Meilleure note : 19,0

Moyenne : 7,9

Médiane 8,6 :

Écart-type : 3,0

I Une étude dynamique de la couche limite

I.1 Préliminaire

1. La force de viscosité exercée, au niveau de la surface élémentaire d'aire dS et de normale $\overrightarrow{u_y}$, par la portion de fluide d'abscisses supérieures à y sur la portion de fluide d'abscisses inférieures à y est

$$d\overrightarrow{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS\overrightarrow{u_x}$$

où η se mesure en pascal.seconde. On dit que cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement. Cela diffère d'un transfert convectif par le fait que le transfert s'effectue dans une direction différente de la direction de la vitesse des particules de fluide. Le brassage moléculaire qui est à l'origine de cette diffusion est dû à l'agitation thermique.

2. La résultante des forces de viscosité agissant sur l'élément de volume $d\tau$ défini par les intervalles $(x, x+dx), (y, y+dy), (z, z+dz)$ est la somme de la force de viscosité sur sa frontière d'ordonnée y et de la force de viscosité sur sa frontière d'ordonnée $y+dy$, soit

$$d\overrightarrow{F}_{\text{visc}} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right) dS\overrightarrow{u_x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \overrightarrow{u_x}$$

3. a) Une particule de fluide de volume $d\tau$ a une masse $\mu d\tau$; le théorème de la résultante cinétique appliqué à cette particule de fluide donne

$$\mu d\tau \overrightarrow{a} = \Sigma d\overrightarrow{F}$$

où

$$\overrightarrow{a} = \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$$

représente l'accélération et $\Sigma d\overrightarrow{F}$ représente la somme des forces appliqués, soit

- le poids $d\overrightarrow{P} = \mu d\tau \overrightarrow{g}$
- la somme des forces pressantes $d\overrightarrow{F}_{\text{press}}$; la pression est indépendante de x par hypothèse ; elle est également indépendante de z car le système est invariant par translation selon $\overrightarrow{u_z}$. Les forces pressantes qui ne se compensent pas sont celles qui s'exercent sur les frontières d'ordonnées y et $y+dy$ de la particule de fluide, soit $d\overrightarrow{F}_{\text{press}} = -dx\, dz\, (p(y,t) - p(y+dy,t))\, \overrightarrow{u_y} = -d\tau \dfrac{\partial p}{\partial y} \overrightarrow{u_y}$

— la somme des forces de viscosité $d\overrightarrow{F}_{\text{visc}} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \overrightarrow{u_x}$

On en déduit
$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \mu \overrightarrow{g} - \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\overrightarrow{u_x}$$
C'est ce que donne l'équation de Navier-Stokes dans ce cas particulier.
b) En projetant cette équation sur $\overrightarrow{u_x}$, on obtient
$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
qui est un cas particulier de l'équation de diffusion générale
$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nu \Delta s$$
avec un coefficient de diffusion $\nu = \dfrac{\eta}{\mu}$. ν se mesure en m^2.s^{-1}.

4. Le phénomène de diffusion est irréversible car le transfert de quantité de mouvement s'effectue des régions de quantité de mouvement importante vers les régions de quantité de mouvement plus faible, faisant ainsi évoluer vers une homogénéisation. Cela apparaît dans l'équation de diffusion par le fait que cette équation n'est pas invariante par le changement $t \to -t$.
En revanche, l'équation de d'Alembert
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \Delta s$$
équation aux dérivées partielles régissant les phénomènes de propagation, est invariante par le changement $t \to -t$. Elle décrit des phénomènes réversibles.

5. En ordre de grandeur, $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} \approx \dfrac{v_x}{\tau}$ et $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \dfrac{v_x}{L_y^2}$. On a donc
$$\nu = \frac{L_y^2}{\tau}$$

I.2 Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

1. L'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite s'écit, en exprimant que, lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 (à partir de l'extrémité de la plaque), le phénomène diffusif perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U :
$$\nu \simeq \frac{\delta^2(x_0)}{x_0/U} \text{ soit } \delta \simeq \sqrt{\frac{\nu x_0}{U}}$$

2. Si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement, le nombre de Reynolds est
$$Re_{x_0} = \frac{\mu x_0 U}{Mh} = \frac{x_0 U}{\nu}$$
.

