



Devoir surveillé n°4

Samedi 07 janvier 2023

Piste bleue

Première partie

Écoulements d'eau

I Étude d'une canalisation domestique d'amenée d'eau

On considère un écoulement incompressible, laminaire et en régime permanent d'eau liquide dans un tube cylindrique d'axe horizontal Oz et de diamètre D . On note ρ sa masse volumique et η sa viscosité, supposées constantes.

On néglige l'effet de la pesanteur. On rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$.

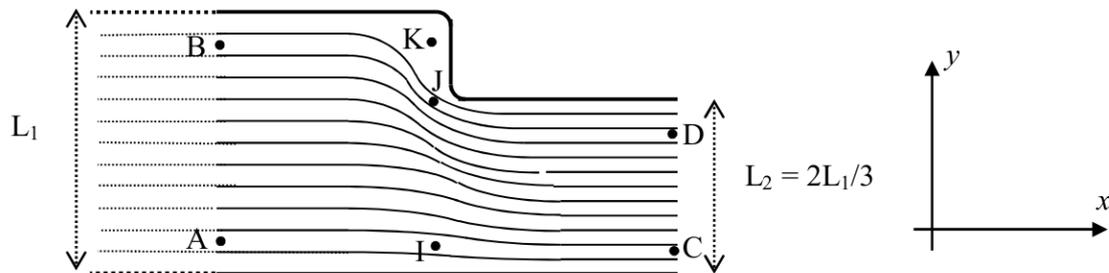
- Quelle(s) hypothèse(s) nous conduit (conduisent) à chercher l'expression de \vec{v} sous la forme : $\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_z$?
- Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire que la vitesse $v(r, z)$ ne dépend pas de z . On la notera donc $v(r)$ par la suite.
- Par application de l'équation de Navier Stokes,
 - montrer que la pression P ne dépend pas de r ,
 - montrer que la fonction $v(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{\eta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = K$ où, où K est une constante supposée connue.
- En remarquant que $v(r)$ reste finie et en précisant une autre condition aux limites, déterminer l'expression de $v(r)$ en fonction de K , η , r et D . Quel est le signe de K lorsque $v > 0$?
- Déterminer l'expression du débit volumique, noté Q_v , en fonction de K , η et D .
- À quelle distance r de l'axe la vitesse est-elle maximale ? En notant v_0 cette vitesse maximale, exprimer v_0 en fonction de Q_v et D .
- Le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de deux termes de même dimension. Comment se nomment ces deux termes ?
Préciser alors l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ , D , η et Q_v . On admettra que la vitesse caractéristique de l'écoulement correspond à la vitesse moyenne : $U = \frac{4Q_v}{\pi D^2}$.
- Application numérique : évaluer le débit maximal $Q_{v,max}$ et la valeur maximale de v_0 correspondante, notée $v_{0,max}$, pour que l'écoulement de l'eau dans notre canalisation de diamètre $D = 0,05$ m reste laminaire. Conclure.

II Écoulement dans un canal, mesure de débit à l'aide d'un tube de Pitot

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide assimilable à un fluide parfait, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal Oxy . Sa hauteur $h = 50$ cm est constante selon z . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de $L_1 = 50$ cm à $L_2 = \frac{2}{3}L_1 = 33$ cm.

Étude qualitative :

