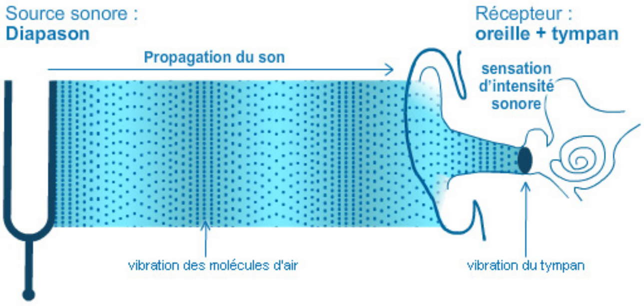
Ondes acoustiques dans les fluides



I Équation d'onde

I.1 Équations brutes

Équation d'Euler pour un fluide parfait :

$$\mu\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\vec{v}\right]=\mu\vec{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(P)$$

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})=0$$

Fluide compressible caractérisé par son coefficient de compressibilité isentrope :

$$\chi_S=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_S$$

I.2 Approximation acoustique

L'onde sonore est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre (P_0, μ_0).

$$P(M,t)=P_0+p_1(M,t),\quad \mu(M,t)=\mu_0+\mu_1(M,t),\quad \vec{v}(M,t)=\vec{v_1}(M,t)$$

avec $\dfrac{|p_1|}{P_0}\ll 1$, $\dfrac{|\mu_1|}{\mu_0}\ll 1$ et $\dfrac{\|\overrightarrow{v_1}\|}{c}\ll 1$, c est la célérité de l'onde sonore dans le fluide considéré.

Grandeur	Unité	Fluide au repos	En présence d'une onde sonore
Champ des vitesses	$m.s^{-1}$	$\vec{v}(M,t)=\vec{0}$	$\vec{v}(M,t)=\vec{v_1}(M,t)$
Champ de pression	Pa	$P(M,t)=P_0$	$P(M,t)=P_0+p_1(M,t)$
Masse volumique	$kg.m^{-3}$	$\mu(M,t)=\mu_0$	$\mu(M,t)=\mu_0+\mu_1(M,t)$
Déplacement des particules	m	$\xi(M,t)=0$	$\xi(M,t)=\xi_1(M,t)$

I.3 Linéarisation

Équation d'Euler linéarisée : $\boxed{\mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p_1)}$

Conservation de la masse linéarisée : $\boxed{\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \,\text{div}\,(\overrightarrow{v_1})}$

Évolution isentropique linéarisée : $\boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1}$

μ_1 et p_1 sont proportionnelles, on peut éliminer μ_1 et obtenir deux équations couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(p_1) \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_s}\,\text{div}\,(\overrightarrow{v_1}) \end{cases}$$

I.4 Équation de propagation pour la surpression acoustique

a Onde unidimensionnelle

On a $p_1(M,t) = p_1(x,t)$ et $\overrightarrow{v_1}(M,t) = v_1(M,t)\overrightarrow{e_x}$. Les équations couplées ont alors comme forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial p_1}{\partial x}\overrightarrow{e_x} \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases}$$

Soit $$\boxed{\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}} \text{ avec } \boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}}$$

b Généralisation

$$\boxed{\Delta p_1 = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}}$$

Équation de d'Alembert à 3D

I.5 Équation de propagation pour la vitesse

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{v_1}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}}$$

I.6 Ordres de grandeur

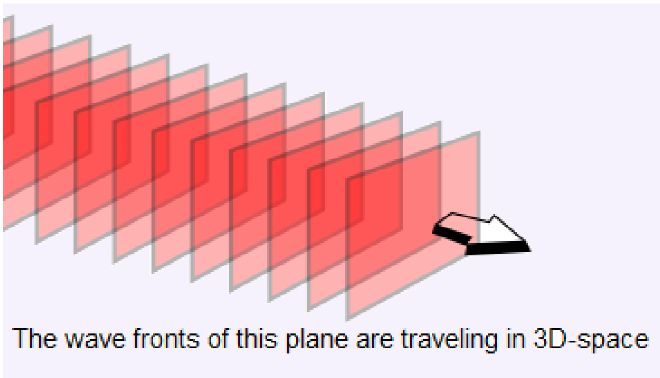
État	Gaz à 20°C			Liquide	
Matière	Air	Dioxygène	Dihydrogène	Eau	Mercure
c en m.s^{-1}	343	317	1270	1480	1450

