Mécanique du point et du solide

I Rapports

CCINP 2023 et 2024

Le réflexe chez la plupart des candidats est de commencer par écrire systématiquement une relation fondamentale de la dynamique. L'emploi d'un théorème énergétique permet, dans certains cas, d'aboutir bien plus rapidement à un résultat qu'avec l'utilisation de la deuxième loi de Newton (cas des problèmes à un degré de liberté par exemple). Cette possibilité doit être considérée par les candidats.
Les candidats rencontrent très souvent des difficultés pour exprimer correctement les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

Mines-ponts 2023

À l'instar de la thermodynamique, il est impératif de définir le système étudié. Il est également nécessaire de préciser le référentiel d'étude et les actions mécaniques en jeu. En particulier, la distinction entre référentiel galiléen et non-galiléen n'est pas toujours claire ce qui rend absconse l'utilisation des forces inertielles.
La vitesse de libération est souvent mal comprise et calculée par les candidats.

Mines-ponts 2024

Les confusions sur les notions de référentiels et de forces inertielles sont nombreuses. De plus, la représentation de ces dernières sur un schéma et une discussion qualitative dans les situations simples permettraient d'éviter des bévues sur les expressions.

Centrale-Supélec 2022

Les sujets de mécanique sont problématiques pour un grand nombre de candidats généralement en raison d'un manque de rigueur (vecteur/scalaire, schémas, définitions du système et du référentiel, dérivées, intégrales, conditions aux limites, bases de projections, représentations 3D ou en coupe...) et de méthode. Le simple calcul d'une accélération ou d'un moment cinétique prend parfois beaucoup de temps. Le moment d'une force est souvent incompris. Le théorème du moment cinétique a été très fréquemment maltraité : vectoriellement, il est posé sans justification ni point bien défini et le plus souvent sans légitimité ; en projection (ce qui suffit le plus souvent), son application est généralement très problématique. Le moment cinétique en un point n'est pas toujours colinéaire au vecteur rotation. Contrairement à ce que certains pensent, un théorème s'applique dans un cadre strict qu'il convient obligatoirement de préciser. Il vaut mieux éviter d'appeler PFD ou RFD le théorème de la résultante cinétique pour un solide (en rotation par exemple) car cela donne lieu à des confusions irrattrapables du style « accélération du solide ». Pour les mouvements à force centrale, l'exposé ne dépasse pas souvent l'exposé plutôt maitrisé des concepts de base. La mécanique en référentiel non galiléen a été souvent problématique par une réelle méconnaissance des points de cours.

Centrale-Supélec 2024

Les sujets de mécanique restent problématiques pour certains candidats le plus souvent à cause d'un manque de méthode et de rigueur (vecteur/scalaire, schémas, définitions du système et du référentiel, dérivées, intégrales, conditions aux limites, bases de projections, représentations 3D ou en coupe...). Le simple calcul d'une accélération ou d'un moment cinétique prend parfois beaucoup de temps. La notion de moment (de toute nature) demeure un concept délicat pour un certain nombre de candidats. Il faut absolument creuser ce point.

Redisons qu'il vaut mieux éviter d'appeler PFD ou RFD le théorème de la résultante cinétique TRC) pour un solide (en rotation par exemple) car cela donne lieu à des confusions irrattrapables du style « accélération du solide ». Dans la même veine : certains candidats donnent un « point d'application » au TRC...

L'obtention de la 3e loi de Képler doit être assez rapide.

Les théorèmes énergétiques posent parfois problème quant aux forces à prendre en compte.

II Questions de cours

- Notions de référentiel, galiléen, non galiléen ; illustrations.
- Théorème de Gauss gravitationnel.
- Théorème du moment cinétique. Application au pendule simple.
- États liés et de diffusion.
- Interaction gravitationnelle entre deux corps. Energie potentielle effective. Influence de l'énergie sur les trajectoires
- Lois de Kepler (démonstrations dans le cas circulaire) – Mines beos8555
- Vitesse sur orbite basse. Vitesse de libération.
- Caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- Solide en rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie, TMC et TEC.

III Exercices

1. Traversée d'une rivière – CCINP

Un jeune aventurier se balance accroché à une liane au-dessus d'un ruisseau. Il part avec un angle initial de 20^o et met 8 s à faire l'aller-retour.

