

Première partie

De l'évolution du concept d'atome au cours du XX^e siècle

I Limite du modèle de J. J. THOMSON à travers l'expérience de E. RUTHERFORD

Q1. Si la charge positive était répartie uniformément, le "rebond" ne serait pas aléatoire : soit l'énergie cinétique initiale est trop faible et la répulsion électrostatique revoit les particules alpha, soit elle est suffisante et elles passent toutes au travers.

Q2. Il s'agit de la force électrostatique entre la charge $2e$ de la particule alpha et la charge Ze du noyau d'or donc :

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r.$$

C'est une force newtonienne dont l'énergie potentielle s'écrit

$$E_p(d) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{K}{d}$$

Cette force est à la fois **centrale**, ce qui implique que le moment cinétique est conservé, et **conservative**, ce qui implique la conservation de l'énergie mécanique (car c'est la seule force en présence ici).

Q3. L'énergie mécanique étant constante, elle vaut sa valeur initiale. Or à $t = 0$, la particule est à l'infini donc son énergie potentielle est nulle. Il reste donc simplement

$$E_M = E_M(t = 0) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

Q4. Par définition $\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m_\alpha \vec{v}_0 = (X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge m_\alpha v_0 \vec{e}_x$

$$\vec{L}_O = -m_\alpha b v_0 \vec{e}_z$$

Q5. De même à un instant quelconque :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_\alpha \vec{v} = d\vec{e}_r \wedge m_\alpha (d\dot{\vec{e}}_r + d\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{L}_O = m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

On a donc à chaque instant, par conservation de \vec{L}_O :

$$d^2 \dot{\theta} = -b v_0$$

Q6. Au sommet de la trajectoire, on peut à nouveau calculer \vec{L}_O facilement car la vitesse est orthogonale au rayon. On en déduit $d_m v_S = b v_0$ par conservation.

Et par conservation de l'énergie mécanique, on a

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_S^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

En remplaçant v_S par la relation précédente et en multipliant tout par $\frac{2d_m^2}{m_\alpha v_0^2}$, on obtient :

$$d_m^2 - \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0$$

On résout cette équation du second degré :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$$

. Seule la solution avec un "+" est positive donc on garde

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} + \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$$

Q7. Le PFD a pour expression :

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$$

Le PFD projeté sur \vec{e}_x donne :

$$m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos \theta = -\frac{K}{b v_0} \dot{\theta} \cos \theta$$

On intègre cette relation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$:

$$m_\alpha(v_x(\infty) - v_0) = -\frac{K}{bv_0} [\sin \theta]_0^\infty$$

Or $v_x(\infty) = v_0 \cos \varphi$, $\theta(0) = \pi$ et $\theta(\infty) = \varphi$:

$$m_\alpha v_0(1 - \cos \varphi) = -\frac{K}{bv_0} \sin \varphi$$

En utilisant les formules de l'énoncé, on obtient :

$$2m_\alpha v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{bv_0} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Donc en simplifiant on obtient la relation demandée :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{m_\alpha b v_0^2}$$

Q8. Il y aura "rebond" si $\varphi > \frac{\pi}{2}$, pour que les particules repartent en arrière.

Ceci nécessite que $b < \frac{K}{m_\alpha v_0^2}$, donc que b soit "suffisamment petit" : il faut envoyer la particule alpha "suffisamment près" du noyau pour voir l'effet.

Q9. En reprenant l'expression de d_m :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_\alpha^2 v_0^4 b^2}{K^2}} \right)$$

On reconnaît sous la racine l'expression correspondant à $\tan \frac{\varphi}{2}$:

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \tan^{-2} \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \right)$$

En simplifiant (car $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$ ici), on obtient bien :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$$

Q10. d_m est minimale lorsque $\sin \frac{\varphi}{2}$ est maximal donc pour $\varphi = \varphi_m = \pi$. On a alors

$$d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2}$$

Q11. Avec la relation de la Q7., on vérifie que cette situation correspond à $b \rightarrow 0$. La trajectoire est alors rectiligne, droite en direction du noyau, avec un demi-tour à une distance $d_{m,min}$ de O . Si la particule peut arriver jusqu'en $d_{m,min}$ avant de faire demi-tour, c'est que le noyau est un peu plus loin, donc plus petit que $d_{m,min}$.

$$\text{AN : } d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} = \frac{K}{E_c} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_c} \approx 5.10^{-14} \text{ m.}$$

Q12. Pour sonder l'intérieur du noyau, il faut diminuer $d_{m,min}$ donc augmenter l'énergie cinétique des particules incidentes.

II Limite du modèle planétaire

Q13. On applique le PFD à l'électron, soumis uniquement à la force électrostatique et on le projette dans la base cylindrique (avec $r = cste$) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{cases} -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ m_e r \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la norme de la vitesse est constante et que finalement

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta$$

Q14. L'énergie mécanique s'écrit : $E_M = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ en remplaçant par l'expression de v . On a donc $A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}$ et $f(r) = \frac{1}{r}$.

