



Ondes EM dans le vide

Applications directes du cours

- 1 Déterminer la longueur d'onde λ , le nombre d'onde σ en cm^{-1} et la norme du vecteur d'onde k pour une station grande onde (de fréquence $\nu = 250$ kHz), une station FM (de fréquence $\nu = 100$ MHz) et pour un téléphone portable (de fréquence $\nu = 1,8$ GHz).
- 2 Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $R = 1,0$ mm d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm. La puissance moyenne émise est $P_e = 1,0$ mW. On donne : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m $^{-1}$. Calculer les amplitudes E_{max} du champ électrique et B_{max} du champ magnétique.
- 3 Déterminer la direction de propagation et l'état de polarisation des OPPM suivantes :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -E_0 \sin(\omega t + kz) \\ E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{E}_3 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -E_0 \sin(\omega t - ky + \frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}; \vec{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}.$$

- 4 Écrire les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (éventuellement complexes) :
 - d'une OEMPPM se propageant selon $\vec{u}_y$ et polarisée rectilignement selon Oz ,
 - d'une OEMPPM se propageant selon $\vec{u}_x$ et polarisée rectilignement à 45° de l'axe Oy ,
 - d'une OEMPPM polarisée rectilignement selon $\vec{u}_x$ et se propageant à 45° de l'axe Oy ,
 - d'une OEMPPM se propageant selon $-\vec{u}_x$ et polarisée circulairement droite,
 - d'une OEMPPM se propageant selon $\vec{u}_z$ et polarisée circulairement gauche.

Exercices

1. Caractéristiques corpusculaires

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon $R = 1,0$ mm d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm. La puissance moyenne émise est $P_e = 1,0$ mW. On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Déterminer le nombre de photons n par unité de volume dans le faisceau ainsi que N nombre de photons émis par seconde par le laser.

2. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres séparés par un espace vide. On note a (respectivement b) le rayon intérieur (respectivement extérieur) de l'espace vide.

Une onde électromagnétique se propage dans l'espace entre les armatures : on donne la forme des champs :

$$\vec{E}(r, z, t) = E(r) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = B(r) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_\theta$$

1. Déterminer $E(r)$. On notera E_0 le champ en $r = a$.
2. Déterminer $B(r)$.
3. Établir l'équation de propagation du champ et en déduire une relation entre ω et k . Comment s'appelle cette relation ?
4. Obtenir la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Données : On donne les opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

3. OPPM

Une OPPM se propage dans le plan yOz . On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire qui la dirige, il fait un angle θ avec l'axe Oy .

1. Donner l'expression de la phase $\phi(M, t)$ de cette onde sachant qu'elle est nulle en O à $t = 0$.
2. Donner l'équation cartésienne des surfaces d'onde, et montrer qu'elle s'écrit $y \cos \theta + z \sin \theta = \text{cste}$.
3. Calculer Δt , la durée nécessaire à l'onde pour se propager de l'origine O au point M . Faire apparaître la vitesse de phase.
4. On donne :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \sin \phi(M, t) \\ -E_0 \sin \theta \cos \phi(M, t) \\ E_0 \cos \theta \cos \phi(M, t) \end{pmatrix}$$

Quel est l'état de polarisation ?

5. Calculer $\vec{B}$ et donner les normes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
6. Calculer la densité d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting en tout point M .
7. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 10 \text{ mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10 \text{ W}$. En déduire E_0 .

4. OPPM et vecteur de Poynting

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage suivant l'axe Ox . Le champ électrique est polarisé suivant $\vec{u}_y$.

1. Établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.
2. Déterminer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
3. Déterminer le flux du champ magnétique à travers un cadre carré de côté $a = 1 \text{ m}$, formé de N spires et situé dans un plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$ pour une fréquence $f = 100 \text{ MHz}$.
4. Que se passe-t-il, pour le flux, si la fréquence vaut $f = 160 \text{ kHz}$?