1. Déterminer la longueur de la liane.
2. Déterminer sa vitesse au niveau du ruisseau.

2. Tir sur cible – CCINP

Une balle de fusil est tirée dans la direction du Nord avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_y}$. L'axe $\overrightarrow{e_x}$ est dirigé vers l'Est et $\overrightarrow{e_z}$ suivant la verticale ascendante. Une cible est placée à 100 m du tireur et $v_0 = 1000$ m.s^{-1}.

1. On néglige les frottements de l'air et la force de Coriolis. Déterminer la position de l'impact de la balle sur la cible.
2. Prévoir qualitativement l'effet de la rotation de la Terre sur le mouvement de la balle.
3. Écrire les équations du mouvement en prenant en compte la force de Coriolis. Calculer la valeur de la déviation vers l'Est de la balle.

3. Satellite – CCINP

On considère un satellite qui orbite autour de la Terre. Il suit une trajectoire elliptique de grand axe $2a$. Le rayon de la Terre est R. Au périgée, le satellite se trouve à l'altitude h de la Terre.
On rappelle que l'énergie mécanique pour un mouvement elliptique est celle du mouvement circulaire si on remplace R par a.

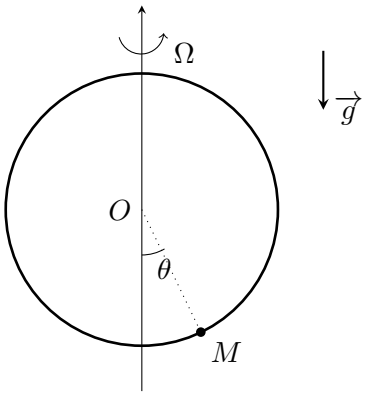
1. Déterminer l'altitude du satellite à l'apogée.
2. Trouver une expression de la période T en fonction de G, M, R et a.
3. Déterminer les vitesses du satellite à l'apogée et au périgée.
4. Trouver une condition sur la vitesse et la position du satellite pour le faire passer sur une trajectoire circulaire.

4. Pendule conique – CCINP

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical.
On impose $\omega = \omega_0$; déterminer la valeur θ_0 correspondant à un équilibre stable. À quelle condition sur ω la solution $\theta_0 \neq 0$ existe-t-elle ?

5. Anneau sur cerceau tournant – Centrale, Navale

Un anneau de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon R en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire Ω.

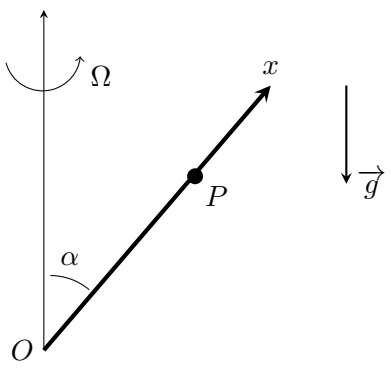


1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Discuter la stabilité et déterminer la période des petites oscillations autour des positions stables.

6. Tige tournante – CCINP, MT

Une tige faisant un angle α constant avec la verticale ascendante tourne autour de cette dernière à la vitesse angulaire constante Ω. Une perle P de masse m peut glisser sans frottement sur cette tige.

1. Trouver, dans le référentiel lié à la tige, la position d'équilibre x_{eq}.
2. On pose $x(t) = x_{eq} + X(t)$. Déterminer l'expression de $X(t)$.
3. Est-ce une position d'équilibre stable ou instable ?



7. Atome de Thomson – CCINP

On considère le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. On se place dans le référentiel d'un noyau d'atome d'hydrogène et on considère le repère cartésien associé dont l'origine O est le noyau. On étudie l'électron représenté par un point M de coordonnées (x, y, z). Ce dernier est soumis à une force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k\overrightarrow{OM}$ et à une force dissipative modélisée par une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_f} = -h\overrightarrow{v}$. De plus, on tient compte d'un champ électrique extérieur d'expression : $\overrightarrow{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