Q15. $\omega = \dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$ donc en remplaçant dans l'expression de $P(r)$, on obtient :

$$P(r) = \frac{P_0}{r^4} \text{ avec } P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}$$

Si $P(r)$ est une puissance, P_0 s'exprime en W.m^4 .

$P(r)$ représente l'énergie perdue par rayonnement par unité de temps, donc l'énergie mécanique de l'électron diminue. Comme $A < 0$ et $f(r)$ est décroissante, le rayon diminue aussi.

Q16. On applique le théorème de la puissance mécanique (ie un bilan d'énergie mécanique) à l'électron, sachant que $P(r)$ est la puissance perdue. On a donc :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P(r) \Rightarrow -\frac{A}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{r^4}$$

$$r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$$

Comme $A < 0$, le rayon diminue bien.

Q17. On sépare les variables avant d'intégrer :

$$\int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_f} \frac{P_0}{A} dt \text{ soit, } t_f = -\frac{A}{3P_0} R^3$$

AN $\frac{-A}{P_0} = \frac{24\pi^2 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}{e^4} \approx 6,4.10^{20} \text{ s.m}^{-3}$ donc $t_f \approx 2,1.10^{-10} \text{ s}$. L'atome ne serait stable que pendant un temps infiniment court, c'est impossible.

III Postulats de N. BOHR

Q18. D'après le postulat mécanique, $L = n\hbar$. Or pour une trajectoire circulaire, on a $L = m_e r v = \frac{m_e r e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$ donc en remplaçant et en élevant au carré, on obtient :

$$r = n^2 r_0 \text{ avec } r_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

AN : $r_0 = 53 \text{ pm}$

Q19. Le périmètre vérifie : $\mathcal{P} = 2\pi r = n\lambda$. Or d'après la relation de DE BROGLIE, $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p}$ avec p quantité de mouvement. On en déduit $r = n \frac{\hbar}{p}$ soit

$$L = rp = n\hbar$$

qui est le postulat mécanique précédent.

Q20. On remplace r par son expression dans l'énergie mécanique et il vient

$E_M = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 r_0}$ donc on a bien

$$E_M = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}$$

AN : $E_0 \approx 13 \text{ eV}$

Physiquement, E_0 est l'énergie d'ionisation du niveau fondamental.

Q21. D'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, l'énergie du photon émis s'écrit :

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_i} - E_{n_f} = -E_0 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

On a donc bien

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ avec } R_H = \frac{E_0}{hc}$$

AN : $R_H \approx 1,1.10^7 \text{ m}^{-1}$.

Q22. Ces trois raies sont dans l'ultraviolet.

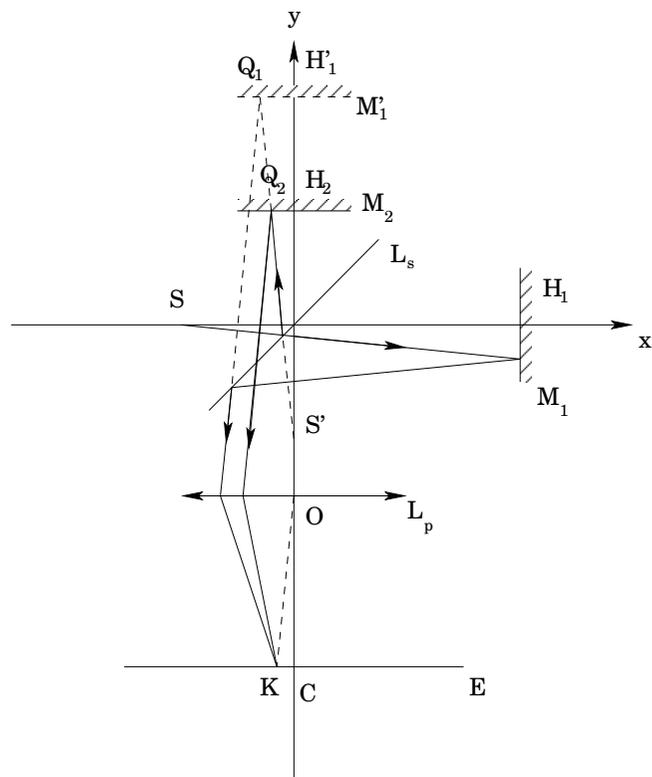
On trouve pour les 3 raies ($n_i = 2, 3$ ou 4) on trouve bien $R_H \approx 1,1.10^7 \text{ m}^{-1}$ en gardant 2 chiffres significatifs.

Les trois valeurs obtenues sont en très bon accord avec la théorie. Cependant, ce modèle n'est valable que pour l'hydrogène et les ions hydrogénoïdes (avec 1 seul électron).

