

Épreuves orales de Physique

L'épreuve orale de physique dure 50 minutes et place le candidat face à un sujet qu'il découvre et qu'il n'a pas pu préparer. Une telle épreuve est toujours déstabilisante et le candidat peut compter a priori sur la bienveillance de l'examineur. L'épreuve se déroule sous forme d'un dialogue constructif entre le candidat et l'examineur, ce dernier prodiguant s'il y a lieu des remarques lorsque le candidat est bloqué dans la résolution, ou s'il s'oriente dans une mauvaise direction avec trop de persévérance. L'objectif de cette épreuve n'est pas uniquement de contrôler les connaissances du candidat, mais aussi de mettre à l'épreuve sa capacité de cerner un problème et de proposer une stratégie de résolution de façon plus ou moins autonome. Le candidat doit donc prendre des initiatives, l'examineur orientant la discussion suivant les réactions du candidat. Les tentatives de solution, même si elles n'aboutissent pas, permettent de voir si le programme a bien été assimilé pour pouvoir être utilisé et pas seulement récité sans recul. Il est conseillé d'exercer son intuition. Pour cela, tâtonner, faire une figure, estimer des ordres de grandeur sont des moyens utiles et recommandés. Par exemple, un objet réel n'est jamais « grand » ou « petit » : il faut discuter quels paramètres sont petits ou grands devant quels autres, pour ne garder in fine que ceux qui sont strictement nécessaires. On essaie alors de représenter le système réel par un modèle simple que l'on rattache au cours. Savoir ce que l'on peut faire avec les connaissances acquises et évaluer les efforts nécessaires pour arriver à une estimation des effets est aussi important que de souligner les phénomènes physiques à la base du problème. Enfin, après avoir compris qualitativement l'énoncé, il est temps de poser soi-même les équations, avant de les résoudre.

12 sujets d'oral de physique sont proposés en exemple. Ils sont accompagnés d'une partie intitulée « Indications sur la résolution », permettant de mettre les futurs lecteurs sur la voie de leur résolution.

Vitesses et pressions autour d'une « aile d'avion »

On considère l'aile d'un petit avion comme cylindrique, de rayon $a = 1$ m et de longueur $L \gg a$. L'avion vole à une faible vitesse constante $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 100 \text{ km h}^{-1}$.

a) Justifier que dans ces conditions on peut approximativement considérer l'air comme incompressible.

b) Calculer les champs des vitesses et des pressions dans l'approximation d'une aile infiniment longue. Quelle serait la force résultante par unité de longueur ?

c) Étudier le champ défini pour $x^2 + z^2 \geq a^2$ par $\vec{w}_\Gamma = \frac{\Gamma}{x^2 + z^2}(z\vec{e}_x - x\vec{e}_z)$, et montrer que l'on peut ajouter un tel champ au champ des vitesses précédemment obtenu. Comment cela modifie la force résultante sur l'aile ?

Commentaires

a) Argument classique : On estime $\rho \delta v^2 \sim \delta p$ par Euler et donc $\delta \rho \sim (\partial \rho / \partial p)_s \delta p \sim \frac{1}{c^2} \rho \delta v^2$ ou $\delta \rho / \rho \sim \delta v^2 / c^2$. Tant que $v \ll c$ on peut considérer le fluide comme incompressible.