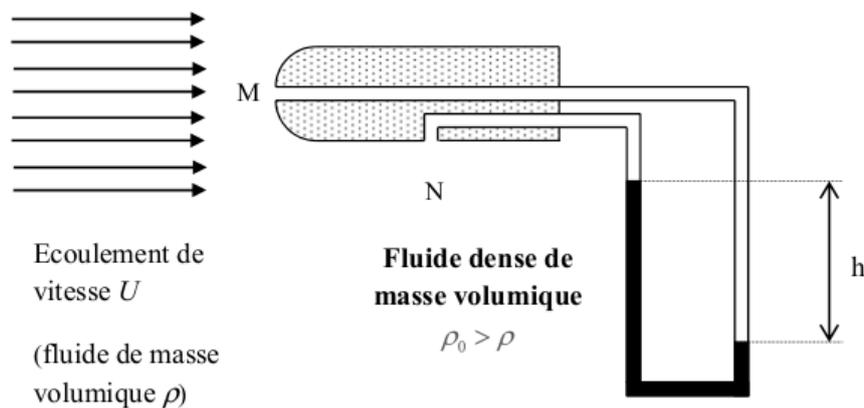
La figure 2 représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement.



1. Au vu de la figure 2, comparer $v(J)$, $v(K)$, $v(A)$ et $v(C)$.
2. La vitesse au point A , mesurée par un tube de Pitot est de $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse $v(C)$.

Étude quantitative : mesure au tube de Pitot (figure 3).

Le tube de Pitot, de diamètre $d = 1$ cm, est plongé dans le fluide en écoulement dont on veut évaluer la vitesse locale U . Il possède deux ouvertures. L'une, située au point M , est parallèle à l'écoulement du fluide. L'autre, située au point N , est perpendiculaire à cet écoulement. Par construction du capteur, les points M et N ont quasiment la même altitude. Ces deux ouvertures sont reliées par un tube vertical contenant un autre fluide, statique, plus dense, de masse volumique ρ_0 , de sorte qu'on puisse évaluer la différence de pression entre les points M et N , qui est une image de la vitesse U à déterminer.



3. Rappeler l'équation de Bernoulli en précisant bien ses hypothèses d'application.
4. Que peut-on dire de la vitesse au point M , notée $v(M)$? En assimilant l'eau à un fluide parfait, en déduire la vitesse U de l'écoulement en fonction de la masse volumique ρ et de la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ entre les points M et N .
5. Exprimer la différence de pression : $\Delta P = P(M) - P(N)$ en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .
6. En déduire l'expression de la vitesse U en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .
7. Calculer le nombre de Reynolds au niveau du tube de Pitot, situé à l'entrée du canal de largeur L_1 . Que pensez-vous de la validité de la mesure de la vitesse au point A ?

III Débitmètres pour eaux usées

L'encombrement des eaux d'égout par des débris solides interdit l'usage de débitmètres comportant des parties mobiles immergées dans le fluide. La mesure du débit en différents points de la station, pratiquée à des fins de surveillance, doit pouvoir être effectuée soit en canalisation fermée, la conduite étant alors remplie d'eau sous pression, soit en canalisation ouverte, la surface libre du liquide étant alors à la pression atmosphérique.

A. Déversoir à seuil mince en canal ouvert

On considère un canal à fond plat dans lequel circulent les eaux usées, assimilées à un fluide parfait dont l'écoulement est irrotationnel et stationnaire. Loin en amont du déversoir, on note $\vec{v}_1 = \vec{v}(M_1) = v_1 \vec{u}_x$ la vitesse du fluide et h la profondeur d'eau. Le déversoir à seuil mince consiste en une plaque métallique étroite, de hauteur H (appelée « pelle ») (voir figure 4). L'ensemble a une largeur B suivant \vec{u}_y . On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur. On fait de plus les hypothèses suivantes

- les lignes de courant du fluide sont supposées horizontales dans la section verticale passant par la pelle :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(M_2) = v_2(z)\vec{u}_x$$

- la pression au sein du fluide dans la section de la pelle est assimilée à la pression atmosphérique P_0 ;
- le débit est faible : $h - H \ll H$.