3. En reportant l'expression de ν dans le nombre de Reynolds, on obtient
$$Re_{x_0} = \frac{x_0 U}{\dfrac{\delta^2(x_0)}{x_0/U}} = \frac{x_0^2}{\delta^2(x_0)} \text{ soit } \frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}$$

4. La notion de couche limite a un sens si $\delta(x_0) \ll x_0$, soit si $Re_{x_0} \gg 1$.

I.3 Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

1. a) Dans l'écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{u_x}$, l'accélération d'une particule de fluide est nulle. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à
$$\overrightarrow{0} = \mu \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \eta \Delta \overrightarrow{v}$$
soit, en projection
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x(y)$$
$$0 = -\mu g - \frac{\partial p}{\partial y}$$
La première équation montre que $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de x ; calculons la dérivée de $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ par rapport à y. D'après le théorème de Schwarz, on a
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu g) = 0$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ est aussi indépendant de y. C'est donc une constante K. On a donc

$$v_x''(y) = \frac{K}{\eta}$$

soit, en intégrant une première fois :

$$v_x'(y) = \frac{K}{\eta} y + K_1$$

puis, en intégrant une seconde fois :

$$v_x(y) = \frac{K}{2\eta} y^2 + K_1 y + K_2$$

On obtient donc un profil des vitesses parabolique. On détermine les deux constantes d'intégration en exprimant que $v_x\left(y = \pm\dfrac{d}{2}\right) = 0$, ce qui donne

$$\begin{cases} \dfrac{K}{8\eta}d^2 + K_1\dfrac{d}{2} + K_2 = 0 \\ \dfrac{K}{8\eta}d^2 - K_1\dfrac{d}{2} + K_2 = 0 \end{cases} \quad \text{doù} \quad \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = -\dfrac{Kd^2}{8\eta} \end{cases}$$

et finalement

$$v_x(y) = \frac{K}{8\eta}(4y^2 - d^2)$$

b) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$. En intégrant $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ entre x et $x + L$, on obtient

$$\Delta p = -KL$$

Le débit volumique à travers une section de largeur h selon Oz est

$$\begin{aligned} D_V &= \int_{\text{section}} \vec{v} \cdot \vec{u_x} dS \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} v_x(y) h dy \\ &= -\frac{\Delta p h}{8\eta L} \int_{-d/2}^{d/2} (4y^2 - d^2) dy \\ &= -\frac{\Delta p h}{8\eta L} \left[4\frac{y^3}{3} - d^2 y\right]_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{\Delta p h d^3}{12\eta L} \end{aligned}$$

La relation entre Δp et D_V suggère une analogie avec la loi d'Ohm, la différence de pression étant l'analogue de la tension et le débit volumique l'analogue de l'intensité ; la résistance hydraulique est

$$R_H = \frac{\Delta p}{D_V} = \frac{12\eta L}{hd^3}$$

c) Si, en maintenant Δp, on divise d par 2, le débit est divisé par 8.
Le débit total à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L est $2 \times \dfrac{D_V}{8} = \dfrac{D_V}{4}$.
La résistance électrique est inversement proportionnelle à la section ; la résistance hydraulique décroît plus fortement avec la section.

2. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u_x}$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz, distantes de d. Avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse, la quantité de mouvement doit diffuser sur une distance de l'ordre de d pendant un temps de l'ordre de $\dfrac{x_1}{U}$ donc

$$\nu \simeq \frac{d^2}{x_1/U} = \frac{d^2 U}{x_1}$$

On peut exprimer le rapport x_1/d sous la forme

$$\frac{x_1}{d} = \frac{dU}{\nu}$$

C'est le nombre de Reynolds si l'on choisit d pour dimension caractéristique de l'écoulement.