5. Ondes planes stationnaires entre deux plans

On dispose dans le vide deux plans parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. On se propose d'étudier une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre ces deux plans : $\vec{E} = E_0 f(x) \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

1. En admettant que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur, écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide en $x = 0$ et $x = a$ par continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$.
2. Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.
3. Calculer le champ magnétique de cette onde.
4. Calculer l'énergie électrique $\mathcal{E}_e$ et l'énergie magnétique $\mathcal{E}_B$, emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe (Ox) , situé entre les deux plans et de section S .
Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

6. Étude d'une onde électromagnétique

On considère l'onde électromagnétique se propageant dans le vide dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{y}{c} \right) \vec{e}_x + E'_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{y}{c} \right) + \frac{2\pi}{3} \right] \vec{e}_z$$

1. Donner les caractéristiques de cette onde, en particulier sa polarisation.
2. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde.
3. (a) Calculer la puissance instantanée traversant une section S du plan $y = y_0$.
(b) Calculer la valeur moyenne de cette puissance pour : $S = 0,2 \text{ m}^2$; $E_0 = 80 \text{ V/m}$; $E'_0 = 60 \text{ V/m}$.

7. Lames demi-onde et quart d'onde

On considère une lame cristalline limitée par les plans d'équations $z = 0$ et $z = e$. Cette lame est biréfringente ; on note n_x l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ et n_y l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\vec{e}_y$. On suppose $n_y > n_x$.

1. On envoie sur cette lame une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement se propageant selon $\vec{e}_z$.
(a) Donner l'expression générale du champ électrique $\vec{E}(z, t)$ de cette onde dans la région $z < 0$.
(b) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(z, t)$ correspondant.
2. (a) Déterminer la polarisation de l'onde transmise dans la lame.
(b) Préciser ce que l'on appelle une lame demi-onde, une lame quart d'onde.
3. (a) On envoie sur une lame demi-onde une onde polarisée rectilignement dont la direction de polarisation fait un angle θ avec l'axe rapide de la lame. Caractériser la polarisation de l'onde émergente.
(b) On envoie sur une lame demi-onde une onde de polarisation circulaire droite. Déterminer la polarisation de l'onde émergente.
4. Montrer qu'une lame quart d'onde permet de produire une onde de polarisation circulaire droite à partir d'une onde incidente de polarisation rectiligne dont on précisera la direction de polarisation par rapport aux axes de la lame.

8. Laser : faisceau gaussien

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau d'un laser dont la section S est en pratique inférieure au mm^2 .

Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un laser en $z = 0$. Cette onde se propage selon la direction $\vec{u}_z$ et peut être mise sous la forme suivante, dans la zone $z \geq 0$:

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}(r, z) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{u}_x,$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\underline{E}(r, z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp \left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)} \right),$$

où E_0 et z_0 sont des constantes positives (z_0 est appelée distance de Rayleigh).

1. Montrer que le carré du module de $\underline{E}$ se met sous la forme $|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp \left(-\frac{2r^2}{w(z)^2} \right)$, avec $w(z) =$

$$w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}.$$

Déterminer la constante w_0 , nommée *waist* en fonction de z_0 et λ .

2. Montrer que $w(z)A(z) = w_0 E_0$.
3. Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.
4. Représenter le graphe du module $|\underline{E}(r, z)|$ du champ électrique en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z > 0$ fixée.
5. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'au waist w_0 ?
6. Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau laser a une forme de cône de sommet O et de demi-angle au sommet β , qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0 , puis en fonction de w_0 et λ .
7. Calculer β en degrés pour un laser YAG-Nd³⁺ possédant pour caractéristiques $w_0 = 0,50$ mm et $\lambda = 1,1$ μm , puis pour un laser CO₂ de même waist mais de longueur d'onde 10 fois plus grande. Commenter.
8. Que dire du comportement du faisceau laser pour $z \ll z_0$?