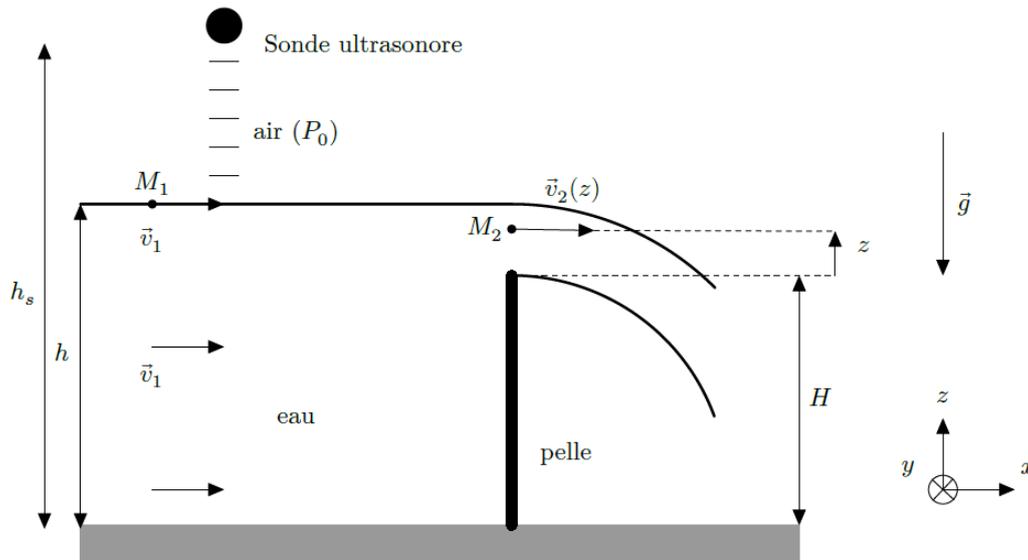


Figure 4 – Déversoir en canal ouvert (vue de côté)

- (a) Montrer que $v_{2,\max} \gg v_1$, où $v_{2,\max}$ est la valeur maximale de $v_2(z)$. On supposera par la suite que $\forall z, v_2(z) \gg v_1$.
(b) Exprimer la vitesse $v_2(z)$ au point M_2 en fonction de g, h, H et z .
- En déduire que le débit volumique Q peut s'écrire sous la forme $Q = A(h - H)^{3/2}$ où A est une constante que l'on exprimera en fonction de B et g .
- On mesure la hauteur h du fluide en amont grâce à une sonde utilisant des ondes ultrasonores. Cette sonde émet une impulsion, puis mesure le décalage temporel Δt de l'impulsion réfléchiée par la surface des eaux. Exprimer h en fonction de la hauteur h_s à laquelle est fixée la sonde, de la vitesse c des ondes ultrasonores dans l'air et de Δt .

B. Jaugeur Venturi en canal ouvert

- Préliminaire : écoulement fluvial ou torrentiel

Soit de l'eau assimilée à un liquide parfait en écoulement stationnaire et irrotationnel dans un canal à fond plat de largeur B . On note $h(x)$ la hauteur d'eau dans le canal et $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$ la vitesse du fluide, uniforme sur une section (voir figure 5). La surface libre est à la pression atmosphérique P_0 .

