PC* **Topologie**

des espaces vectoriels de dimension finie

Avec ses racines grecques qui signifient "étude de lieux", la topologie a été créée pour résoudre des problèmes où l'analyse et la géométrie étaient intimement liées. Son créateur : Poincaré avait proposé la construction latine "Analysis situ" qui signifie exactement la même chose. Les motivations de Poincaré étaient de résoudre des problèmes très difficiles, certains étant liés avec les théories les plus modernes de la physique. Il s'est avéré que c'est le cadre dans lequel on redonne une vision géométrique que l'analyse a perdue quand, au prix de la rigueur absolue, on a tout basé sur des définitions en $\forall \ldots \exists \ldots$ *. Le programme MP approfondit plus ce lien entre l'analyse et la "géométrie" des ensembles associés. Il permet de démontrer et de mieux comprendre certains résultats que les élèves de PC doivent admettre.*

Pour le programme PC, son intérêt apparaît surtout quand on étudie des fonctions de plusieurs variables car elle donne le vocabulaire pour formuler les idées de base. L'essentiel est de connaître quelques définitions, d'en avoir des représentations géométriques et de savoir se ramener à K^n *par un choix approprié de base. Le choix de la norme peut aussi s'imposer pour simplifier un calcul.*

I Ouverts

1) Définition

On dit qu'une partie O d'un espace vectoriel normé E est ouverte si et seulement si :

$\forall\ x \in O \quad \exists\, r > 0 \quad B(x,r) \subset O$

Autrement formulé O est ouverte ssi tous ses points y sont intérieurs.

2) Exemples (faire des dessins !)

- l'ensemble vide et E
- si $E = \mathbb{R}$: les intervalles sont ouverts si et seulement si ce sont des intervalles ouverts, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de borne fermée.
- les boules ouvertes : *cela découle de l'inégalité triangulaire*
- les demi-plans ouverts d'un plan vectoriel : *c'est faisable en espace euclidien avec la distance à une droite, plus évident avec les boules ouvertes d'une norme sup associée à une base adaptée et on peut remarquer que ça découle aussi d'une propriété ultérieure.*

3) Propriétés

- Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte
  preuve :
  Soit $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ tel que les O_i soient ouverts
  Pour tout $x \in O$, il existe un indice j tel que $x \in O_j$
  et par ouverture d'un tel O_j , $\exists\, r > 0 \quad B(x,r) \subset O_j$, a fortiori $B(x,r) \subset O$.
- Une intersection <u>d'un nombre fini</u> d'ouverts est un ouvert.
  preuve :
  Soit $O = \bigcap_{1 \le i \le n} O_i$ tel que les O_i soient ouverts
  Pour tout $x \in O$, $x \in O_j$ pour tous les indices j , $1 \le j \le n$
  et par ouverture de ces O_j , $\exists\, r_j > 0 \quad B(x,r_j) \subset O_j$,
  Je pose alors $r = Min\{r_j\,,\ 1 \le j \le n\}$: non seulement r existe car on a un nombre fini de réels, mais en plus $r > 0$ et $\forall\ j \quad B(x,r) \subset B(x,r_j) \subset 0_j$, a fortiori $B(x,r) \subset O$
- *Propriété très pratique* :
  Soit f une application continue de E l'espace vectoriel ambiant dans $\mathbb{R}$, alors
  $O = f^{-1}(]0;+\infty[) = \{x \in E\,,\ f(x) > 0\}$ est un ouvert.

Attention à ne pas l'appliquer à une fonction qui n'est pas définie sur tout E . Par exemple l'inverse d'une fonction caractéristique rendrait toutes les parties ouvertes.

preuve :

Soit $x \in O$: on sait que $f(y) > 0$ au voisinage de x puisque $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$, (preuve en prenant $\epsilon = f(x)/2$ dans la définition de la limite), ce qui correspond exactement à formuler que O est un voisinage de x.

A retenir :

Graphiquement, les ouverts sont les ensembles non aplatis qui ne contiennent pas le bord qui les délimite.
Un ensemble défini par des inégalités strictes a toutes les chances d'être ouvert (revoir tous les exemples !) et on peut en général le démontrer avec les trois propriétés précédentes.
Un autre moyen très commode est de s'intéresser à son complémentaire, pour lequel on a une caractérisation séquentielle : c'est l'objet du paragraphe suivant !

