Endomorphismes orthogonaux

1) Définitions

E est un espace euclidien

Un endomorphisme u de E est une isométrie si et seulement si par définition il conserve la norme, c'est-à-dire : $\forall\ \vec{x} \in E \quad \| u(\vec{x}) \| = \| \vec{x} \|$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $L(E)$

On appelle matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{R}^n$ (plus exactement $M_{n,1}(\mathbb{R})$) est une isométrie.
On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

2) Caractérisations (elles remplacent donc toutes la définition, souvent avantageusement)

E est un espace euclidien de dimension n et $u \in L(E)$

$u \in O(E)$
$\Leftrightarrow$ u conserve le produit scalaire : $\forall\ x, y \in E \quad < u(x) \mid u(y) > = < x \mid y >$
((On dit de manière équivalente que u est un automorphisme orthogonal))
$\Leftrightarrow$ u envoie toute base orthonormale de E sur une base orthonormale.
$\Leftrightarrow$ Pour toute base orthonormale B , la matrice M de u dans B vérifie $M^T M = I_n$
$\Leftrightarrow$ Il existe une base orthonormale B où la matrice de u dans B vérifie ${}^t M\, M = I_n$
$\Leftrightarrow$ Il existe une base orthonormale B telle que $u(B)$ soit aussi une base orthonormale.
(*dans la pratique on choisit une base appropriée à l'exercice*)

A retenir : $O(n) = \{ M \in M_n(\mathbb{R})\ ,\ {}^t M\, M = I_n \}$

Preuve : selon le schéma $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (b)$
$(a) \Rightarrow (b)$ en reconstituant le produit scalaire à l'aide de la norme (polarisation)
$(a) \Leftarrow (b)$ en prenant $x = y$ dans le $\forall\ x, y$
$(a) \Rightarrow (c)$ en revenant à la définition $< e_i \mid e_j > \ = \ \delta_{i,j}$
$(c) \Rightarrow (d)$ avec la caractérisation matricielle des bases orthonormales (sens $\Rightarrow$).
$(d) \Rightarrow (e)$ si c'est vrai pour toutes, c'est en particulier vrai pour une
$(e) \Rightarrow (f)$ avec la caractérisation matricielle des bases orthonormales (sens $\Leftarrow$).
$(f) \Rightarrow (b)$ en notant $X = Coord_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{e}_i$, on remarque alors que $X = Coord_{u(B)}(u(\vec{x}))$ par linéarité de u , ce qui permet d'effectuer le calcul des normes matriciellement dans des bases appropriées.

Un résultat important apparu au cours de cette preuve :

Une famille $B' = (\vec{e}_1\ , \vec{e}_2\ , \dots , \vec{e}_n)$ est orthonormale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale B (*à choisir !*) est dans $O(n)$.

Ainsi, une matrice est orthogonale si et seulement si elle représente une matrice de passage entre deux bases orthonormales.

Preuve :

Je note $C_i = Coord_B(\vec{e}_i)$. Il suffit alors de remarquer que si $M = (C_1\ \ C_2\ \dots\ C_n)$ et que ${}^t M\, M = (\, a_{i,j}\,)_{1 \le i, j \le n}$ alors $a_{i,j} = {}^t C_i C_j$. Or $I_n = (\, \delta_{i,j}\,)_{1 \le i, j \le n}$.

3) Propriétés

- Si $M \in O(n)$ alors M est inversible et son inverse est ${}^tM$ et donc $M\,{}^tM = I_n$.
  Preuve : ce résultat est caractéristique de la situation générale suivante.
  Si f et g sont des endomorphismes de E tels que $f \circ g = id_E$ et que E est de dimension finie alors f et g sont inversibles : inverses l'un de l'autre.
  C'est dû au fait que g est injective (le prouver !) donc bijective puisque g est un endomorphisme. On peut donc composer à droite par l'inverse de g .
  On peut le retrouver dans sa version matricielle en évaluant le déterminant de $f \circ g$.
- $O(E)$ et $O(n)$ sont stables par composition et par inverse (bijection réciproque) et contiennent l'identité.
  On dit que ce sont des sous-groupes, respectivement de $O(E)$ et de $O(n)$
  Preuve : d'après la définition et grâce à la propriété précédente.
- Si $M \in O(n)$ alors $det\, M = \pm 1$. On a l'analogue pour les endomorphismes.
  Preuve : évaluer $det({}^tM\, M)$ sachant que $det({}^tM) = det\, M$

4) Rotations

a) groupe spécial orthogonal

Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est par définition l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 . On le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.