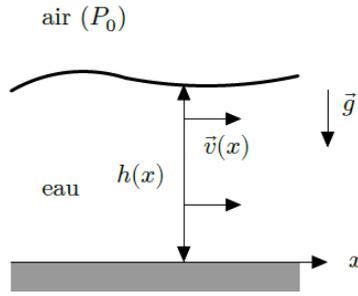


Figure 5 — Modèle d'écoulement dans un canal plat

- (a) On appelle charge spécifique la grandeur $H(x) = h(x) + \frac{v^2(x)}{2g}$. Montrer que $H(x)$ est constant pour l'écoulement considéré.
- (b) Exprimer H en fonction de $h(x)$ et du débit volumique Q . Tracer l'allure de $H(h)$. En déduire que pour un débit volumique et une charge spécifique fixés, il existe en général deux hauteurs h' et h'' possibles pour l'écoulement, avec $h'' > h'$. La solution (h', v') est appelée *régime torrentiel* et la solution (h'', v'') *régime fluvial*. Justifier ces appellations. Indiquer la zone correspondant à chaque régime sur le tracé de $H(h)$.
- (c) À débit fixé, déterminer les valeurs h_c et v_c qui minimisent la charge spécifique, en fonction de Q et des données. La solution (h_c, v_c) correspond au *régime critique*. Exprimer la charge spécifique critique H_c en fonction de h_c . Pourquoi observe-t-on fréquemment des ondulations importantes de la surface libre au voisinage du régime critique ?
- (d) À charge spécifique fixée, tracer l'allure de $Q(h)$. Pour quelle valeur de h le débit est-il maximal ? Identifier les zones d'écoulement fluvial et torrentiel sur le graphe.

2. **Jaugeur Venturi**

Un débitmètre à jaugeur Venturi est constitué d'un *canal d'approche* à fond plat de largeur B constante et de longueur au moins égale à $10 \times B$, suivie d'un *canal de mesure* dans lequel le fluide traverse un convergent, un canal droit de largeur b , puis un divergent (voir figure 6). Deux sondes ultrasonores à la verticale des points I et J mesurent les hauteurs d'eau h_1 et h_2 . On note $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2(x)\vec{u}_x$ les vitesses du fluide respectivement en amont du Venturi et dans le canal de largeur b . Les vitesses sont supposées uniformes sur une section droite.

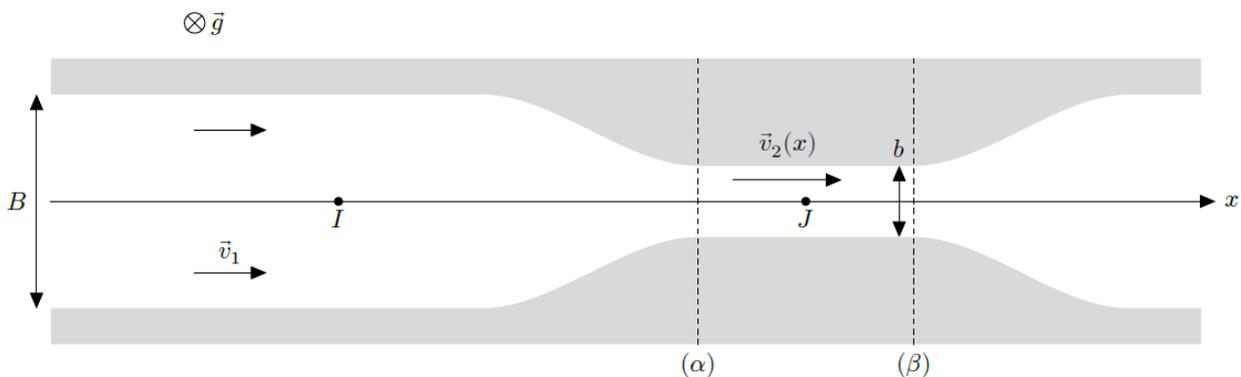


Figure 6 — Vue de dessus d'un jaugeur Venturi

Dans le cas d'un jaugeur Venturi *noyé*, le régime d'écoulement demeure fluvial. Dans le cas d'un jaugeur Venturi *dénoyé*, le régime d'écoulement, fluvial en amont, devient progressivement torrentiel entre les sections (α) et (β) , en passant par le régime critique, avant de brutalement redevenir fluvial dans le divergent du Venturi, avec présence d'un ressaut hydraulique. On pourra négliger la variation de la charge spécifique H lors du passage par le convergent.

- (a) Quel est le rôle du canal d'approche ?