b) On se place dans le référentiel de l'aile et cherche un champ de vitesse à divergence nulle et rotationnel nul (à justifier!) qui tend vers $-\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ à l'infini. L'écoulement est donc potentiel, avec $\vec{v} = \nabla \phi$ et $\phi = v_0 x + \phi_0$ avec $\nabla \phi_0 \rightarrow 0$ à l'infini. A cause de la symétrie cylindrique de l'aile, on utilise les solutions de Laplace à 2 dimensions qui sont $\log r$ (où $r^2 = x^2 + z^2$) et les dérivés d'ordre arbitraire de $\log r$ par rapport à x et/ou z . On essaie alors $\phi_0 = A \log r + \vec{B} \cdot \nabla \log r$. On calcule $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + \frac{A}{r^2} \vec{r} + \frac{1}{r^2} \vec{B} - \frac{2}{r^4} \vec{B} \cdot \vec{r} \vec{r}$ et on doit imposer la condition limite $0 = \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ en $r = a$. Cela donne $A = 0$ et $\vec{B} = a^2 v_0 \vec{e}_x = -a^2 \vec{v}_0$. Donc, dans le ref de l'aile $\vec{v} = -\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \vec{v}_0 + 2 \frac{a^2}{r^4} \vec{v}_0 \cdot \vec{r} \vec{r}$. On peut utiliser Bernoulli dans le ref de l'aile (conditions limites stationnaires!) et calculer la pression. Sur l'aile ($r = a$) on obtient (avec $\vec{r} \cdot \vec{e}_x = a \cos \theta$) : $p = p_0 - \frac{\rho}{2} v_0^2 (3 - 4 \cos^2 \theta)$. C'est symétrique entre le dessus et le dessous de l'aile et entre l'avant et l'arrière. Il n'y a pas de force résultante.

c) Le champ \vec{w}_Γ est de divergence et rotationnel nul, mais possède une circulation non nulle ($-2\pi\Gamma$) autour de l'aile. (Cela est possible car ce champ serait singulier sur la ligne $x = z = 0$ qui est à l'intérieur de l'aile où le champ n'est pas défini.) Si on l'ajoute à v , dans le calcul de p il y a maintenant un terme croisé $\vec{v} \cdot \vec{w}_\Gamma$ qui contribue $-2\rho\Gamma \frac{v_0}{a} \sin \theta$. L'élément de force projetée sur \vec{e}_z est $dF_z = -dL a d\theta \sin \theta p$ et donc $\vec{F} = 2\pi\Gamma \rho L v_0 \vec{e}_z$. Évidemment, il est intéressant de savoir pourquoi ajouter un tel champ à circulation non-nulle et comment choisir Γ . Mais ceci est une autre question...

Corde suspendue

Une corde sans raideur, de longueur L et de masse linéique μ est suspendue entre deux points A et B, tels que $x_B - x_A = d > 0$ et $z_B - z_A = h > 0$. (Evidemment, $L^2 > d^2 + h^2$.) On appelle θ_0 et θ_1 les angles que fait la corde avec le vecteur \vec{e}_z en A et B. Déterminer la forme de la corde $\theta(l)$ (où $l \in [0, L]$ est le paramètre naturel le long de la corde) en fonction de d et h que l'on reliera à θ_0 et θ_1 . En particulier on déterminera $\frac{h}{L}$ et $\frac{d}{L}$ pour que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{On donne } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} \text{ et } \int \frac{dx}{\sin x} = \log \frac{x}{2}.$$

Commentaires

On utilise le paramètre l qui est la longueur de la corde entre le point considéré et le point d'attache A. θ est l'angle entre le vecteur tangent à la corde (dans le sens des l croissants) et le vecteur \vec{e}_z . Il suffit de faire un dessin pour voir que $\theta(l)$ est une fonction monotonement décroissante qui ne peut pas s'annuler : aucun segment de la corde n'est jamais vertical.

On raisonne sur un élément de corde entre l (avec angle θ) et $l + dl$ (avec angle $\theta + d\theta$). A gauche s'applique une tension $\vec{T}_g(l) = -T(l)(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z)$ à droite on a une tension $\vec{T}_d(l + dl) = T(l + dl)(\sin(\theta + d\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta + d\theta) \vec{e}_z)$. Le poids est $\vec{P} = -\mu g dl \vec{e}_z$. On écrit $\vec{T}_g(l) + \vec{T}_d(l + dl) + \vec{P} = 0$, on développe au premier ordre en dl et $d\theta$ et on note $\theta' = \frac{d\theta}{dl}$ pour obtenir les deux équations :

