

Meilleure note : 19,0

Moyenne : 7,9

Médiane 8,6 :

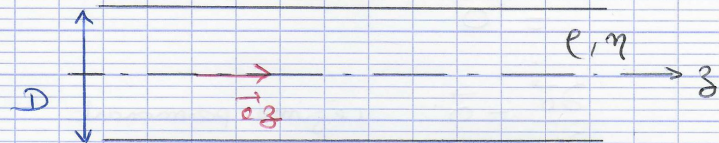
Écart-type : 3,0

Première partie

## Écoulements d'eau

Extrait de CCP PSI 2012

### I Étude d'une canalisation domestique d'amenée d'eau



1 Régime permanent :  $\vec{u}$  ne dépend pas de  $t$

La conduite est invariante par toute rotation autour de son axe  $\Rightarrow \vec{u}$  ne dépend pas de  $\theta$   
 L'écoulement se fait selon la conduite  $\Rightarrow \vec{u}$  est dirigé par  $\vec{e}_z$ .

2 Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (régime permanent)

$$\text{div} \rho \vec{u} = \rho \text{div} \vec{u} = \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Donc  $\vec{u}$  ne dépend pas de  $z$ .

3 Equation de Navier Stokes

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right] = - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{u}$$



$$a) (\vec{v}(r) \cdot \vec{\text{grad}})(v(r) \vec{e}_3)$$

$$= v(r) \frac{\partial}{\partial z} (v(r) \vec{e}_3)$$

$$= \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{régime permanent}$$

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_3$$

$$\text{Navier Stokes} \quad \vec{0} = -\vec{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\text{Selon } \vec{e}_r \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad \underline{P \text{ ne dépend pas de } r}$$

$$\text{Selon } \vec{e}_\theta \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad \underline{P \text{ ne dépend pas de } \theta}$$

$$\text{Selon } \vec{e}_z \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = + \frac{dP}{dz}}$$

ne dépend pas de  $z \Rightarrow = K$ .

$$4) \text{ On a } \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta} r$$

$$\text{Soit } r \frac{dv}{dr} = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{K}{\eta} \frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$$v(r) = \frac{K}{\eta} \frac{r^2}{4} + A \ln r + B$$

$$\text{On } v(r) \text{ est finie} \Rightarrow A = 0$$

$$\text{De plus } v\left(\frac{D}{2}\right) = 0 = \frac{K}{\eta} \frac{D^2}{16} + B$$

$$\text{Soit } \boxed{v(r) = \frac{K}{4\eta} \left( r^2 - \frac{D^2}{4} \right)}$$

$$\underline{k < 0 \text{ pour } v > 0}$$

$$5) \quad Q_v = \text{débit volumique}$$

$$dQ_v = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$= v(r) dr r d\theta$$

$$Q_v = 2\pi \int_0^{D/2} v(r) r dr$$

$$= 2\pi \int_0^{D/2} \frac{K}{4\eta} \left( r^2 - \frac{D^2}{4} \right) r dr$$

$$= \frac{\pi K}{2\eta} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{D^2}{4} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_0^{D/2}$$

$$= \frac{\pi K}{8\eta} \left[ \frac{D^4}{24} - D^2 \cdot \frac{D^2}{8} \right]$$

$$\boxed{Q_v = -\frac{\pi k D^4}{8\eta \cdot 16}}$$

$$6) \quad \underline{\text{La vitesse est maximale pour } r=0}$$

$$v_0 = -\frac{k D^2}{16\eta}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{Q_v}{\frac{D^2}{4} \pi}}$$



7]  $Re$  est le rapport entre l'accélération convective fois  $\rho$  et les forces visqueuses de viscosité.

$$Re = \frac{UL}{\eta} \quad \text{avec } U = \frac{4Q_v}{\pi D^2}$$

$$L = D$$

$$Re = \frac{4Q_v D \rho}{\eta \pi D^2}$$

$$Re = 4 \rho \frac{Q_v}{\eta \pi D}$$

8] AN. On a  $Re_c = 2300$ .

