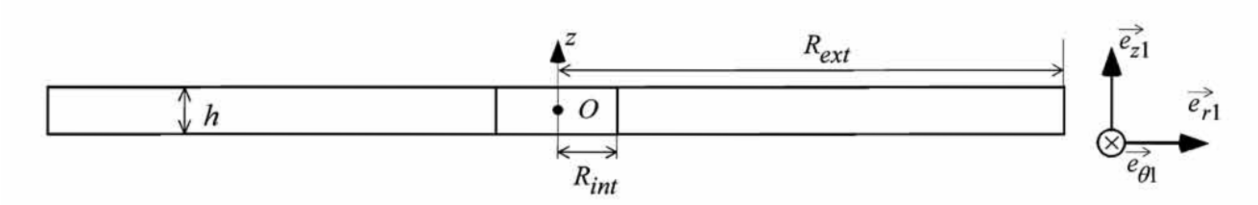


figure 2

Un lecteur de CD-ROM est fixé sur une table. On suppose que le référentiel $\mathscr{R}_0$ lié à la table est galiléen. On lui associe un repère orthonormé direct (O, x, y, z). À l'intérieur du lecteur, un dispositif d'entraînement communique au CD-ROM un mouvement de rotation autour de l'axe Oz, vertical ascendant. La vitesse angulaire est notée Ω.

Dans cette question, le CD-ROM est modélisé par un cylindre homogène de hauteur $h = 1,20$ mm, de rayon $R_{ext} = 6,00$ cm, percé en son centre d'un trou circulaire de rayon $R_{int} = 7,50$ mm. Sa masse volumique est $\mu = 1,20 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}.

Soit $\mathscr{R}_1$, le référentiel lié au disque. On lui associe le repère orthonormé direct (O, x_1, y_1, z_1), l'axe Oz_1 étant confondu avec l'axe Oz. On repère la position d'un point M dans $\mathscr{R}_1$ par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) liées à la base locale $(\overrightarrow{e_{r1}}, \overrightarrow{e_{\theta_1}}, \overrightarrow{e_{z1}})$.

On suppose que la vitesse de rotation de $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_0$ est constante et notée Ω.

1. Donner la définition d'un référentiel galiléen.
   On pose sur le CD un point matériel M de masse m.
2. Exprimer dans la base locale la force d'inertie d'entraînement à laquelle est soumis M dans $\mathscr{R}_1$.
3. Exprimer dans la base locale la force d'inertie de Coriolis à laquelle est soumis M dans $\mathscr{R}_1$.
4. Il existe des frottements solides entre M et le CD . On suppose que la réaction du CD sur M vérifie les lois de Coulomb :
   — en l'absence de mouvement relatif, $\|\overrightarrow{R_T}\| \leq f\|\overrightarrow{R_N}\|$;
   — en cas de mouvement relatif, $\|\overrightarrow{R_T}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\|$ et $\overrightarrow{R_T}$ s'oppose au mouvement ;

   où f est le coefficient de frottement entre M et le CD.
   Montrer que le point M reste immobile dans $\mathscr{R}_1$ si $r < r_\ell$ où l'on précisera l'expression de r_ℓ.
5. On creuse une rainure sur le disque : le point M est astreint à se déplacer selon $\overrightarrow{e_{r1}}$. On néglige les frottements. À $t = 0$, on pose le point M en $r(t = 0) = r_0$ sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathscr{R}_1$. Établir l'équation du mouvement.
6. Déterminer $r(t)$ et l'expression de la réaction du disque.

III Résistance mécanique des disques optiques numériques

On se place dans le référentiel $\mathscr{R}_1$. Afin d'étudier les forces qui assurent la cohésion d'un CD-ROM en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω_1, on considère une portion de disque dont la distance à l'axe de rotation s'étend de r_1 à $r_1 + dr_1$.

Au sein de cette couronne circulaire, on isole un élément de largeur angulaire $d\theta_1$ situé dans le domaine angulaire $[-\frac{d\theta_1}{2}; \frac{d\theta_1}{2}]$.

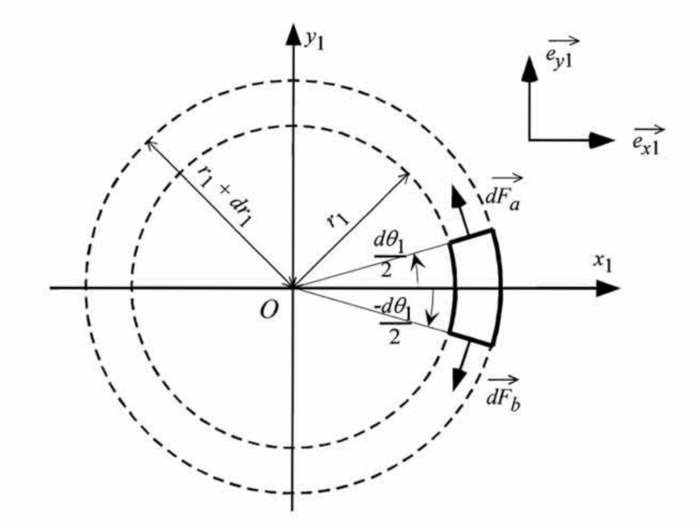


figure 3

1. Quelle est l'expression de la masse dm de cet élément de CD-ROM d'épaisseur h ?
2. Quelle est, dans la base $(\overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y1}})$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{dF_{ie}}$ qui s'exerce sur l'élément de masse dm ?
3. On note $\overrightarrow{dF_a}$ et $\overrightarrow{dF_b}$ les forces exercées sur l'élément considéré par deux secteurs angulaires voisins (figure 3). Soit σ la contrainte (force normale par unité de surface) à l'interface entre deux éléments de la portion de disque. On a donc $\|\overrightarrow{dF_a}\| = \|\overrightarrow{dF_b}\| = \sigma dS$ avec $dS = hdr_1$, la surface rectangulaire de séparation. Quelle est la direction de $\overrightarrow{dF_a} + \overrightarrow{dF_b}$? Montrer qu'à l'ordre 1 en $d\theta_1$, on a
$$\overrightarrow{dF_a} + \overrightarrow{dF_b} = -\sigma dS d\theta_1 \overrightarrow{e_{x1}}$$
4. En écrivant l'équilibre dans $\mathscr{R}_1$ de l'élément de masse dm, exprimer σ en fonction de μ, r_1 et Ω.
5. Pour quelle valeur de r_1, la contrainte σ est-elle maximale ?
6. On donne la contrainte de rupture du polycarbonate : $\sigma_{rup} = 65,0$ MPa. Exprimer puis calculer la vitesse angulaire Ω_{max} à partir de laquelle le disque risque de se briser.
   Le calcul ci-dessus ne donne qu'un ordre de grandeur dans la mesure où il ne prend pas en compte les interactions entre les différentes couronnes.