$$T'(l) \sin \theta + T(l) \theta' \cos \theta = 0 \tag{1}$$

$$T'(l) \cos \theta - T(l) \theta' \sin \theta = \mu g . \tag{2}$$

La première équation s'intègre en

$$T(l) = \frac{a}{\sin \theta(l)} , \tag{3}$$

?où a est une constante. Equation (2) donne alors

$$\theta' = -\frac{\mu g}{a} \sin^2 \theta \tag{4}$$

(on vérifie que θ décroît de façon monotone) que l'on intègre comme

$$\frac{\mu g}{a}(l - b) = \frac{1}{\tan \theta} \Leftrightarrow \theta(l) = -\frac{\mu g}{a} \arctan \left(\frac{a}{\mu g} \frac{l}{l - b} \right) , \tag{5}$$

où b est une autre constante. On calcule alors L , d et h comme

$$L = \int_0^L dl = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\theta'} = \frac{a}{\mu g} \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a}{\mu g} \left(\frac{1}{\tan \theta_1} - \frac{1}{\tan \theta_0} \right) \quad (6)$$

$$h = \int_0^L dl \cos \theta = \frac{a}{\mu g} \int_{\theta_1}^{\theta_0} d\theta \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{a}{\mu g} \left(\frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{1}{\sin \theta_0} \right) \quad (7)$$

$$d = \int_0^L dl \sin \theta = \frac{a}{\mu g} \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{a}{\mu g} \left(\log \tan \frac{\theta_0}{2} - \log \tan \frac{\theta_1}{2} \right), \quad (8)$$

ce qui permet de déterminer par exemple a, θ_0, θ_1 si L, h, d sont donnés. Equation (5) permet alors de fixer aussi b .

Avec $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ on trouve : $a = \mu g L$, $\frac{h}{L} = \sqrt{2} - 1 \simeq 0.4142$, $\frac{d}{L} = -\log \tan \frac{\pi}{8} \simeq 0.8813$.

Fusible

Un fil métallique de conductivité σ et rayon r_0 , de longueur L est parcouru d'un courant électrique constant I . Le fil se trouve le long de l'axe d'un récipient cylindrique de rayon R_0 et même longueur L . Ce récipient est rempli d'un liquide isolant électriquement. Les parois du cylindre sont maintenues à une température T_∞ . On suppose $a < R_0 \ll L$. Déterminer la température dans le fil. Pour une température de fusion T_F du métal donné, expliciter le lien entre I_{\max} et r_0 de ce « fusible ».

Commentaires

On est en cylindrique et le bilan de la chaleur dans le fil donne $\nabla \cdot \vec{j} + \mu^f c_v^f \frac{\partial T}{\partial t} = \rho$ où $\rho = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{I}{\pi r_0^2} \right)^2$ est la production de chaleur par unité de volume grâce à l'effet Joule et $\mu^f c_v^f$ est la capacité thermique du fil par unité de volume. On est en stationnaire, donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Par les symétries, $\vec{j} = j(r) \vec{r}_r$ et $\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{r} (rj)'$.

On peut maintenant utiliser $\vec{j} = -\lambda_f \nabla T$ et écrire une équation différentielle du deuxième ordre pour T dans le fil et dehors. Ensuite il faut imposer continuité de T et de j entre le fil et le liquide. Alternativement on reste d'abord avec j :

$$(rj)' = \rho r \quad \Rightarrow \quad j = \rho \frac{r}{2} + \frac{A}{r} r < r_0.$$

Forcément, $A = 0$, sinon on aurait une singularité au centre du fil. Dans le liquide on a de même

$$(rj)' = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \frac{B}{r} r > r_0.$$