IV Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Q23. (Rq : la description est un peu trompeuse, car seule une des lames est semi-réfléchissante) Les deux lames sont la **lame séparatrice**, lame de verre dont l'une des faces est semi-réfléchissante, et la **compensatrice**, lame de verre identique à la première, mais non réfléchissante. La compensatrice est indispensable pour compenser la différence de marche induite par la traversée de la séparatrice (si la face avant est réfléchissante, seul le rayon transmis traverse la lame, l'autre devra donc traverser la compensatrice pour éviter de déphaser les deux rayons).

24.



On trace le symétrique S' de S par rapport au miroir, et on en déduit par prolongement la trajectoire du rayon réfléchi, ainsi que la trajectoire du symétrique du

rayon incident, qui se réfléchit sur le symétrique M'_1 du miroir M_1 . On peut pour plus de précision tracer les symétriques S'_1 et S'_2 de S' par rapport à M'_1 et M_2 : les rayons réfléchis passent par ces points (je les ai omis sur la figure ?? pour des raisons de lisibilité et de compacité mais telle que la question est posée il faut les mettre)

25. La définition du point Q_1 n'est pas cohérente : j'ai pris pour ma part l'intersection avec le rayon r_1 . Pour la suite du tracé il faut prendre un rayon guide parallèle à r_1 et r_2 et passant par O , qui nous permet par prolongement d'obtenir le point K (image d'un objet à l'infini) par lequel passent donc les deux rayons émergent de l'interféromètre.

26. Il s'agit de **franges circulaires**. On parle de franges d'**égale inclinaison**.

27. On a dans ce cas $\delta = 2Q_2Q_1 = 2e$.

28. Par définition, $p = \frac{\delta}{\lambda} = \sigma\delta$. On a donc $p_1 = \delta\sigma_1$ et $p_2 = \delta\sigma_2$.

29. Il y a brouillage lorsque $p_1 - p_2$ est demi-entier, soit $p_1 - p_2 = (n + 1/2)$.

Soit $\delta\Delta\sigma = (n + 1/2)$. Entre deux situations consécutives de brouillage, on a $D_\delta\Delta\sigma = 1$, soit $D_\delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$.

Ces situations sont appelées **anticoïncidences**.

On a $D_e = D_\delta/2 = \frac{1}{2\Delta\sigma} = 1,39 \text{ cm}$.

30. Il y a de part et d'autre du contact optique (cas de coïncidence) trois anticoïncidences soit 5 intervalle D_e . On a donc $5D - E = \frac{L_0}{160}$,

$$L_0 = 800D_e = 11,1 \text{ m}$$

31. Les bras parcourent grossièrement la diagonale d'un carré de côté 1,1 m. On a 7,5 allers-retours, mais, comme la diagonale n'est pas entièrement parcourue, on peut considérer que la distance perdue est de l'ordre d'une demi-diagonale. On obtient alors $L_0 \simeq 7 \times \sqrt{2} \times 1,1 = 11 \text{ m}$, ce qui paraît tout à fait compatible avec notre estimation précédente.

V Oscillations au sein de l'atome de Thomson

V A. Force électrostatique ressentie par l'électron

32. Expression de la densité volumique de charge ρ :

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

33. Soit \vec{E} le champ électrostatique créé en M : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$.

- Le plan $\Pi_1(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charge.
- Le plan $\Pi_2(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ est plan de symétrie de la distribution.

Le champ électrique en M appartient à ces deux plans de symétrie, il est donc colinéaire à \vec{e}_r .

D'autre part, la distribution est invariante par toute rotation de φ autour de \vec{e}_z et par toute rotation de θ autour de \vec{e}_φ ; $\vec{E}(M)$ est, alors, indépendant de θ et de φ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$$

34. On choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r . Le flux sortant du champ électrique est égale à la charge intérieure sur ϵ_0 , soit

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

On en déduit

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r\vec{e}_r$$

35. La force ressentie par l'électron est $\vec{F} = -e\vec{E}$. On a donc $\vec{F} = -\frac{e\rho}{3\epsilon_0}r\vec{e}_r = -m_e\omega_0^2\vec{OM}$ où $\omega_0^2 = \frac{e\rho}{3m_e\epsilon_0}$ et $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

Cette force est une force de rappel élastique.

V B. Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

36. L'électron, assimilé à un point matériel, en mouvement dans le référentiel de l'atome considéré comme galiléen, est soumis à \vec{F} . D'après la relation fondamentale de la dynamique on a :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -m_e\omega_0^2\vec{r}$$

soit

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2\vec{r} = 0.$$

On a donc $\vec{r}(t) = \vec{A}\cos(\omega_0 t) + \vec{B}\sin(\omega_0 t)$ avec $\vec{r}(t=0) = \vec{0} = \vec{A}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt}(t=0) = -V_0\vec{e}_z = \omega_0\vec{B}$. On a donc

$$\vec{r}(t) = -\frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\vec{e}_z$$

37. Le barycentre des charges positive est en O et celui des charges négatives est en \vec{r} on a, d'après la définition du moment dipolaire, $\vec{p}(t) = -e\vec{r}$. Soit $\vec{p}(t) = p_z(t)\vec{e}_z$ avec

$$p_z(t) = \frac{eV_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$