1. En supposant que le mouvement de l'électron n'est que selon $\overrightarrow{e_x}$, déterminer l'équation du mouvement. Faire apparaître la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q. Calculer les valeurs de ω_0 et Q.
2. On suppose que le régime permanent est atteint. $\underline{x}(t)$ est de la forme $\underline{x}(t) = \underline{X_m}\exp(j\omega t)$. Déterminer le module et l'argument de $\underline{X_m}$.
3. Déterminer la pulsation ω qui maximise le module de $\underline{X_m}$.
4. Le spectre du visible s'étendant du bleu (400 nm) au rouge (800 nm). Comparer les pulsations associées au bleu et au rouge à ω_0. On rappelle que $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, où λ est la longueur d'onde et c est la célérité de la lumière dans le vide.
5. En déduire une expression simplifiée du module de $\underline{X_m}$.
6. On définit la puissance rayonnée $\mathcal{P}_r = K|\ddot{x}|^2$ où K est une constante arbitraire. Calculer le rapport entre la puissance rayonnée par le bleu et celle rayonnée par le rouge.
7. Justifier pourquoi le ciel est bleu en l'absence de nuages.

Valeurs numériques :

— masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,
— charge d'un proton : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C,
— coefficient de frottement : $h = 9,1 \cdot 10^{-23}$ kg.s^{-1},
— raideur : $k = 3,6 \cdot 10^{2}$ kg.s^{-2}.

8. Bille dans bol – Mines

Dans tout le problème, on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe polaire Oz, dirigé suivant la verticale ascendante. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ $(g > 0)$.
On étudie le mouvement d'un solide, assimilé à un point matériel M de masse m.
Ce solide se meut sur la surface intérieure d'un paraboloïde de révolution d'axe Oz, d'équation $r^2 - az = 0$ $(a > 0)$. Le solide est soumis à la réaction du support ; on néglige tous les frottements.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que $C = f(r, \dot{\theta})$.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique sous la forme :

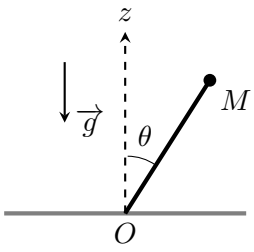
$$E_m = \frac{1}{2}\dot{r}^2 G(r) + E_{p,eff}(r).$$

   Faire une étude graphique appropriée. Commenter.
3. Quelle est la période propre d'oscillation autour de l'équilibre ?

9. Couple de rappel – CCINP

Au bout d'une tige de masse nulle fixée en O, de longueur ℓ, faisant un angle θ avec la verticale, on attache une masse m. La tige subit un moment de rappel $-C\theta$.

À quelle condition la tige, écartée de sa position d'équilibre vertical, y retourne-t-elle ? Trouver alors la période des petites oscillations.

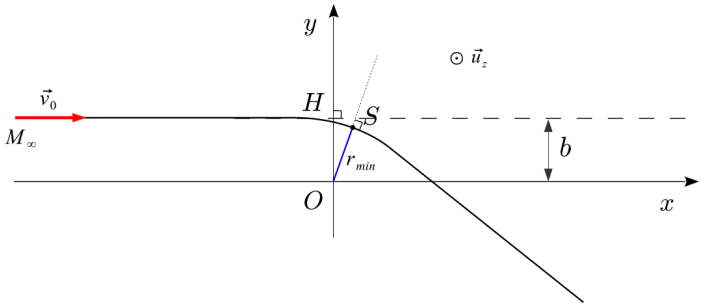


10. Satellite géostationnaire – CCINP

Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant $g_0 = 9,81$ m.s^{-2}, $R_T = 6400$ km et la durée d'un jour sidéral $T = 86100$ s.
Calculer l'énergie à fournir pour faire varier l'altitude de 50 km.

11. Météore – CCINP

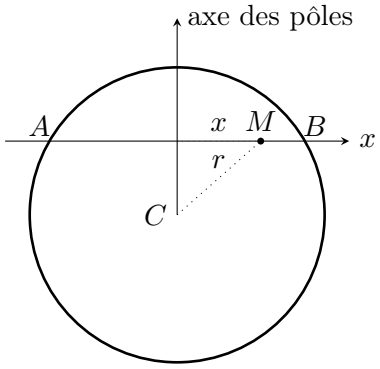
Un météore, assimilable à un point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive d'une distance $d = 100 \cdot 10^3$ km avec la vitesse $\overrightarrow{v}_0$ par rapport à la Terre (trajectoire rectiligne). Son paramètre d'impact est $OH = b$, où O correspond au centre de la Terre. On note S le point de la trajectoire le plus proche du centre de la Terre.