Continuité de j en $r = r_0$ donne $B = \frac{\rho}{2} r_0^2$. Maintenant, avec $T = T(r)$ on a $j = -\lambda_f T'$ pour $r < r_0$ et $j = -\lambda_l T'$ pour $r_0 < r < R_0$, ce qui donne

$$T(r) = -\frac{\rho}{2\lambda_l} r_0^2 \ln \frac{r}{R_0} + T_\infty \quad , \quad r_0 < r < R_0$$

$$T(r) = -\frac{\rho}{4\lambda_f} r^2 + T_\infty + \frac{\rho}{4} r_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_f} - \frac{2}{\lambda_l} \ln \frac{r_0}{R_0} \right) \quad , \quad r < r_0 .$$

Lorsque le courant électrique dépasse une certaine valeur le fusible fond au centre. Mais ce n'est que lorsqu'il a fondu pour tous les $r < r_0$ qu'il casse. Soit I_{\max} ce courant. En supposant que λ_f soit le même pour le métal solide et fondu, on a

$$I_{\max} = \pi r_0 \sqrt{\frac{2\lambda_l \sigma (T_F - T_\infty)}{\ln(r_0/R_0)}} .$$

Étoile avec un moment dipolaire magnétique

Certains objets astrophysiques possèdent de forts champs magnétiques. Nous assimilerons un tel objet à une (très grande) masse ponctuelle M avec un moment dipolaire magnétique \vec{D}_m . On rappelle que le champ magnétique d'un tel dipôle est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\vec{D}_m \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{D}_m}{r^3} \right) ,$$

avec $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$. On s'intéresse aux trajectoires possibles d'un point matériel de masse $m \ll M$ et de charge électrique q dont la position initiale et vitesse initiale satisfont $\vec{r}(0) \cdot \vec{D}_m = \vec{v}(0) \cdot \vec{D}_m = 0$. On supposera $M = 10^{30} \text{ kg}$, $D_m = 10^{20} \text{ C m}^2 \text{ s}^{-1}$, $m = 10^5 \text{ kg}$, $q = 10^4 \text{ C}$. On donne la constante gravitationnelle $G \simeq 6,7 \times 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$.

a) Montrer que l'effet des interactions électromagnétiques est faible sur une « période » si par exemple r reste de l'ordre de 10^4 km . Montrer que l'effet peut néanmoins être observable si il est cumulatif sur un grand nombre de « périodes ».

b) Déterminer explicitement les trajectoires liées possibles avec les hypothèses ci-dessus en ne retenant les effets électromagnétiques qu'au premier ordre en qD_m . Par quelle observation d'une telle trajectoire pourra-t-on déduire la valeur de qD_m ?

Commentaires

a) Ordres de grandeur : Force magnétique $F_{\text{mag}} \simeq qvB$, soit une accélération $a_{\text{mag}} \simeq \frac{qvB}{m}$. Ceci permet de définir une fréquence caractéristique (fréquence cyclotron associée)

$$\omega_c = \frac{qB}{2m} \tag{1}$$

et l'influence du champ magnétique sera faible sur une période T si $\omega_c T \ll 1$. Pour une trajectoire circulaire dans le champ gravitationnel, l'égalité entre la force gravitationnelle et la force centrifuge donne

$$\frac{GmM}{r^2} = mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow T = 2\pi \left(\frac{r^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (2)$$

(loi de Kepler). Ici on trouve avec $r = 10^4$ km une période très courte de $T \simeq 25$ s. Estimation de B : $B \simeq \frac{\mu_0 D}{4\pi r^3} \simeq 10^{-8}$ kg C⁻¹s⁻¹ et $\omega_c = \frac{qB}{2m} \simeq 5 \cdot 10^{-10}$ s⁻¹ et donc $\omega_c T \simeq 10^{-8}$. Clairement, sur une période, l'effet magnétique est minime, mais si cet effet est cumulatif sur un grand nombre de périodes, il pourra néanmoins être observable. Par exemple, sur une année il y a $\simeq 10^6$ périodes et un effet de $10^6 \times 10^{-8} = 10^{-2}$ est très facile à observer.

b) L'énergie sera conservée. (Le champ magnétique ne travaille pas) : $E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r}$. La force est

$$\vec{F} = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3} + q\vec{v} \wedge \vec{B} . \quad (3)$$