- (b) Écrire le débit volumique Q en fonction de v_1, B, h_1 puis en fonction de $v_2(x), b, h_2(x)$.
- (c) *Cas du jaugeur noyé* — La vitesse $v_2(x)$ est alors uniforme dans tout le canal droit $v_2(x) = v_2$. Grâce aux résultats de la question 1.b, tracer sur le même graphe l'allure des fonctions qui relient la charge spécifique à la hauteur d'eau h , respectivement $H_B(h)$ dans le canal de largeur B et $H_b(h)$ dans le canal de largeur $b < B$.
Indiquer sur ce graphe la transformation $1 \rightarrow 2$ subie par le fluide au passage par le convergent. En déduire le signe de $(h_2 - h_1)$, puis justifier celui de $(v_2 - v_1)$. En supposant $v_2 \gg v_1$, exprimer le débit volumique Q en fonction de g, b, h_1 et h_2 .
- (d) *Cas du jaugeur dénoyé* — On suppose l'écoulement assez lent en amont, de sorte que l'on pourra considérer que $v_1 \ll \sqrt{2gh_1}$. En s'appuyant notamment sur les résultats de la question 1.c, montrer que l'existence d'un régime critique en un point du canal de largeur b permet de relier Q uniquement à la hauteur d'eau en amont par la relation

$$Q \simeq 0,544\sqrt{b}h_1^{3/2}$$

On vérifiera que la relation exacte trouvée correspond bien à la relation approchée donnée par l'énoncé. Dimensionner le jaugeur Venturi en calculant la valeur numérique de b pour $h_1 = 50$ cm et $Q = 1000$ m³.h⁻¹. La norme ISO4359 précise que les largeurs b utilisées doivent rester supérieures à 10 cm, quel effet risquerait de fausser la mesure sinon ?

- (e) Quel avantage y a-t-il à utiliser un jaugeur dénoyé plutôt qu'un jaugeur noyé ?

Données numériques et constantes physiques :

- Masse volumique de l'eau liquide : 10³ kg.m⁻³.
- Viscosité de l'eau liquide : 1,7 · 10⁻³ Pa.s.

Quelques ordres de grandeurs :

- Valeur critique du nombre de Reynolds : 2300.
- Débit maximal d'une canalisation domestique : 5 m³/h.
- Débit usuel d'une canalisation d'eau domestique : 200 L/h.

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \Delta A_z \vec{e}_z$$

$$\Delta f(r, \theta, z, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$

Deuxième partie

Écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère

On considère un fluide newtonien visqueux de viscosité η , incompressible et de masse volumique μ .

Données numériques :

- Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
- Masse volumique de l'air : $\mu = 1,29 \text{ kg.m}^{-3}$
- Viscosité de l'air : $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$
- Masse volumique de l'huile de ricin : $\mu' = 965 \text{ kg.m}^{-3}$
- Viscosité de l'huile de ricin : $\eta' = 1,00 \text{ Pl}$
- Masse volumique du verre : $\rho = 2,50 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Formulaire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v})) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

En coordonnées sphériques : $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

I Préliminaires

1. On s'intéresse, dans ce fluide, à un écoulement unidirectionnel de la forme $\vec{v}(M, t) = v(y, t) \vec{e}_x$; donner l'expression de la force de viscosité exercée par la particule de fluide P_1 sur la particule de fluide P_2 (figure 1), leur surface de contact étant notée S .
2. En déduire que l'on peut définir une force volumique de cisaillement, dont on donnera l'expression dans le cas du champ de vitesse considéré ici. On admettra par la suite que cette force volumique se généralise à tout écoulement incompressible sous la forme $\eta \Delta \vec{v}$.
3. En l'absence de force volumique extérieure, établir l'équation locale de la dynamique du fluide.

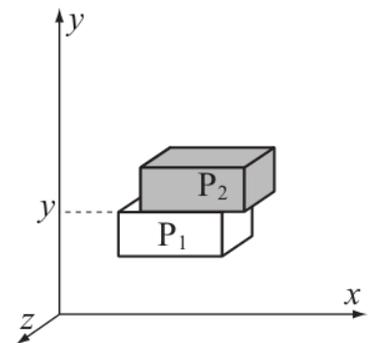


FIGURE 1 – Contact entre deux particules de fluide

II Écoulement autour d'une sphère

On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère de rayon R en l'absence de toute force extérieure. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Oz (définitions figure 2), O étant le centre de la sphère.