I.4 Équation du mouvement dans la couche limite

1. L'incompressibilité s'exprime par l'équation

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

2. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\mu\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \eta\Delta\vec{v}$$

soit, en projection

$$\begin{cases} \mu\left(v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\Delta v_x \\ \mu\left(v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\mu g-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\eta\Delta v_y \end{cases}$$

3. **Raisonnement sur les ordres de grandeur**

a) La condition d'incompressibilité donne, en ordre de grandeur

$$\frac{v_x}{x_0}\simeq\frac{v_y}{\delta(x_0)}$$

On en déduit que

$$\frac{v_x}{v_y}\simeq\frac{x_0}{\delta(x_0)}=\sqrt{Re_{x_0}}\gg 1$$

donc

$$v_y\ll v_x$$

b) Toujours en ordre de grandeur, on a

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\simeq\frac{v_x}{\delta^2(x_0)}\gg\frac{v_x}{x_0^2}\simeq\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\simeq\frac{v_y}{\delta^2(x_0)}\gg\frac{v_y}{x_0^2}\simeq\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

c) Toujours en ordre de grandeur, on a

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\simeq\frac{v_x^2}{x_0}$$

et

$$v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\simeq\frac{\delta(x_0)}{x_0}v_x\times\frac{v_x}{\delta(x_0)}=\frac{v_x^2}{x_0}$$

On obtient bien le même ordre de grandeur.
Au bord extérieur de la couche limite, où v_x est de l'ordre de U, donc

$$\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\simeq\frac{\nu U}{\delta^2(x_0)}\simeq\nu U\frac{U}{\nu x_0}=\frac{U^2}{x_0}$$

ce qui est du même ordre que les deux termes précédents.
d) On peut réécrire les équations du mouvement sous la forme simplifiée

$$\begin{cases} \mu\left(v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \mu\left(v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right)=-\mu g-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\eta\Delta\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{cases}$$

On admet, conformément à l'énoncé, que l'on peut ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur $\overrightarrow{u_y}$. La seconde équation se réduit à

$$\frac{\partial p}{\partial y}\simeq-\mu g$$

4. Hors de la couche limite, l'écoulement correspond à une situation statique dans un référentiel galiléen en translation à la vitesse $U\overrightarrow{u_x}$ par rapport au référentiel du laboratoire. On a donc

$$\mu\overrightarrow{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$ n'a pas de composante selon $\overrightarrow{u_x}$. La pression ne dépend donc pas de x.
On en déduit que $\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$ également dans la couche limite.
La première équation se réduit alors à

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

I.5 Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite dans le cas d'une vitesse extérieure uniforme

Avec les variables sans dimension :

$$x'=\frac{x}{x_0},y'=\frac{y}{\delta(x_0)}=\sqrt{Re_{x_0}}\frac{y}{x_0},v'_x=\frac{v_x}{U},v'_y=\sqrt{Re_{x_0}}\frac{v_y}{U}$$

- Equation IV.1.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}&=\frac{U}{x_0}\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{U}{\delta(x_0)}\frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\\&=\frac{U}{x_0}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0 \qquad (V1)$$

- Equation IV.4.

$$\begin{aligned}
v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{U^2}{x_0} v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} \\
v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{U^2}{\delta(x_0)} \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}} v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} \\
&= \frac{U^2}{x_0} v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} \\
\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \nu \frac{U}{\delta^2(x_0)} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \\
&= \nu \frac{U}{\delta^2(x_0)} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \\
&= \nu R \frac{U}{x_0^2} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \\
&= \frac{U^2}{x_0} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}
\end{aligned}$$

soit

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} \qquad (V2)$$

I.6 Équation de Blasius pour un écoulement uniforme le long d'une plaque plane

$$\theta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}, v_x = U f(\theta) \text{ et } v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h(\theta)$$

1. Calculons les dérivées de θ par rapport à x et à y ; on obtient

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x^3}{U}}} = -\frac{\theta}{2x}$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} = \frac{\theta}{y}$$

On en déduit

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = U f'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{U\theta}{2x} f'(\theta)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_y}{\partial y} &= \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h'(\theta) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \\
&= \frac{U}{x} h'(\theta)
\end{aligned}$$

L'équation IV.1 s'écrit ainsi

$$-\frac{U\theta}{2x} f'(\theta) + \frac{U}{x} h'(\theta) = 0$$

soit

$$\theta f'(\theta) = 2h'(\theta)$$

2. On en déduit que

$$2h(\theta) - 2h(0) = \int_0^\theta \xi f'(\xi) d\xi$$

En intégrant par parties dans le second membre, on obtient

$$h(\theta) - h(0) = \frac{1}{2} \left(\theta f(\theta) - \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right)$$

3. Pour x donné non nul, θ tend vers 0 quand y tend vers 0, ce qui correspond au contact fluide-plaque. Dans un fluide visqueux newtonien, la vitesse est continue lorsqu'on passe du fluide à la paroi. On a donc $v_y(x, 0) = 0$ soit $h(0) = 0$.