4) Intérieur

Définition : on appelle intérieur d'une partie A l'ensemble de tous ses points intérieur. On le note $\mathring{A}$

Propriété : c'est un ouvert inclus dans A.

Exemples : boules, intervalles, ouverts, $\mathbb{Q}$

II Fermés d'un espace de dimension finie

1) Définition

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel normé E est fermée si et seulement si c'est le complémentaire d'une partie ouverte

2) Exemples (faire des dessins !)

- l'ensemble vide et E
- si $E = \mathbb{R}$: les intervalles sont des partie fermées si et seulement si ce sont des intervalles fermés, c'est-à-dire qu'ils contiennent leurs bornes finies.
- les boules fermées : *cela découle de la seconde inégalité triangulaire.*
- les demi-plans fermés d'un plan vectoriel.

3) Propriétés

- Une intersection quelconque de fermés est fermée

  preuve :

  Elle découle de la formule $E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i)$, ce qui signifie que le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires.
- Une union d'un nombre fini de fermés est un fermé.

  preuve :

  Le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires.
- *Caractérisation séquentielle de la fermeture : elle remplace très avantageusement la définition !*

  Une partie F est fermée si et seulement si toute suite convergente dans E et à valeurs dans F est convergente dans F.

  Illustration : reprendre les exemples !

  preuve :

  Implication directe :

  Si F est fermé, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans F et que $x_n \to l \in E$ alors, *par l'absurde*, si $l \notin F$, c'est que $l \in E \setminus F$ un ouvert, donc $\exists r > 0 \quad B(l, r) \subset E \setminus F$.
  Je fixe un tel r et applique la définition de la limite :
  $\exists N \quad \forall n \geq N \quad \|x_n - l\| < r$ de sorte que pour ces n $\quad x_n \in B(l, r) \in E \setminus F$ et a fortiori $x_n \notin F$: une contradiction

Implication réciproque : par contraposition
Si $E \setminus F$ n'est pas ouvert : $\exists\, x \in E \setminus F \quad \forall\; r > 0 \quad B(x\,,r) \not\subset E \setminus F$ donc $\exists\; y_r \in F \cap B(x\,,r)$ et la suite $x_n = y_{1/n}$ fournit une suite à valeurs dans F convergeant vers l'élément x qui n'est pas dans F .

- *Propriété très pratique* :
  Soit f une application continue de E l'espace vectoriel ambiant dans $\mathbb{R}$, alors $F = f^{-1}([0\,;+\infty[) = \{x \in E, f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé et il en est de même de $Z = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, f(x) = 0\}$.

A retenir :
un ensemble défini par des inégalités larges (revoir les exemples !) a toutes les chances d'être fermé et on peut en général le démontrer avec les trois propriétés précédentes.
Graphiquement, les fermés sont les ensembles qui contiennent leur bord (on dit : "frontière").

4) Adhérence

Définition : l'adhérence d'une partie A est l'ensemble des points adhérents à A .

Propriété : c'est un fermé qui contient A .

Exemples : boules, intervalles, fermés, $\mathbb{Q}$

5) Frontière

Définition : la frontière d'une partie A est l'ensemble des points adhérents à A et à son complémentaire. C'est aussi l'adhérence de A privée de l'intérieur de A .

Propriété : c'est un fermé inclus dans A .

Exemples : boules, intervalles, ouverts, $\mathbb{Q}$

6) Un théorème fondamental de la compacité

Toute fonction continue sur un ensemble fermé borné non vide (d'un espace vectoriels de dimension finie) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes (*admis*)

Dans le cas particulier d'un segment, le fait que les bornes sont atteintes ne dit pas que les valeurs entre le minimum et le maximum sont atteintes : cela vient du fait que ce fermé borné particulier est aussi un intervalle. C'est tout particulièrement pour des notions qui généralisent la définition d'intervalle que Poincaré avait créé la topologie, le cadre qui permettait de répondre à des questions qu'on ne savait pas résoudre comme « Peut-on dire que si le rotationnel d'un champ est nul, alors il dérive d'un gradient ? », question cruciale pour la physique. Pour répondre il a montré que la question était mal formulée : il fallait écrire « Où peut-on … » et il y a répondu.