Propriétés : il est stable par produit et inverse
il contient la matrice identité.

b) définition de l'orientation.

E étant un espace vectoriel euclidien, on dit que deux bases B et B' ont la même orientation si et seulement si, par définition, $det_B(B') > 0$, dans le cas contraire, on remarque que $det_B(B') < 0$ car le déterminant est non nul.
Dans le cas particulier où les bases sont orthonormales on peut remarquer que les déterminants ne prennent que les valeurs 1 ou -1 .
On a défini ainsi une relation d'équivalence entre les bases
Preuve : $det_B(B) = 1$, $det_{B'}(B) = 1/det_B(B')$ et $det_B(B'') = det_B(B') \times det_{B'}(B'')$ permettent de contrôler les signes. La dernière égalité se trouve en considérant ces trois déterminants comme des déterminants de matrice de passage.

On remarque aussi que si B_1 et B_2 n'ont pas la même orientation, alors toute autre base B a soit la même orientation que B_1 soit la même que B_2 . Orienter E est faire le choix d'une des deux familles d'orientation (*c'est-à-dire choisir une des deux classes d'équivalence*), ou bien choisir l'une des deux bases B_1 ou B_2 comme base de référence : on dira qu'elle est directe ainsi que toutes les bases qui ont la même orientation, les autres étant jugées indirectes.
Lorsqu'un espace vectoriel possède une base canonique, l'orientation canonique consiste à choisir que la base canonique est directe.

La tentation est de croire qu'il y a toujours une orientation naturelle et que c'est en particulier le cas en physique. Il n'en est rien, pas même en physique : vous savez bien qu'une base d'un plan qu'on voit directe vue de dessus paraît indirecte vu de dessous. D'ailleurs c'est faire preuve de géocentrisme occidental que de penser que le pôle sud est en dessous du pôle nord : les habitants de l'hémisphère sud n'ont pas l'impression d'avoir la tête en bas. De façon générale, vous savez bien que pour calculer un flux à travers une surface, il faut d'abord choisir une orientation (décider dans quel sens le flux est sortant), que le choix n'est pas naturel si la surface n'est pas fermée, et qu'une fois que vous avez choisi un sens, les formules de la physique vous imposent l'orientation du contour de la surface. C'est oublier que les formules ont été ajustées : si la majorité des humains était gauchère, le bonhomme d'Ampère le serait aussi et pour que vos formules soient justes, on aurait choisi un autre sens d'orientation du courant électrique (celui qui aurait correspondu au sens physique de déplacement des électrons) et peut-être même qu'on aurait décrété que les électrons ont des charges positives : décréter les charges positives a été un choix arbitraire à une époque où on n'avait aucune idée de la nature réelle de l'électricité statique.

Caractérisation : deux bases orthonormales ont la même orientation si et seulement si leur matrice de passage est dans le groupe spécial orthogonal.

c) <u>Cas particulier de la dimension 2</u>

i) Une <u>rotation</u> r est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1.
Dans une base orthonormale, sa matrice est donc dans $SO(2)$.

ii) <u>Caractérisation de</u> $SO(2)$

<u>Propriété</u> : la <u>matrice d'une rotation</u> dans une base orthonormale , comme celle des changement de base orthonormales directes, est de la forme $Rot(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Preuve :

$C_1=Coord_{\vec{i},\vec{j}}(r(\vec{i}))$ est un vecteur du cercle unité, il est donc de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et puisque $(r(\vec{i}),r(\vec{j}))$ est une autre base orthonormale directe, $C_2=Coord_{\vec{i},\vec{j}}(r(\vec{j}))=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

Remarque : ainsi, étant donné une base orthonormale directe $(\vec{i},\vec{j})$ d'un plan euclidien orienté, pour tout vecteur normé $\vec{u}$ d'un plan euclidien orienté il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{i})=\vec{u}$
Autrement formulé : pour tout vecteur normé $\vec{u}$ il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormale directe. *Et on peut remarquer que* $C_2=Rot\left(\frac{\pi}{2}\right)C_1$: le vecteur $\vec{v}$ est obtenu à partir de $\vec{u}$ par une rotation d'angle droit.

iii) $Rot(\theta)\times Rot(\varphi)=Rot(\theta+\varphi)$. Ainsi les rotations commutent entre elles.