II Solutions en ondes planes

II.1 Ondes planes

a Définition

Une **surface d'onde** est une surface sur laquelle l'onde est uniforme (même état vibratoire). C'est donc l'ensemble des points M se trouvant dans le même état vibratoire à un instant donné : $s(M,t) = K(t)$ (constante sur la surface, mais variable dans le temps).
Une onde est plane si ses surfaces d'onde sont des plans (on parle alors de "plans d'onde").



$$s(M,t) = f\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{u}}{c}\right)$$

$\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation. f fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.

b OPPS

$$s(M,t) = S_0\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi\right)$$

$\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{u}$.

c Notations complexes

$$\underline{s}(M,t) = S_0\exp\left(j(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi)\right) = \underline{S_0}\exp\left(j\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right)$$

avec $\underline{S_0} = S_0\exp(j\varphi)$.

$p_1(M,t) = p_{10}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_p)$	$\dfrac{\partial p_1}{\partial t}$	$\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$	$\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1$	Δp_1
$\underline{p_1}(M,t) = \underline{p_{10}}\exp\left(j\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right)$	$i\omega\underline{p_1}$	$-jk_x\underline{p_1}$	$-j\overrightarrow{k}\,\underline{p_1}$	$-k^2\underline{p_1}$
$\overrightarrow{v_1}(M,t) = \overrightarrow{v_{10}}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_v)$	$\dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}$	$\dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial x}$	$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v_1})$	$\text{div}\,(\overrightarrow{v_1})$
$\underline{\overrightarrow{v_1}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{v_{10}}}\exp\left(j\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right)$	$i\omega\underline{\overrightarrow{v_1}}$	$-jk_x\underline{\overrightarrow{v_1}}$	$-j\overrightarrow{k}\wedge\underline{\overrightarrow{v_1}}$	$-j\overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{v_1}}$

II.2 Structure de l'onde plane progressive sinusoïdale sonore

a Équation de dispersion

D'après l'équation d'onde, on a

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_s}}$.

En notation complexe, pour une OPPM, cette équation devient : $-k^2\underline{p_1} = -\dfrac{\omega^2}{c}\underline{p_1}$ d'où l'équation de dispersion :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

b Structure

En notation complexe, pour une OPPM :

$$\begin{cases} \overrightarrow{k}\cdot\underline{\overrightarrow{v_1}} & = \omega\chi_s\underline{p_1} \\ \underline{p_1}\,\overrightarrow{k} & = \mu_0\omega\,\underline{\overrightarrow{v_1}} \end{cases}$$

Il vient : $\underline{\overrightarrow{v_1}} = \dfrac{\underline{p_1}}{\mu_0 c}\overrightarrow{u} = \dfrac{p_{10}}{\mu_0 c}\exp j\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_p\right)\overrightarrow{u}$.

Avec les grandeurs réelles : $\boxed{\overrightarrow{v_1}(M,t) = \dfrac{p_{10}}{\mu_0 c}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi_p\right)\overrightarrow{u}}$.

Une onde sonore est une **onde longitudinale** puisque la vitesse est dirigée selon la direction de propagation. Les ondes de surpression et de vitesse sont en phase.

c Impédance

On appelle impédance acoustique d'un milieu le rapport $\dfrac{p_1}{v_1}$.

$$\boxed{Z_a = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}}$$

III Aspect énergétique

III.1 Vecteur densité de courant d'énergie

Sur une surface élémentaire $\mathrm{dS}\overrightarrow{n}$ s'exerce une force acoustique

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \mathrm{p}_1\mathrm{dS}\overrightarrow{n}$$

de puissance

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \mathrm{d}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v_1} = \mathrm{p}_1\mathrm{dS}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_1}$$

Cette puissance est le flux de $\overrightarrow{\Pi} = p_1\overrightarrow{v_1}$ à travers cette surface élémentaire, soit