III Convexes

1) Définition

Un ensemble est convexe ssi il contient tous les segments (géométriques) délimités par les couples de points de cet ensemble, c'est-à-dire ssi $\forall\; a\,,b \in C \;,\;\; \forall\; t \in [\,0\;;\,1\,]\;,\;\; (1-t)a + tb \;\in\; C$

2) Exemples

Sous-espaces affines (translatés d'espaces vectoriels : ensembles des solutions d'une équation linéaire), demi-espaces, boules (ouvertes et fermées), intervalles, intersection de convexes, image directe et réciproque d'un convexe par une application linéaire, translaté d'un convexe.

<u>mpacts</u> d'un espace de dimension finie.

1) <u>Définition</u>

On dit qu'une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte.

La définition plus générale qui inclut la dimension infinie n'est pas au programme PC.

2) <u>Propriétés</u>

- Une réunion finie de compacts est un compact
- Les fermés inclus dans un compact sont compacts
- *Théorème de Tikhonoff* : un produit cartésien de parties compactes est compact.
  preuve :
  Un produit cartésien de fermés est fermé.
  Un produit cartésien de bornés est borné

- *Théorème de base* : l'image continue d'un compact est un compact
  preuve admise : *ce n'est pas avec votre définition de la compacité qu'on peut la prouver.*

- *Corollaire encore plus important* :
  Une application continue sur un compact et à valeurs réelles y atteint ses bornes supérieure et inférieure qui sont donc maximum et minimum.

  preuve :
  Si $f \in C(K, \mathbb{R})$ avec K compact, alors $Q = f(K)$ est compact
  Il reste à montrer que si Q est un compact de $\mathbb{R}$ alors $\inf Q \in Q$ et $\sup Q \in Q$.
  Je montre, par exemple, que si F est un fermé minoré de réels, alors $m = \inf Q \in Q$:
  $m + \frac{1}{n}$ n'est plus un minorant de Q donc $\exists\, x_n \in Q \quad x_n < m + \frac{1}{n}$
  Or m minore Q donc $m \leq x_n$
  Le théorème des gendarmes assure que $x_n \to m$
  et comme $\forall\, n \quad x_n \in Q$, la fermeture de Q entraîne bien que $m \in Q$.

3) <u>Exemples</u>

- $\emptyset$, les sphères, les boules fermées en particulier les segments sont compacts
- Les parties finies sont compactes
- Les pavés sont compacts
- $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ est un compact qui montre qu'il n'y a pas que les réunions finies de segments qui sont compacts.
  Cet exemple et ses analogues est très important pour certaines démonstrations théoriques du programme MP.

4) <u>Exercices classiques</u>

- Si K est un compact de $\mathbb{C}$ inclus dans le disque ouvert $\mathring{D}(0,1)$, alors il est inclus dans un disque fermé $\bar{D}(0, r)$ avec $r < 1$.
  A l'aide de la fonction continue ($z \to |z|$)
- Une fonction continue sur un pavé y est bornée.
- Si f : $(\mathbb{C} \to \mathbb{R})$ est continue et vérifie $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 1515 + 1789i$ alors f est bornée.
  car elle est bornée pour $|z|$ *assez grand et que* $\bar{D}(0, R)$ *est compact.*

- Si N et N' sont deux normes d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors le quotient $\dfrac{N'}{N}$ atteint son minimum et son maximum.

  car on se ramène à la sphère unité.

Rappel et généralisation

On dit qu'une propriété est vérifiée au voisinage de x si et seulement si elle est vérifiée dans une ($\exists$) boule ouverte centrée en x.
On remarque que cette notion est inchangée si on remplace la norme de E par une norme équivalente. Il convient donc en général de choisir une telle norme.
En dimension finie, on a le choix, puisque toutes les normes sont équivalentes.

et surtout de maîtriser les résultats de base sur la compacité, une notion qui s'est imposée pour généraliser à $\mathbb{R}^n$ *ce qu'on a essentiellement énoncé sur les segments de* $\mathbb{R}$.

On peut aussi dire que O *est un voisinage de tous ses points, dans le sens où une propriété vraie dans O est vraie au voisinage de tous les points de O*