4. Dérivons v_x par rapport à y :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = U f'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} f'(\theta)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} f''(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{U^2}{\nu x} f''(\theta)
\end{aligned}$$

La formule de la question IV.4 devient

$$-\frac{U^2\theta}{2x}f(\theta)f'(\theta)+\sqrt{\frac{\nu U}{x}}h(\theta)\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}f'(\theta)=\nu\frac{U^2}{\nu x}f''(\theta)$$

soit

$$-\frac{1}{2}f(\theta)f'(\theta)+h(\theta)f'(\theta)=f''(\theta)$$

soit, en explicitant $h(\theta)$:

$$f''(\theta)=-\frac{1}{2}f(\theta)f'(\theta)+\frac{1}{2}f'(\theta)\left(\theta f(\theta)-\int_0^\theta f(\xi)d\xi\right)$$

et, aorès réarrangement :

$$f''(\theta)=-\frac{1}{2}f'(\theta)\int_0^\theta f(\xi)d\xi \qquad \text{équation de Blasius}$$

I.7 Résolution approchée de l'équation de Blasius

1. Pour $\theta \gg 1$, on est hors de la couche limite et pour $\theta \ll 1$, on est pratiquement au contact de la plaque.

2. **Comportement de $f(\theta)$ à « faible » θ**
a) Au contact de la plaque, la vitesse doit s'annuler, donc $v_(x,0)=0$, ce qui impose que $f(0)=0$.
b) L'équation de Blasius montre que $f^{(2)}(0)=0$.
c) En dérivant l'équation de Blasius, on obtient

$$f^{(3)}(\theta)=-\frac{1}{2}f^{(2)}(\theta)\int_0^\theta f(\xi)d\xi-\frac{1}{2}f'(\theta)f(\theta)$$

On en déduit

$$f^{(3)}(0)=-\frac{1}{2}f'(0)f(0)=0$$

d) Pour les « faibles » valeurs de θ :

$$f(\theta)\simeq f(0)+\theta f'(0)+\frac{\theta^2}{2!}f^{(2)}(0)+\frac{\theta^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{\theta^4}{4!}f^{(4)}(0)+o(\theta^4)$$

Les dérivées seconde et troisième étant nulles en $\theta=0$, il reste

$$f(\theta)\simeq\theta f'(0)+b\theta^4+o(\theta^4)$$

e) En dérivant une nouvelle fois l'équation de Blasius, on obtient

$$f^{(4)}(\theta)=-\frac{1}{2}f^{(3)}(\theta)\int_0^\theta f(\xi)d\xi-f^{(2)}(\theta)f(\theta)-\frac{1}{2}f'^2(\theta)$$

On en déduit que

$$f^{(4)}(0)=-\frac{1}{2}f'^2(0)$$

soit

$$b=\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=-\frac{1}{48}f'^2(0)$$

3. **Comportement de $f(\theta)$ à « grand » θ**
a) Sachant que, hors de la couche limite, $\overrightarrow{v}=U\overrightarrow{u_x}$, on a

$$\lim_{\theta\to\infty}f(\theta)=\lim_{y\to\infty}\frac{v_x(x,y)}{U}=1$$

Soit θ_1 une valeur de θ telle que $f(\theta)\simeq 1$ pourr $\theta>\theta_1$.

$$\int_0^\theta f(\xi)d\xi\simeq\int_0^{\theta_1}f(\xi)d\xi+\int_{\theta_1}^\theta d\xi=\int_0^{\theta_1}f(\xi)d\xi+\theta-\theta_1=\theta+\text{Cte}$$