On se place dans le référentiel de la sphère et on suppose que, loin de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme, de vitesse $\vec{v} = V_0 \vec{e}_z$ et de pression P_0 .

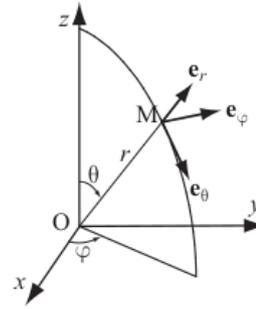


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques et base locale

1. Bâtir, à partir des grandeurs caractéristiques du fluide μ , η et V_0 , une grandeur D_0 homogène à une distance.
2. Exprimer le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement étudié en fonction de $D = 2R$ (considérée comme la distance caractéristique de l'écoulement) et de D_0 .
3. Le fluide considéré est de l'air de vitesse $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Calculer le nombre de Reynolds pour une sphère de rayon $R = 0,50 \text{ cm}$, puis pour une sphère de rayon $0,50 \mu\text{m}$. Comment peut-on qualifier l'écoulement dans les deux cas ? Dessiner sommairement l'allure des lignes de courant correspondantes.
4. Justifier que la force résultante \vec{F} , appelée force de traînée, correspondant aux actions sur la sphère du fluide en mouvement, est de la forme $\vec{F} = F \vec{e}_z$.
5. Justifier que le coefficient de traînée de la sphère, dont l'expression est donnée ci-dessous, ne dépend que du nombre de Reynolds pour un fluide fixé :

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2} \mu V_0^2 \pi R^2}$$

6. Commenter la courbe (Annexe 1 en fin de sujet, à rendre avec la copie) donnant l'évolution du coefficient de traînée C_x pour une sphère en fonction du nombre de Reynolds. Placer en particulier les points correspondant aux applications numériques de la question II.1 si cela est possible.
7. Dans le cas d'une chute libre d'une sphère de rayon $R = 0,50 \text{ cm}$, quelle expression approximative de la force de frottement de l'air peut-on utiliser ?

III Établissement de la formule de Stokes

Toujours dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère, avec les notations de la partie précédente, on se place maintenant en régime permanent et on suppose la vitesse suffisamment faible pour négliger l'accélération convective.

1. Quelles sont alors les conditions imposées sur le champ des vitesses par :
 - (a) l'incompressibilité de l'écoulement,
 - (b) la présence de la sphère,
 - (c) la forme du champ dans les régions éloignées de la sphère,
 - (d) l'équation locale de la dynamique.

On donne le champ des vitesses suivant :

$$\vec{v} = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{e}_\theta$$

et le résultat :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})) = -\frac{3V_0 R}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

2. Vérifier que ce champ satisfait les conditions a) à c) de la question III.1.
3. L'écoulement est-il rotationnel ? irrotationnel ? laminaire ? turbulent ? potentiel ? stationnaire ?
4. En utilisant l'équation locale de la dynamique linéarisée, déterminer le champ de pression en tout point de l'écoulement.
5. Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.
6. On admet que la force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de la sphère est donnée par :

$$d\vec{F}_{cis} = -\frac{3\eta V_0 R \sin^2 \theta}{2} d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

Justifier cette expression par comparaison à l'étude de la question I.1 et calculer la résultante des forces de cisaillement exercées sur la sphère.

7. En déduire que la force de traînée exercée sur la sphère est donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{F} = 6\pi\eta R V_0 \vec{e}_z$$

et que ce résultat est compatible avec la courbe de l'annexe 1 donnant le coefficient de traînée.