$$Q_{v,max} = \frac{\eta \pi D Re_c}{4 \rho}$$

$$Q_{v,max} = 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$= 0,15 \text{ L s}^{-1}$$

$$U_{0,max} = 0,16 \text{ m s}^{-1}$$

## II Écoulement dans un canal, mesure de débit à l'aide d'un tube de Pitot

1] Au vue des lignes de courant (plus elles sont serrées, plus l'intensité de la vitesse est grande on a

$$v(J) > v(C) > v(A) > v(K)$$

2]  $U_A = 0,5 \text{ m s}^{-1}$

$$Q_v = L_1 h U_A$$

$$Q_v = 0,125 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique

$$Q_v = L_2 h U_c = \frac{2}{3} L_1 U_c h, \quad U_c = \frac{3}{2} U_A$$

$$U_c = 0,75 \text{ m s}^{-1}$$

3] Écoulement stationnaire incompressible d'un fluide parfait dans le champ de pesanteur.

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z + P = \text{cte le long d'une ligne de courant}$$

4] Le point M est un point d'arrêt  $U(M) = 0$

Bernoulli Entre le point loin et A.

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_A + P(A) = 0 + \rho g z_M + P(M)$$

Entre le point B loin et N

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_B + P(B) = \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g z_N + P(N)$$

$S_A = S_B = S_N$   
 $\Delta P = P(M) - P(N) = \frac{1}{2} \rho U^2$   
 d'où  $U = \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho}}$

5. Fluide dense de masse volumique  $\rho$  au repos.  
 D'après la loi de l'hydrostatique  
 $P(M) = P(N) + \rho g h$   
 $\Leftrightarrow \Delta P = \rho g h$

6. On en déduit  $U = \sqrt{\frac{2 \rho g h}{\rho}}$

7.  $Re = \frac{U_A \cdot \eta}{\eta}$   
 $Re = 1,4 \cdot 10^5$

### III Débitmètres pour eaux usées

Extrait de Centrale Supélec PC 2015

#### III.1 Déversoir à seuil mince en canal ouvert

1. (a) Le débit volumique étant le même en amont de la pelle et à l'abscisse de la pelle, on a

$$v_1 h = \int_H^h v_2(z) dz < v_{2,max} (H - h)$$

On en déduit que

$$v_{2,max} > \frac{h}{H-h} v_1 \text{ or } H-h \ll h \text{ donc } \gg v_1$$

- (b) En supposant l'écoulement irrotationnel et stationnaire, l'équation d'Euler se réduit à

$$\rho \left( \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \right) = - \text{grad } (P + \rho g z)$$

La somme  $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z$  est donc uniforme; en écrivant sa valeur aux points  $M_1$  et  $M_2$ , on obtient

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g (h - H) = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2(z) + \rho g z$$

soit

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(h - z)$$

ce qui conduit à

$$v_2 = \sqrt{2g(h - z)}$$

en négligeant  $v_1^2$ ; notons que ce résultat n'est manifestement pas correct pour  $z \simeq h$ .

2. Le débit volumique est le flux de  $\vec{v}_2$  à travers la section de fluide au-dessus de la pelle, soit

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{h-H} \sqrt{2g(h-z)} B dz \\
 &= B \sqrt{2g} \int_0^{h-H} u^{1/2} du \\
 &= B \sqrt{2g} \frac{2}{3} [u^{3/2}]_0^{h-H} \\
 &= \frac{2}{3} B \sqrt{2g} (h-H)^{3/2}
 \end{aligned}$$

On obtient le résultat de l'énoncé en posant

$$A = \frac{2}{3} B \sqrt{2g}$$

3. L'onde parcourt la distance  $2(h_s - h)$ ; la durée  $\Delta t$  d'un aller-retour est donc telle que

$$2(h_s - h) = c\Delta t \text{ soit } h = h_s - \frac{c\Delta t}{2}$$

La célérité du son dépendant de la température, il faut connaître  $T$  pour déterminer  $h$ .

### III.2 Jaugeur Venturi en canal ouvert

1. (a) Nous avons montré que, pour un écoulement irrotationnel et stationnaire, la somme  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$  est uniforme; soit  $P_1$  sa valeur. En un point de la surface libre, la pression est  $P_0$  et  $z = h(x)$ , donc

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2(x) + \rho g h(x) = P_0 + \rho g H(x)$$

On en déduit que

$$H(x) = \frac{P_1 - P_0}{2g}$$

La charge spécifique est donc uniforme.