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{n}\mathrm{dS}$$

III.2 Densité volumique d'énergie

Soit e_{ac} la densité volumique d'énergie acoustique ; en l'absence de phénomène dissipatif, l'énergie acoustique se conserve ; si $\overrightarrow{\Pi}$ désigne le vecteur densité de courant associé à l'énergie acoustique, la conservation de l'énergie acoustique s'écrit

$$\frac{\partial\, e_{ac}}{\partial\, t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{\Pi} = 0$$

On peut s'attendre à une énergie volumique comportant un terme d'énergie cinétique, et un terme e' d'énergie potentielle élastique, proportionnelle à p_1^2, soit une énergie volumique de la forme :

$$e_{ac} = \frac{1}{2}\mu_0 v^2 + K p_1^2$$

où K est une constante à déterminer.

Calculons la divergence de $\overrightarrow{\Pi}$; on a

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\overrightarrow{\Pi} &= p_1\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1\cdot\overrightarrow{v_1}\\ &= -\chi_S p_1\frac{\partial\,p_1}{\partial\,t} - \mu_0\frac{\partial\,\overrightarrow{v_1}}{\partial\,t}\cdot\overrightarrow{v_1}\\ &= -\frac{\partial}{\partial\,t}\left[\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2\right]\end{aligned}$$

On peut ainsi identifier e_{ac}, qui est bien de la forme escomptée, avec $K = \dfrac{1}{2}\chi_s$. On a finalement

$$\left\{\begin{array}{l} e_{ac} = \dfrac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \dfrac{1}{2}\chi_S p_1^2\\ \overrightarrow{\Pi} = p_1\overrightarrow{v_1}\end{array}\right.$$

III.3 Bilan

III.4 Intensité acoustique

a Définition

On définit l'intensité acoustique comme la norme de la moyenne temporelle du vecteur densité de courant d'énergie acoustique :

$$I = \left\|\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle\right\|$$

On retiendra les ordres de grandeur suivants, à 1 kHz :

$$\begin{cases} \text{seuil d'audition} & I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W.m^{-2}} \\ \text{seuil de douleur} & I_1 = 10^{+2}\ \mathrm{W.m^{-2}} \end{cases}$$

La largeur de cet intervalle a conduit à utiliser une échelle logarithmique ; on définit l'intensité relative en décibels par

$$I_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Ainsi, le seuil d'audition correspond à 0 dB, tandis que le seuil de douleur se situe à 140 dB.

b Cas d'une OPPS

Prenons le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale dans le sens des x croissants. La surpression peut se mettre sous la forme

$$\underline{p_1} = p_{01} e^{i\omega(t-x/c)}$$

La vitesse acoustique correspondante est donnée par

$$\mu_0 i\omega \underline{\overrightarrow{v_1}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\underline{p_1} = i\frac{\omega}{c} p_{01} e^{i\omega(t-x/c)} \overrightarrow{e_x}$$

soit

$$\underline{\overrightarrow{v_1}} = \frac{p_{01}}{\mu_0 c} e^{i\omega(t-x/c)} \overrightarrow{e_x} = \frac{\underline{p_1}}{\mu_0 c} \overrightarrow{e_x}$$

En représentation réelle, on a donc

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{p_1}{\mu_0 c} \overrightarrow{e_x}$$

et

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{p_1^2}{\mu_0 c} \overrightarrow{e_x}$$

La valeur efficace de la surpression acoustique à 1 kHz s'en déduit :

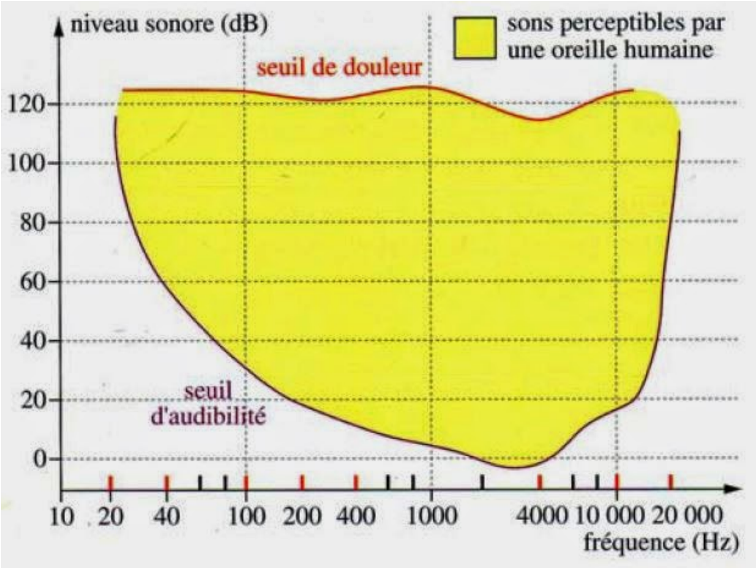
$$I_0 \rightarrow p_{eff} = \sqrt{\mu_0 c I_0} = 2.10^{-5}\ \mathrm{Pa}$$
$$I_1 \rightarrow p_{eff} = \sqrt{\mu_0 c I_1} = 2.10^{2}\ \mathrm{Pa}$$