La constante peut être négligée si θ est suffisamment grand.
b) Pour les « grandes » valeurs de θ, l'équation de Blasius prend la forme approchée :

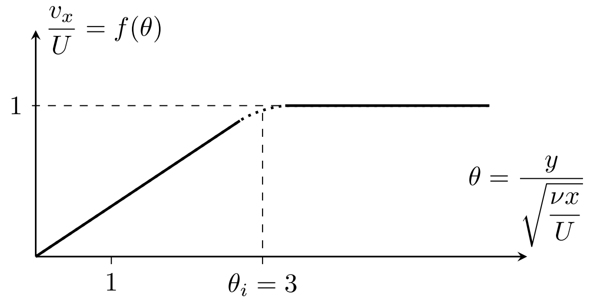
$$f''(\theta)=-\frac{1}{2}\theta f'(\theta)$$

c) En intégrant, on obtient

$$f'(\theta)=Ae^{-\frac{\theta^2}{4}}$$

La décroissance en θ est donc extrêmement rapide.
d) $f(\theta)$ passe donc brutalement de son expression aux faibles valeurs de θ à sa valeur asymptotique 1.

3. **Graphe de** $f(\theta)$



I.8 Force de frottement subie par la plaque plane dans l'écoulement uniforme

Le fluide situé du côté $y > 0$ exerce sur la portion $(x, x+dx)(z, z+dz)$ de la face supérieure de la plaque :

$$d^2\overrightarrow{F}_{\text{visc}} = \eta \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{y=0} dxdz\overrightarrow{u_x}$$

N.B. : le terme en $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$ s'explique par le fait que l'écoulement bidimensionnel dans la couche limite n'est pas un écoulement de cisaillement simple.

1. En ordre de grandeur, on a

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq \frac{v_x}{\delta(x_0)}$$

et

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \simeq \frac{v_y}{x_0} \simeq \frac{v_x}{\delta(x_0)}\left(\frac{\delta(x_0)}{x_0}\right)^2 \ll \frac{v_x}{\delta(x_0)}$$

Le terme en $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$ est donc négligeable La force surfacique sur la face supérieure de la plaque est

$$\frac{d^2\overrightarrow{F}_{\text{visc}}}{dx\,dz} \simeq \eta\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=0}\overrightarrow{u_x} = \eta\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}f'(0)\overrightarrow{u_x} = \mu\sqrt{\frac{\nu U^3}{x}}f'(0)\overrightarrow{u_x}$$

2. On en déduit la force de frottement par unité de longueur selon Oz, subie par une plaque de longueur L selon Ox, en tenant compte de ses deux faces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_\ell &= 2\mu\int_0^L\sqrt{\frac{\nu U^3}{x}}f'(0)dx\overrightarrow{u_x}\\ &= 2\mu f'(0)\sqrt{\nu U^3}\int_0^L x^{-1/2}dx\overrightarrow{u_x}\\ &= 4\mu f'(0)\sqrt{\nu LU^3}\overrightarrow{u_x}\\ &\simeq \frac{4}{3}\mu\sqrt{\nu LU^3}\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

On obtient une force proportionnelle à $U^{3/2}$; l'exposant est intermédiaire entre l'exposant 1 (domaine de Stokes) et l'exposant 2 (traînée sur une sphère pour des nombres de Reynolds moyens).

En introduisant le nombre de Reynolds $Re_L = \dfrac{LU}{\nu}$ construit à partir de la longueur caractéristique L, on peut écrire

$$\overrightarrow{F}_\ell = \frac{4}{3}\mu\sqrt{\frac{LU}{Re_L}LU^3}\overrightarrow{u_x} = \frac{4}{3}\mu U^2 L\frac{1}{\sqrt{Re_L}}\overrightarrow{u_x}$$

I.9 Approche de la force de traînée par des bilans dynamiques

1. On considère un volume de contrôle parallélépipédique : $0 \le x \le L, 0 \le y \le h, 0 \le z \le \ell$.

a) $\ell\int_0^L v_y(x,h)dx$ représente le débit volumique sortant par la frontière d'équation $y = h$.