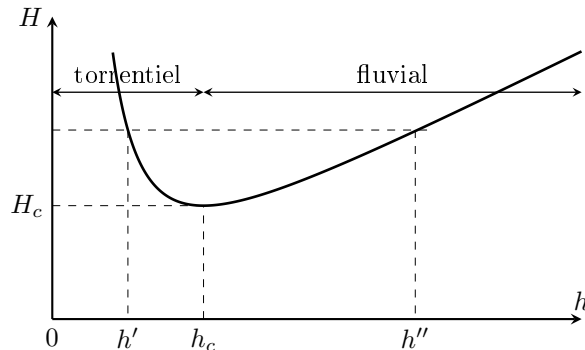
- (b) Le débit a pour expression

$$Q = v(x)h(x)B$$

On en déduit l'expression de la charge :

$$H = h(x) + \frac{Q^2}{2gBh^2(x)}$$

Pour une valeur donnée de  $Q$ , la variation de la charge en fonction de la hauteur est représentée par la courbe ci-dessous



- (c) La valeur  $h_c$  de  $h$  séparant le régime torrentiel du régime fluvial est celle qui annule la dérivée  $\frac{dH}{dh}$ , soit

$$h_c = \left( \frac{Q^2}{gB^2} \right)^{1/3}$$

La vitesse correspondante est

$$v_c = \frac{Q}{Bh_c} = \left( \frac{gQ}{B} \right)^{1/3}$$

La charge spécifique correspondante est

$$H_c = h_c + \frac{v_c^2}{2g} = h_c + \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{gB^2} \right)^{1/3} = \frac{3}{2}h_c$$

Au voisinage du régime critique, la dérivée  $\frac{dH}{dh}$  est, en valeur absolue, très petite devant l'unité; il en résulte que  $\left| \frac{dh}{dH} \right| \gg 1$ . Ainsi, une petite variation de la charge provoque une grande variation de la hauteur de la surface libre.

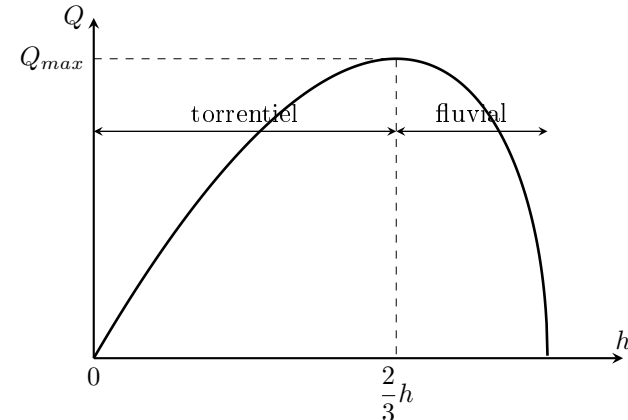
- (d) Le débit est

$$Q = Bhv \text{ avec } v = \sqrt{2g(H - h)}$$

soit

$$Q = Bhv\sqrt{2g(H - h)}$$

L'allure de la courbe est la suivante

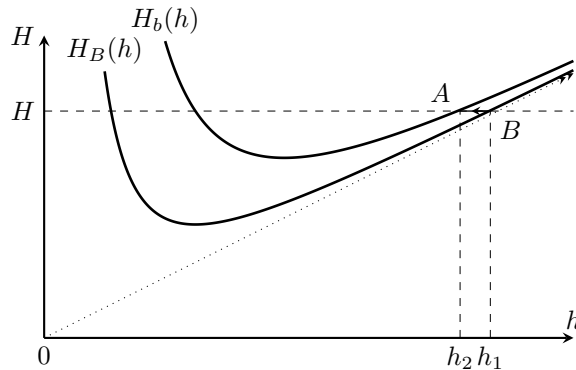


Le débit est maximal pour  $\frac{dQ}{dh} = 0$  soit pour  $h = \frac{2}{3}H$ ; on retrouve le même rapport  $\frac{h}{H}$  que dans le régime critique étudié à la question précédente. Le régime torrentiel correspond à  $h < \frac{2}{3}H$  et le régime fluvial correspond à  $h > \frac{2}{3}H$ .