Une preuve : en diagonalisant sur $\mathbb{C}$ pour changer des formules d'addition de la trigonométrie.
Toutes ces matrices codiagonalisent car $Rot(\theta)=\cos(\theta)I_2+\sin(\theta)Rot\left(\frac{\pi}{2}\right)$

iv) <u>Angle d'une rotation d'un plan orienté</u>.

<u>Théorème</u> : soit r une rotation d'un plan euclidien orienté. Sa matrice dans une base orthonormale directe ne dépend pas de la base

<u>Définition</u> : si cette matrice est $Rot(\theta)$,on dit que θ est une <u>mesure de l'angle</u> de la rotation.
Remarque : sa matrice dans une base orthonormale indirecte est $Rot(-\theta)$.
Autrement formulé : si on change l'orientation du plan, l'angle de la rotation est changé en son opposé. Ainsi, le cosinus de l'angle ne change pas, normal puisque c'est $\frac{1}{2}Tr(r)$.

<u>Propriété</u> : si le vecteur normé $\vec{w}$ se déduit de $\vec{u}$ par une rotation d'angle α alors $\langle\vec{u}|\vec{w}\rangle=\cos(\alpha)$.
Rab : dans toute base orthonormale directe B $det_B(\vec{u},\vec{v})=\sin(\alpha)$. *C'est ce qui justifie que le déterminant calcule une aire en plus de préciser si les vecteurs forment une base directe ou indirecte.*
Remarque hors programme : on dit que le couple $(\vec{u},\vec{w})$ forme un angle (orienté) qu'on note $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$ pour le discerner des ses mesures (en radian)

5) Autres isométries

On continue d'appeler rotations les isométries de déterminant 1. On dit aussi "isométries directes", par opposition aux autres qui sont indirectes. Les anciens programmes montraient le lien avec les rotations autour d'un axe en dimension 3, mais vous ne les pratiquerez plus qu'en physique. Par contre on n'a plus d'interprétation géométrique simple en dimension > 3 et en particulier il n'y a plus d'angle de rotation.

a) <u>symétries orthogonales</u> : ce sont les symétries associées à une somme directe orthogonale.

Preuves que ce sont des endomorphismes orthogonaux :

- *en dimension finie* : on choisit une base orthonormale dans chacun des espaces de la somme directe dont la réunion est donc une base orthonormale de l'espace et la matrice est donc de la forme $BlocDiag(I_p, -I_q) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -I_q \end{pmatrix}$ un élément visible de $O(p+q)$. On voit d'ailleurs qu'il envoie une base orthonormale sur une base orthonormale puisque ce ne sont pas les changements de signe qui altèrent cette propriété.
- *en dimension quelconque* : on perd les caractérisations matricielles mais les autres valent toujours. Par exemple, on constate avec Pythagore que de telles symétries conservent effectivement la norme car $\|\vec{x}\|^2 + \|-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

b) <u>réflexions</u> qui sont par définition des symétries orthogonales par rapport à un hyperplan (donc une droite en dimension 2 et un plan en dimension 3), c'est-à-dire dont la direction de symétrie est une droite.

Si on considère la matrice dans une base adaptée comme ci-dessus (avec $q = 1$), on voit que <u>leur déterminant vaut -1</u>. On dit que les réflexions sont *indirectes*, car elles changent l'orientation des bases.