8. Application : on observe la chute libre dans l'huile de ricin d'une bille de verre de rayon R ; déterminer la condition sur R pour laquelle l'expérience permet de mesurer la viscosité de l'huile et proposer un protocole.

Annexe 1, à rendre avec la copie, NOM :

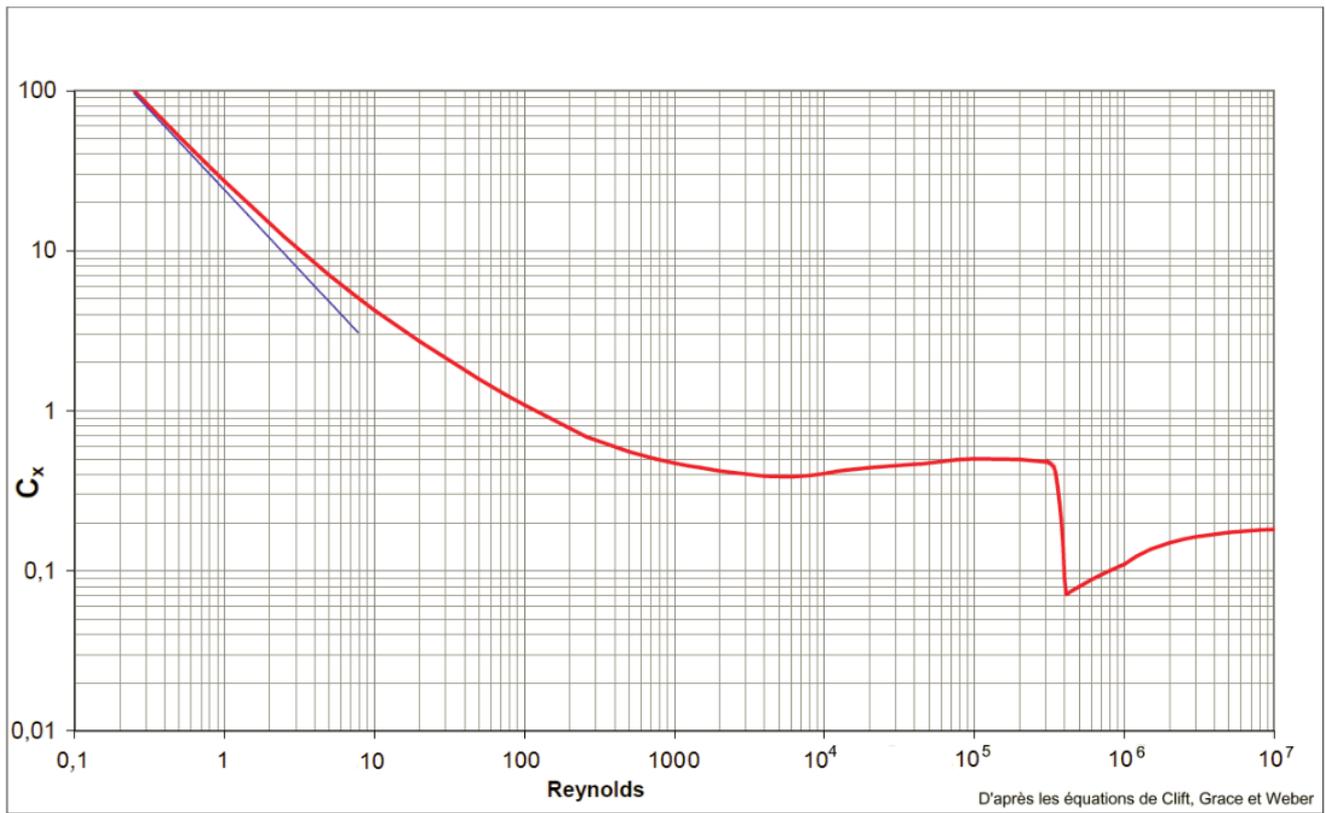


FIGURE 5 – Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds relatif au diamètre