2. (a) Le canal d'approche permet d'avoir un écoulement en régime fluvial et parfaitement calibré en amont du canal de mesure.  
 (b) Le débit volumique est le flux de la vitesse à travers une section du canal, soit

$$Q = Bv_1h_1 = bv_2(x)h_2(x)$$

- (c) *cas du jaugeur noyé* —



$h_1$  est la solution de l'équation  $H_B(h) = Q$  dans le domaine fluvial et  $h_2$  est la solution de l'équation  $H_b(h) = Q$  dans le domaine fluvial.

Dans le convergent, la transformation est représentée par le segment  $AB$  où  $A$  a pour coordonnées  $(h_1, H)$  et  $B$  a pour coordonnées  $(h_2, H)$ .

Dans ce cas, on a  $h_2 - h_1 < 0$ ; la conservation de la charge s'écrit

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \text{ soit } v_2^2 - v_1^2 = 2g(h_1 - h_2)$$

On en déduit que  $v_2 > v_1$ ; dans l'approximation  $v_2 \gg v_1$ , la vitesse  $v_2$  est

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

On en déduit le débit volumique

$$Q = bh_2v_2 = bh_2\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

- (d) *cas du jaugeur dénoyé* — Il y a passage au régime critique dans le canal de mesure; la charge y est donc égale à

$$H_c = \frac{3}{2} \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

La charge en amont est

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \simeq h_1$$

En supposant qu'il y a conservation de la charge dans le convergent, on en déduit que

$$h_1 = \frac{3}{2} \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

soit

$$Q = b\sqrt{\frac{8}{27}gh_1^3}$$

Numériquement, on vérifie que

$$\sqrt{\frac{8}{27}} \simeq 0,544$$

ce qui conduit à un résultat en accord avec l'énoncé. Pour  $h_1 = 50$  cm et  $Q = 1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 0,278 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , on obtient  $b = 0,46$  m.

Si  $b$  est trop petit, le nombre de Reynolds n'est plus suffisamment grand pour que les effets de la viscosité restent négligeables.

- (e) Un jaugeur noyé nécessite la mesure de  $h_2 - h_1$ , mesure délicate car les courbes sont très près de leur asymptote. En revanche, un jaugeur dénoyé ne nécessite que la mesure de  $h_1$ .



## Deuxième partie

Écoulement d'un fluide visqueux  
autour d'une sphèreI - Préliminaires

1.  $\vec{v}(M, t) = v(y, t) \vec{e}_x$

$$\vec{F}_{\text{vis}} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x \cdot S$$

$1 \rightarrow 2$

2.  $\Sigma = \text{particule } P_2$

En y  $\vec{F}_{\text{vis}}(y) = -\eta \frac{\partial v(y)}{\partial y} S \vec{e}_x$

En y+dy  $\vec{F}_{\text{vis}}(y+dy) = +\eta \frac{\partial v(y+dy)}{\partial y} S \vec{e}_x$

$$\vec{F}_{\text{vis tot}} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (y) \underbrace{dy S \vec{e}_x}_{dV}$$

$$\vec{f}_v = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

$$\vec{f}_{\text{vis}} = \eta \Delta \vec{v}$$

3.  $\Sigma = \text{particule de fluide}$

Réf. référentiel galiléen

Bilan des forces

$$\begin{aligned} \text{forces pressantes} & \vec{f}_p = -\text{grad } P \\ \text{forces de cisaillement} & \vec{f}_{\text{vis}} = \eta \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

Loi de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{v}$$

II - Écoulement autour d'une sphère

1. On veut  $D_0 = \rho^\alpha \eta^\beta v_0^\gamma$

avec  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$

$[v_0] = \text{LT}^{-1}$

$$[\eta] = \frac{[\text{force}]}{L[\text{tension}]} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{L}^2\text{T}^{-1}} = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$$

D'où

$0 = \alpha + \beta$

$1 = -3\alpha - \beta + \gamma$

$0 = -\beta - \gamma$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \beta &= -\alpha \\ \gamma &= -\beta = +\alpha \end{aligned}$$