L'écoulement étant incompressible, on peut effectuer un bilan de volume aussi bien qu'un bilan de masse. La somme algébrique des débits volumiques sortant du volume de contrôle est nulle. Le débit volumique sortant par la frontière d'équation $x = L$ est $\ell\int_0^h v_x(L,y)dy$, tandis que le débit volumique entrant est $\ell\int_0^h v_x(0,y)dy$.

On a ainsi

$$\int_0^h v_x(0,y)dy = \int_0^h v_x(L,y)dy + \int_0^L v_y(x,h)dx$$

soit

$$\int_0^L v_y(x,h)dx = \int_0^h (U - v_x(L,y))dy$$

b) Bilan de quantité de mouvement.

Système à la date t Système à la date $t+\Delta t$

On considère le système fermé constitué du fluide à l'intérieur du volume de contrôle et du fluide qui y entre pendant $[t, t+\Delta t]$. La quantité de mouvement de ce système selon $\overrightarrow{u_x}$ est :

— à l'instant t :

$$p_x(t) = p_{0x} + D_m\Delta t U = \mu\ell\Delta t \int_0^h U^2 dy$$

— à l'instant $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} p_x(t+\Delta t) = p_{0x} &+ \mu\ell\Delta t \int_0^h v_x^2(L,y)dy \\ &+ \mu\ell\Delta t \int_0^L v_y(x,h)v_x(x,h)dx \end{aligned}$$

Si h est suffisamment grand, la frontière $y = h$ est hors de la couche limite et $v_x(x,h) = U$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^L v_y(x,h)v_x(x,h)dx &\simeq U\int_0^L v_y(x,h)dx \\ &= U\int_0^h (U - v_x(L,y))dy \end{aligned}$$

Il reste donc

$$p_x(t+\Delta t) = p_{0x} + \mu\ell\Delta t \int_0^h (v_x^2(L,y) + U^2 - Uv_x(L,y))dy$$

La force exercée par la face supérieure de la plaque sur le fluide est

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_x(t+\Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} = \mu\ell \int_0^h (v_x^2(L,y) - Uv_x(L,y))dy$$

D'après le théorème des actions réciproques, la force linéique exercée par le fluide sur la face supérieure de la plaque est

$$\frac{T}{2} = -\mu\ell \int_0^h (v_x^2(L,y) - Uv_x(L,y))dy$$

où T est la force qui s'exerce sur l'ensemble de ses deux faces, par unité de longueur selon Oz. On obtient

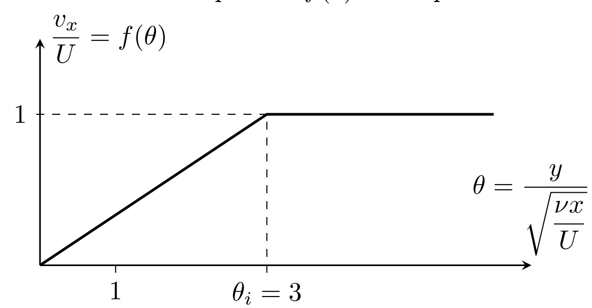
$$T = 2\mu U^2\ell \int_0^h \phi(y)dy$$

avec

$$\phi(y) = \frac{v_x(L,y)}{U} - \frac{v_x^2(L,y)}{U^2} = \left| \begin{array}{r} \dfrac{y}{e} - \dfrac{y^2}{e^2} \text{ pour } \; y < e \\ 0 \text{ pour } \; y > e \end{array} \right.$$

en posant $e = e(L)$.

2. a) La description choisie correspond à $f(\theta)$ affine par morceaux.



b) Calculons l'intégrale $\int\limits_0^h \phi(y)dy$; compte tenu du modèle, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_0^h \phi(y)dy &= \int\limits_0^e \left(\frac{y}{e} - \frac{y^2}{e^2}\right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2e} - \frac{y^3}{3e^2}\right]_0^e \\ &= \frac{1}{6}e \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu L}{U}}\end{aligned}$$

La force de traînée est ainsi

$$T = \mu U^2 \ell \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

A un coefficient multiplicatif près, on obtient le même résultat que dans la partie VIII.

c) Le coefficient de traînée est

$$C_x = \frac{1}{\mu U^2}\frac{T}{\ell L} = \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$