A l'intensité I_0 et à 1 kHz, on peut également calculer les valeurs efficaces de la vitesse :

$$v_{eff} = 5.10^{-8}\ \mathrm{m/s}$$

et du déplacement :

$$x_{eff} = \frac{v_{eff}}{\omega} = 8.10^{-12}\ \mathrm{m}$$



c Valeurs numériques

	Intensité $W.m^{-2}$	Niveau sonore dB	surpression p_1 (Pa)	vitesse v_1 ($m.s^{-1}$)
seuil d'audition	10^{-12}	0	$3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-8}$
chuchotement	10^{-10}	20	$3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-7}$
forêt	10^{-8}	40	$3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-6}$
conversation	10^{-6}	60	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$
cris	10^{-4}	80	$3 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-4}$
marteau piqueur	10^{-2}	100	3	$7 \cdot 10^{-3}$
seuil de douleur	1	120	30	$7 \cdot 10^{-2}$

IV Solutions en ondes sphériques

IV.1 Définition

On appelle onde sphérique, une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères concentriques.

Onde sphérique : $p_1(M,t) = p_1(r,t)$ avec p_1 qui est régi par l'équation de d'Alembert 3D :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 r p_1}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Les solutions sont de la forme :

$$p_1(M,t) = \underbrace{\frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right)}_{\text{Onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c}\right)}_{\text{Onde sphérique convergente}}$$

IV.2 Ondes sphériques harmoniques ou sinusoidale

Une onde sonore sphérique harmonique est une onde sphérique pour laquelle la surpression p_1 est de la forme :

$$p_1(M,t) = \frac{1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Le champ des vitesses est de la forme :

$$\overrightarrow{v_1}(M,t) = \frac{p_{01}}{\mu_0 c r}\left[\cos(\omega t - kr + \varphi_0) + \frac{1}{kr}\sin(\omega t - kr + \varphi_0)\right]\overrightarrow{e_r}$$

IV.3 Puissance rayonnée

V Réflexion et transmission d'une OPPS sous incidence normale

V.1 Position du problème

Une onde incidente (pour $x < 0$) :

- $p_i(x,t) = p_{i0}\cos(\omega t - k_1 x)$ avec $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$
- $\overrightarrow{v_i}(x,t) = v_{i0}\cos(\omega t - k_1 x)\overrightarrow{e_x}$

Cette onde incidente donne naissance à deux OPPS de même pulsation, une onde transmise ($x > 0$) :

- $p_t(x,t) = p_{t0}\cos(\omega t - k_2 x)$ avec $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$
- $\overrightarrow{v_t}(x,t) = v_{t0}\cos(\omega t - k_2 x)\overrightarrow{e_x}$

et une onde réfléchie ($x < 0$) :

- $p_t(x,t) = p_{r0}\cos(\omega t - k_1 x)$
- $\overrightarrow{v_t}(x,t) = -v_{r0}\cos(\omega t + k_1 x)\overrightarrow{e_x}$

V.2 Conditions aux limites

V.3 Continuité de p en $x = 0$

$$p_1(0,t) = p_2(0,t)$$

V.4 Continuité de $\overrightarrow{v}$ en $x = 0$

$$\overrightarrow{v_1}(0,t) = \overrightarrow{v_2}(0,t)$$

V.5 Coefficients de transmission et de réflexion en amplitude

V.6 Coefficients de transmission et de réflexion en puissance