$1 = -3\alpha + \alpha + \alpha = -\alpha$

$\alpha = -1 ; \gamma = -1 ; \beta = 1.$

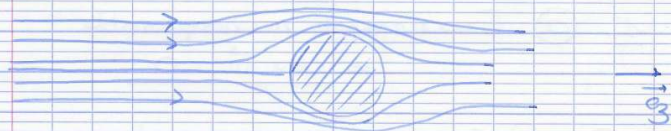
$$D_0 = \frac{\eta}{\rho v_0}$$



2] On a  $Re = \frac{\rho L U}{\eta}$   
 $= \rho \frac{D V_0}{\eta}$   
 $Re = \frac{D}{D_0}$

3]  $Re_1 = 7,2 \cdot 10^3$  pour  $R = 0,50 \text{ cm}$ .  
 Écoulement turbulent.  
 $Re_2 = 7,2 \cdot 10^{-1}$  pour  $R = 0,50 \text{ } \mu\text{m}$ .

L'écoulement est laminaire



4] Situation invariante par rotation autour de l'axe  $Oz \Rightarrow \vec{F}$  selon  $\vec{e}_3$

5]  $C_x = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 \pi R^2}$

$[C_x] = \frac{[\text{force}]}{ML^{-3} L^2 T^{-2} L^2} = \frac{MLT^{-2}}{\pi L^1 T^{-2}} = 1$

$C_x$  est sans dimension.

$C_x$  ne dépend que d'un nombre sans dimension  $Re$ .

6] Pour  $Re < 1$   $C_x$  décroît linéairement avec  $Re$  (pente -1 en échelle log-log)

Pour  $Re \in [700 - 3 \cdot 10^5]$   $C_x$  ne dépend pas de  $Re$   $C_x = 0,5$ .

7] On a  $\vec{F} \approx 0,4 \times \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e}_3$

$\vec{F} = 0,2 \rho \pi R^2 V_0^2 \vec{e}_3$  forme quadratique.

### III. Etablissement de la formule de Stokes

1. a) Écoulement incompressible  
 $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

b) Présence de la sphère fixe ds le référentiel d'étude  
 $\vec{v}(R, \theta, \varphi) = \vec{0}$   
 Condition d'adhérence

c) Dans les régions éloignées  
 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \vec{v}(r, \theta, \varphi) = V_0 \vec{e}_3$

d)  $\vec{0} = -\text{grad } P + \eta \Delta \vec{u}$



$$\begin{aligned}
 2 \text{ a) } \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (2 \sin \theta v_\theta) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( V_0 \cos \theta \left( r^2 - \frac{3}{2} R r + \frac{R^3}{2r} \right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( V_0 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \right) \\
 &= V_0 \cos \theta \left[ \frac{2}{r} - \frac{3R}{2r^2} - \frac{R^3}{2r^4} - \frac{2}{r} + \frac{3R}{2r^2} + \frac{R^3}{2r^4} \right] = 0 \quad \text{OK.}
 \end{aligned}$$

b) Sur la sphère  $\vec{v}(R, \theta; \varphi) = \dots = \vec{0}$  OK.

c)  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{v}(r, \theta; \varphi) = V_0 \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$   
 $= V_0 \vec{e}_3$  OK.

3)  $\operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$  car  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$

Régulier  
Laminaire  
Stokesien

4) On a  $\operatorname{grad} P = \eta \Delta \vec{v}$   
 $= -\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$

$$\operatorname{grad} P = + \frac{3V_0 R \eta}{2r^3} \left( 2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \right)$$

