Épreuve de physique II

Samedi 11 mars : 8h30-12h30

Piste bleue

Instructions générales :

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

De l'évolution du concept d'atome au cours du XXe siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XXe siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome. Dans la **partie I**, on s'intéressera à l'expérience de E. Rutherford, qui conduisit à abandonner le modèle de J.J. Thomson au profit de celui de J. Perrin. Les limites de ce modèle feront l'objet de la **partie II**, limites qui seront partiellement levées dans la **partie III** avec les postulats de N. Bohr. Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H_α qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révélera être formée de raies plus nombreuses (**partie IV**).

Dans la dernière partie, nous revenons sur le modèle de Thomson. Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Le rotationnel d'un champ $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z \\ \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x \\ \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \end{pmatrix}$$

Données numériques

Constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Charge électrique élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Électronvolt $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

I. Limite du modèle de J. J. Thomson à travers l'expérience de E. Rutherford

En 1898, J.J. Thomson fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car J.J. Thomson compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien Jean Perrin imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, Ernest Rutherford, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium $4 : \frac{4}{2}\text{He}$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de J.J. Thomson, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par J.J. Thomson est incompatible avec les observations de E. Rutherford.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de J. Perrin, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0 \text{ s}$, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2.e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0) = v_0 \cdot \vec{e}_x$. On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (figure 1). À chaque instant t , on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O . La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\vec{OM}(t) = d(t) \cdot \vec{e}_r$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O , la particule alpha est au point S , la distance minimale en ce point est notée d_m . La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.

FIGURE 1 – Expérience de Ernest Rutherford

- Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e , Z , d , ϵ_0 et $\vec{e}_r$. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e , Z , d et ϵ_0 . Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \frac{Z \cdot e^2}{2\pi\epsilon_0}$ et d .

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

- Déterminer, en fonction de m_α et v_0 , l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.
- Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$, en fonction de b , m_α , v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Pour cela, vous pourrez calculer $\vec{L}_O$ en M_0 , position initiale de la particule alpha telle que $\vec{OM}_0 = X \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y$.
- Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$ en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, m_α , d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

En déduire une relation entre d , b , $\dot{\theta}$ et v_0 .

- Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse $\vec{v}_s$, de norme v_s , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur $\vec{OS}$, de norme d_m . Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K , b , m_α et v_0 .

- Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b . Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K , d , m_α , $\vec{v}$ et $\vec{e}_r$. Projeter le P.F.D. sur l'axe des x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x , et l'angle θ (figure 1).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x , θ , $\dot{\theta}$, K , b , m_α et v_0 .

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{b \cdot m_\alpha \cdot v_0^2}$.

On rappelle que : $\cos \varphi - 1 = -2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin \varphi = 2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

- À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or? Expliquer pourquoi le modèle de J Perrin permet d'interpréter les observations de E. Rutherford.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

- Montrer que la relation qui lie d_m à φ , est : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

- Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ , la distance d'approche est-elle minimale? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K , m_α et v_0 .

11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau. Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m .
12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

II. Limite du modèle planétaire

Le modèle de J.J. Thomson est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.

Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (figure 2). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C .

FIGURE 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ (figure 2). $\vec{e}_\theta$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM})$.

13. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 , r et d'un vecteur unitaire.
14. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A \cdot f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e , ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.
15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 \cdot e^2 \cdot r^2}{12 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.
17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R . Donner l'expression, en fonction de P_0 , R et A , du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.
On donne $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer t_f . Commenter le résultat obtenu.

III. Postulats de N. Bohr

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par Niels Bohr. En 1913, ce dernier postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome

$$L = n \cdot \hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

Vous considérerez qu'un électron sur une orbite de rayon r possède une vitesse $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$ et une énergie mécanique $E_M = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$.

18. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$.
Préciser l'expression de r_0 en fonction de ϵ_0 , h , m_e et e . Calculer la valeur de r_0 .
19. En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite, établir une relation entre la longueur d'onde de De Broglie de l'électron λ et le périmètre $\mathcal{P}$ de son orbite.
Montrer qu'on retrouve alors le postulat mécanique de N Bohr.
20. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$.
Préciser l'expression de E_0 en fonction de ϵ_0 , h , m_e et e . Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0 .
Que représente physiquement E_0 ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

21. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg - Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \quad \text{avec } n_i > n_f. R_H \text{ est la constante de Rydberg.}$$

Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0 , h et c . Indiquer sa valeur et son unité.

22. Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 102,5 \text{ nm}$; $\lambda_3 = 97,2 \text{ nm}$.

À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.

IV. Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

Le schéma 1 de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné page suivante. On note Ox et Oy deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre. S est une source lumineuse ponctuelle située sur Ox . M_1 et M_2 sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à Ox en H_1 et respectivement à Oy en H_2 . Le trait incliné à 45° , noté L_s , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux. L_p désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe Oy . Un écran E est placé dans le plan focal image de L_p . On note C le foyer image de L_p .

FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson

23. Nommer les lames qui composent L_s . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.

24. Un rayon lumineux, noté (r) , émis par S , a été représenté. Reproduire le schéma ci-dessous sur la copie avec $SO = OH_1 = 2OH_2$ et le compléter en faisant un tracé soigné des deux rayons (r_1) et (r_2) qui émergent de l'interféromètre après division de (r) . On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.
25. Sur ce même schéma positionner le miroir fictif M'_1 justifiant de la dénomination « lame d'air » en faisant apparaître le point Q_1 intersection de M'_1 avec les deux prolongements fictifs ad hoc de (r_1) et (r_2) .
Enfin, terminer le tracé des rayons (r_1) et (r_2) après la lentille L_p jusqu'à l'écran E (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).
26. Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?
27. En appelant e l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche δ au centre C de l'écran.
28. On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes σ_1 et σ_2 . Donner l'expression des ordres d'interférence p_1 et p_2 en C pour chaque radiation du doublet en fonction de δ , σ_1 et σ_2 .
29. Pour quelles valeurs de la différence $p_1 - p_2$ y-a-t-il brouillage en C ?
En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, la variation D_δ de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage.
Comment nomme-t-on ces situations ?

Application numérique : dans le cas du doublet H_α (écart spectral $\Delta\sigma_{exp} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$), calculer la variation D_e de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive.

FIGURE 4 – Schéma des trajets lumineux dans l'interféromètre de Michelson et Morley de 1887 (source : <http://ondes-relativite.info/DominiqueCabala/chap4histo.htm>)

30. À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie H_α présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à L_0), ils ont compté un total de 6 brouillages

de part et d'autre du contact optique (3 de chaque côté) pour un déplacement du miroir égal à $1/160e$ de la longueur L_0 .

Calculer la valeur de L_0 pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

31. L'interféromètre, construit dans un sous-sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure.

La table faisait environ $130\text{ cm} \times 110\text{ cm}$ de cotés. La longueur L_0 des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers-retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la figure.

À partir de la figure? (page?), donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est-il en accord avec la valeur L_0 trouvée à la question précédente?

V. Oscillations au sein de l'atome de Thomson

Afin de donner une vision classique de l'émission d'un atome préalablement excité, nous allons étudier la réponse mécanique d'un électron à une excitation de l'atome.

Le modèle de l'atome d'hydrogène adopté ici est celui élaboré par Joseph Thomson, prix Nobel en 1906 pour avoir découvert l'électron en 1897. Il proposa en 1904 un modèle dit du « pudding aux électrons ».

Il s'agit :

- d'une boule de centre O et de rayon a , avec $a \simeq 10^{-10}$ m, uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge (uniforme à l'intérieur de la boule) notée ρ , de charge totale $+e$, considérée immobile dans le référentiel du laboratoire,
- et d'un électron ponctuel (masse m , charge $-e$) libre de se déplacer sans frottement dans l'espace de la boule.

FIGURE 5 – Coordonnées et base sphériques

La position d'un point M de l'espace est parfois repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) (sur la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$), ou par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , associées à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

V. A. Force électrostatique ressentie par l'électron

32. Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ .

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$.

33. Montrer que le champ électrostatique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

34. Déterminer en tout point M intérieur à la boule, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la distribution de charge caractérisée par ρ .

L'électron se situe en un point $M(r, \theta, \varphi)$ intérieur à la boule. On le repère par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. On suppose ici l'atome isolé et on néglige toute attraction gravitationnelle.

35. Donner la force ressentie par l'électron. Mettre cette force sous la forme $\vec{F} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{OM}$ où on donnera l'expression de ω_0 . Commenter l'expression de cette force.

V. B. Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Dans une lampe à vapeur, lors d'une décharge électrique, un atome peut recevoir beaucoup d'énergie à l'issue d'un choc. On suppose qu'il se trouve alors dans un état initial d'énergie mécanique $\mathcal{E}_0$. Le choc a lieu à l'instant $t = 0$, l'électron est alors situé sur sa position d'équilibre en O , avec une énergie cinétique initiale non nulle car sa vitesse initiale vaut $\vec{v}(t = 0) = -V_0\vec{e}_z$. Pour $t \geq 0$, l'atome est supposé isolé du reste de l'univers.

36. Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$, vecteur position de l'électron. En déduire le vecteur position $\vec{r}(t)$ lié au mouvement de l'électron en l'exprimant avec ω_0 .

37. Donner l'expression du moment dipolaire électrique de l'atome d'hydrogène $\vec{p}(t)$ en fonction de e et $\vec{r}$. En déduire que $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ où on exprimera $p_z(t)$ comme une fonction sinusoïdale du temps dont on explicitera l'amplitude et la pulsation en fonction de e , V_0 et ω_0 .