Si $E = H \oplus D$ une somme directe orthogonale où $D = \mathbb{R}\cdot\vec{n}$ avec $\vec{n}$ un vecteur de norme 1 et r_H la réflexion par rapport à $H = \vec{n}^{\perp}$, j'exprime cette réflexion à l'aide des projections orthogonales : $r_H = p_H - p_D$ (*faire un dessin !*) Comme les projecteurs sont associés à une somme directe, on a aussi : $p_H + p_D = id_E$ et je peux simplifier le calcul : $r_H = 2p_H - id_E = id_E - 2p_D$. Or on sait exprimer les projecteurs orthogonaux à l'aide d'une base orthonormale de l'espace sur lequel on projette. Il convient donc de choisir la projection sur l'espace qui a la plus petite dimension pour avoir moins de calculs.

Cela donne la formule qu'il faut savoir retrouver : $r_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{n} \mid \vec{x})\cdot\vec{n}$

Remarque : si on choisit une base $(\vec{u})$ non normale de D,

on peut prendre $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\vec{x}$ et cela donne $r_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{(\vec{u} \mid \vec{x})}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$

Exemple numérique : E est un plan euclidien muni d'une base orthonormale $B = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}$. Par cette formule, on trouve

$$Mat_B(r_H) = \begin{pmatrix} 1-2\cos^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & 1-2\sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

c) <u>isométries indirectes d'un plan euclidien</u>

Elles ont une matrice de la forme $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, comme matrice de changement de base indirecte, ce sont alors des réflexions (ou symétries axiales).

Preuve de la forme :

on a déjà fait la recherche des bases $(\vec{u}, \vec{v})$ orthonormales directes. Il suffit de remarquer qu'elle est indirecte si et seulement si $(\vec{u}, -\vec{v})$ est indirecte. *A retenir !*

Preuves que c'est une réflexion :

1ère preuve : en récupérant les derniers calculs du b)

je pose $\alpha = \dfrac{\pi+\theta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 2\alpha - \pi$ et je reconnais le calcul déjà fait. Pour avoir un vecteur directeur de la droite H des vecteurs invariants, il suffit d'enlever $\dfrac{\pi}{2}$ à l'angle α : on a une symétrie orthogonale par rapport à la droite $Vect\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cdot \vec{j} \right)$

Vérification : je pose $\vec{d} = \cos\dfrac{\theta}{2} \cdot \vec{i} + \sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \vec{j}$ et calcule matriciellement son image : les formules d'addition de la trigonométrie me donnent que ce vecteur est invariant comme prévu.

Remarque :

Si je change θ en $\theta + 2\pi$, je ne change pas la matrice, mais je change le vecteur $\vec{u}$ en son opposé, ce qui ne change pas, fort heureusement, la droite des vecteurs invariants.

C'est normal, car les angles entre deux droites ne se mesurent pas à 2π *près mais à* π *près, puisque la mesure dépend de l'orientation choisie dans chacune des deux droites, c'est-à-dire du vecteur normé qu'on choisit comme base de chacune des droites et que* $\left(\widehat{\vec{x}\,,\,-\vec{y}}\right) = \left(\widehat{\vec{x}\,,\,\vec{y}}\right) + \varpi$

où $\varpi = \left(\widehat{\vec{i}\,,\,-\vec{i}}\right)$ représente l'angle plat (égal à son opposé).

2ème preuve : à l'aide du cours sur la réduction.

Le polynôme caractéristique de la matrice est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Elle diagonalise donc sous la forme $Diag(1\,,\,-1)$: c'est bien une symétrie axiale, il ne reste qu'à voir que les deux droites propres sont orthogonales, ce que garantit le cours sur les endomorphismes symétriques que nous verrons plus tard. *Difficile de faire plus efficace* !

Remarque : $I_2 - S \underset{(trigo)}{=} 2 \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) L \\ -\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) L \end{pmatrix}$ avec le vecteur ligne $L = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$,

donc $Ker(I_2 - S) = Ker\, L$. On retrouve bien $Vect(\vec{d})$ comme ci-dessus.

Remarque : la composée de deux isométries indirectes redonne une isométrie directe (= rotation), car $-1 \times (-1) = 1$ (calcul de déterminant). Ce que le complément (exercice qui n'est pas un résultat officiel du cours) ci-dessous donne.