Soit  $\vec{e}_\theta$  :  $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta \frac{3V_0 R}{2r^3} 2 \cos \theta$

$$P(r, \theta) = - \frac{3}{2} \eta \frac{V_0 R}{r^2} \cos \theta + f(\theta)$$

Soit  $\vec{e}_\theta$  :  $\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 3 \eta \frac{V_0 R}{2r^3} \sin \theta$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \eta \frac{V_0 R}{r^2} \sin \theta$$

$$P(r, \theta) = - \frac{3}{2} \eta \frac{V_0 R}{r^2} \cos \theta + A$$

$\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r, \theta) = P_0 = A$

$$P(r, \theta) = - \frac{3}{2} \eta \frac{V_0 R}{r^2} \cos \theta + P_0$$

5)  $\vec{F}_p = \oint_{2\pi} -P d\vec{S} = \underbrace{\oint_{2\pi} P_0 d\vec{S}}_{=0} + \oint_{2\pi} - \frac{3}{2} \eta \frac{RV_0}{r^2} d\vec{S}$   
 $= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} + \frac{3}{2} \eta \frac{RV_0}{r^2} \cos \theta \, r d\theta \, r \sin \theta d\varphi \, \vec{e}_r$

$$\begin{aligned}
 F_{p3} &= \vec{F}_p \cdot \vec{e}_3 \\
 &= \frac{3}{2} \eta \frac{RV_0}{R^2} R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= 3\pi \eta RV_0 \frac{2}{3} = 2\pi \eta RV_0.
 \end{aligned}$$

15

$$\vec{F}_p = 2\pi \eta RV_0 \vec{e}_3$$



$$6. \quad d\vec{F}_{\text{vis}} = -3\eta \frac{V_0 R \sin^2 \theta}{2} d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

$$S = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$v_\theta(R, \theta, \varphi) = -V_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = -V_0 \sin \theta \left( \frac{3}{4R} + \frac{3}{4R} \right)$$

$$= -V_0 \sin \theta \frac{3}{2} R.$$

$$d\vec{F}_{\text{vis}} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r}(R, \theta, \varphi) S \vec{e}_\theta \quad \text{ok.}$$

$$7. \quad \vec{F}_{\text{vis}} = \oint d\vec{F}_{\text{vis}}$$

$$= -\frac{3}{2} \eta V_0 R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

$$\vec{F}_{\text{vis}} \cdot \vec{e}_3 = \frac{3}{2} \eta V_0 R 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= 2\eta V_0 R 2\pi.$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{vis}} = 4\pi \eta R V_0 \vec{e}_3}$$

$$7. \quad \vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{vis}}$$

$$\vec{F} = 6\pi \eta R V_0 \vec{e}_3 \quad \text{Stokes}$$

Annexe 1. Droite de pente -1.

$$\log C_x = -\log Re + \text{cte}$$

Pour  $C_x = 9.5$   $Re = 50 \rightarrow \text{cte} = 1/4$

$$C_x = \frac{25}{Re} \quad (\text{ou } 24)$$

$$\text{Soit } F = \frac{1}{2} C_x \rho V_0^2 \pi R^2$$

$$\text{et } C_x = \frac{25}{Re} = \frac{25}{2R V_0 \rho}$$

$$F = \frac{25}{4} \cdot \frac{\rho V_0^2 \pi R^2}{2 V_0 \rho} ?$$

$$= \frac{25}{4} \eta \pi R V_0$$

$$\approx 6\pi \eta R V_0 \quad \text{ok.}$$

8. Chute libre d'une sphère de rayon  $R = 0,5 \text{ cm}$

Bilan des forces

- la poids  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$

- la poussée d'Archimède  $\vec{\pi}_A = -\rho' V \vec{g}$

- la force de traînée

$$\vec{F} = -6\pi \eta' R \vec{v} \quad \text{pour } Re \ll 1$$

Loi de la quantité de mouvement

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{\pi}_A$$

Selon  $\vec{e}_3$   $m \frac{dv}{dt} = -6\pi \eta' R v + (\rho V - \rho' V) g$

$\vec{e}_3$  ↓

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi \eta' R}{\rho \frac{4}{3} \pi R^3} v = \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) g$$

$$T = \frac{2 \rho R^2}{3 \eta'} \quad v_{\text{lim}} = T \left( 1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) g$$



On veut  $Re < 1$

Soit  $\frac{\rho' 2R \omega_{lim}}{\eta'} < 1$

$$\frac{\rho' 2R}{\eta'} \cdot \frac{2e R^2}{9 \eta'} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) g < 1$$

$$R < \sqrt[3]{\frac{9 \eta'^2}{4 \rho' (e - \rho') g}}$$

$R < 5,4 \text{ mm}$