1. Quelles sont les deux grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ?
2. Soit $\overrightarrow{\sigma}_0$ le moment cinétique par rapport à O du point M.
   (a) Donner l'expression de $\overrightarrow{\sigma}_O$ lorsque M est à l'infini ($M = M_\infty$) en fonction de m, v_0, b et $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) On note v_S la norme de la vitesse de M lorsqu'il passe au plus près de la Terre ($M = S$). Donner l'expression de $\overrightarrow{\sigma}_O$ lorsque M est en S en fonction de m, v_S, r_{min} et $\overrightarrow{u_z}$.
3. En utilisant la conservation des grandeurs données au 1), exprimer la distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T, $\mathscr{G}$ constante de gravitation. À quelle condition le météore évitera-t-il l'impact avec la Terre ?
4. Dans le cas où $b > b_{min}$, déterminer l'angle de déviation φ du météorite.
5. On donne $v_0 = 11$ km.s^{-1}, $M = 5,98.10^{24}$ kg, $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, $R = 6400$ km. Calculer b_{min}. Calculer φ pour $b = 1,5.b_{min}$.

12. Train dans un tunnel – MT

Un train peut voyager dans un tunnel creuser à travers la Terre sans frottements et sans moteur. On considère la Terre homogène de masse M_T et de rayon R_T.



Données : $R_T = 6400$ km, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.

1. Déterminer le champ de gravitation dans tout l'espace, calculez-le à la surface de la Terre.
2. Le train peut-il aller de la ville A à la ville B ? En combien de temps ?

13. Planche lestée – CCINP

On considère deux planches identiques, de longueur L et de masse M. On ajoute sur l'une des deux planches une masse ponctuelle m au milieu de la planche. Les deux planches sont écartées d'un angle θ_0 par rapport à la verticale. On suppose que le contact des planches avec le sol reste fixe.
Quelle planche va toucher le sol en premier ?

On donne le moment d'inertie d'une planche de longueur L et de masse M par rapport à son "petit" bord : $J = \frac{1}{3}ML^2$.

Indication : montrer que la vitesse angulaire des planches a pour expression :

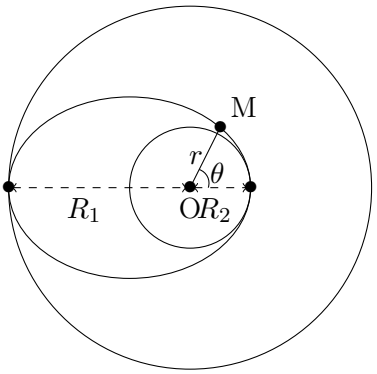
$$\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{MgL}{J}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

Inutile mais intéressant : pour $\theta_0 = 5^o$

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = 5,1$$

14. Orbite transfert – CCINP

Un satellite de masse m est en orbite circulaire de rayon R_1 autour de la Terre à la vitesse v_1. Le satellite rejoint l'orbite circulaire de rayon R_2 par une orbite elliptique, avec la vitesse initiale v_S. Enfin le satellite passe en orbite circulaire de rayon R_2 à la vitesse v_2. On suppose que les vitesses v_2 et v_S sont égales.



1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite elliptique et l'expression de la vitesse sur une orbite circulaire.

2. Trouver le facteur k qui relie v_S et v_1. L'expression de k dépendra de R_1et R_2.

   On introduit une force de frottement de la forme : $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.

3. Montrer que le moment cinétique par rapport à O s'écrit : $\overrightarrow{L}_O(t) = \overrightarrow{L}_O(t=0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

   À $t = 0$, le satellite se trouve sur l'orbite basse de rayon R_2. On suppose les frottements faibles et le mouvement quasi circulaire.

4. Grâce au théorème de l'énergie mécanique montrer que $r(t) = R_2 \exp\left(-\dfrac{t}{2\tau}\right)$

5. Exprimer la vitesse $v(t)$ du satellite puis son énergie mécanique en fonction du temps.

beos 8551