Pour la physique (optique géométrique) :

On calcule matriciellement la composée de deux réflexions planes

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \underset{(formules\, d'addition\, de\, la\, trigo)}{=} Rot(\varphi - \theta)$$

, ce qui donne

$r_\Delta \circ r_D = rot\left(2\left(\widehat{D\,,\,\Delta}\right)\right)$ (je distingue en notation la matrice "Rot" de l'endomorphisme "rot").

En effet, puisque l'angle entre D et l'axe des abscisses est $\dfrac{\theta}{2}$ et que de même celui entre Δ et $\mathbb{R} \cdot \vec{i}$ est $\dfrac{\varphi}{2}$, celui entre D et Δ est $\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$.

On avait vu qu'un angle de droite se mesure à π *près, le double d'un angle de droites se mesure donc à* 2π *près, ce qui correspond bien à une mesure d'angle de rotation.*

Le prof de physique vous a probablement montré géométriquement comment un rayon lumineux réfléchi deux fois est dévié d'un angle double de celui qu'il y a entre les deux miroirs.

Frime : c'était une démonstration de mon prof de maths de première scientifique, un résultat qu'on utilisait la même année avec le prof de physique dans le cours d'optique géométrique.

6) Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

C'est juste une synthèse des résultats antérieurs : ce sont soit des rotations, soit des réflexions.

L'occasion aussi de rappeler ce que vous savez en considérant $\mathbb{C}$ comme un plan euclidien réel où $(1, i)$ est une base orthonormale de ce plan : la rotation d'angle θ correspond à l'application $(z \to e^{i\theta} z)$. Sa matrice dans la base $(1, i)$ est effectivement $Rot(\theta)$.

Vous savez aussi que $(z \to \bar{z})$ réalise la réflexion par rapport à la droite des réels.

Remarque : cette application n'est pas $\mathbb{C}-$linéaire contrairement aux rotations qui sont des $\mathbb{C}-$homothéties de la droite complexe.

7) Un outil pour la réduction.

Comme vous pouvez le remarquer, les rotations du plan qui ne sont pas des homothéties (*celles pour lesquelles* $\sin\theta \neq 0$) *ne sont pas diagonalisables, pas même trigonalisables car leur polynôme caractéristique* $X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$ *est irréductible donc non scindé* (*il est d'ailleurs évident géométriquement qu'il n'y a pas de vecteur propre*). *Les isométries vectorielles ont souvent des facteurs de ce type dans leur polynôme caractéristique, un obstacle à la trigonalisation, mais elles ont très souvent des sous-espaces stables pertinents qui permettent de simplifier leur étude.*

Propriété :
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par l'isométrie u, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi stable par u.
Preuve : la conservation du produit scalaire préserve en particulier l'orthogonalité.

Remarque : l'endomorphisme induit par u à F est un élément de $O(F)$.

Exemple d'application, un exercice à considérer comme classique des concours plus prestigieux : *il correspond à donner la classification complète des isométries de* $O(3)$ *, utile par exemple en cristallographie.*

On suppose que $dim(E) = 3$ et on considère $u \in O(E)$.

a) Montrer que ses valeurs propres, s'il y en a, sont dans $\{1, -1\}$ (*très classique*)

b) En déduire que si son polynôme caractéristique est scindé, alors u est une symétrie orthogonale. *Indication* : prendre un vecteur propre et appliquer le propriété précédente à la droite qu'il engendre.

c) Montrer que si le polynôme caractéristique n'est pas scindé, alors il admet exactement une valeur propre de multiplicité 1. On la note λ dans la suite de l'exercice, on note D la droite propre associée et P son plan orthogonal.

d) Montrer que l'endomorphisme induit par u à ce plan P est une rotation et en déduire que la valeur propre est en fait $det(u)$.

A finir pour les curieux :

e) Synthèse = réduction canonique des isométries en dimension 3 : montrer

$$\forall M \in O(3), \exists \lambda \in \{-1, 1\}, \exists \theta \in \mathbb{R}, \exists P \in SO(3) \quad P^{-1} M P = {}^t P M P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Rot(\theta)}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Les cas particuliers où M représente une symétrie correspondent à $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, $\lambda = det(M)$ permet de discerner les isométries directes des indirectes.