La force magnétique n'est pas centrale et le moment cinétique n'est pas conservé :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \wedge \vec{v}) = m\vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0 + q\vec{r} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{B}) = q(\vec{r} \cdot \vec{B}\vec{v} - \vec{r} \cdot \vec{v}\vec{B}) . \quad (4)$$

Néanmoins, ici, les conditions initiales sont telles que le vecteur position $\vec{r}(0)$ et la vitesse $\vec{v}(0)$ sont dans le plan orthogonal à \vec{D}_m . Donc $\vec{B}(\vec{r}(0))$ est parallèle à \vec{D}_m . La force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et donc aussi l'accélération sont dans le plan orthogonal à \vec{D}_m . Par conséquent, \vec{r} reste dans ce plan orthogonal à \vec{D}_m pour tout t , et $\vec{B}(\vec{r})$ reste parallèle à \vec{D} . Donc $\vec{r} \cdot \vec{B} = 0 \forall t$. Le mouvement est plan et on utilisera des coordonnées r et φ dans ce plan. Equation (4) donne alors $\frac{d}{dt}(m\vec{r} \wedge \vec{v}) = -qr\dot{r}\vec{B}$, soit en projetant

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{qB}{m}r\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}[r^2(\dot{\varphi} - \omega_c(r))] = 0 . \quad (5)$$

Ici, $\omega_c(r)$ est donné par (1) mais avec $B = B(r) = \frac{\mu_0 D_m}{4\pi r^3}$. Donc $r^2(\dot{\varphi} - \omega_c(r)) = l$ est constant. C'est cette relation qui remplace la loi des aires habituelles. On a

$$r^2\dot{\varphi} - \frac{\alpha}{r} = l \quad , \quad \alpha = \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} , \quad (6)$$

que l'on reporte dans l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{GM}{r} . \quad (7)$$

La suite est assez standard : puisqu'on veut la trajectoire $r(\varphi)$, on écrit $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} \equiv \dot{\varphi} r'$ et avec $u = \frac{1}{r}$ on obtient

$$(u')^2 + u^2 = \frac{2}{l^2} \left(\frac{E}{m} + GMu \right) \left(1 + \frac{\alpha}{l} u \right)^{-2}. \quad (8)$$

Cette équation est compliquée à résoudre sauf si on peut faire le développement limité $(1 + \frac{\alpha}{l} u)^{-2} \simeq 1 - 2\frac{\alpha}{l} u$. On a $\frac{\alpha}{l} u = \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m l r} \simeq \frac{\mu_0 q D_m}{8\pi m \dot{\varphi} r^3} = \frac{qB}{2m\dot{\varphi}} = \frac{\omega_c}{\dot{\varphi}} \simeq \frac{\omega_c T}{2\pi} \ll 1$, d'après la discussion ci-dessus. L'équation (8) donne alors

$$(u')^2 + u^2 = \frac{2}{l^2} \left(\frac{E}{m} + GMu \right) \left(1 - 2\frac{\alpha}{l} u \right) + \dots, \quad (9)$$

soit

$$(u')^2 + \left(1 + \frac{4\alpha GM}{l^3} \right) u^2 - 2 \left(\frac{GM}{l^2} - \frac{2E\alpha}{ml^3} \right) u = \frac{2E}{ml^2}. \quad (10)$$

Ceci est de la forme $(u')^2 + Au^2 - 2Bu = C$ et donc $(u')^2 + A \left(u - \frac{B}{A} \right)^2 = C + \frac{B^2}{A}$ avec solution

$$u = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{C}{A} + \frac{B^2}{A^2}} \cos \left(\sqrt{A} (\varphi - \varphi_0) \right). \quad (11)$$

u est périodique en φ , mais avec une période $\frac{2\pi}{\sqrt{A}} \simeq 2\pi \left(1 - \frac{2\alpha GM}{l^3} \right)$. Pour $\alpha = 0$ on retrouve, bien sûr, l'ellipse. Pour α non-nul, mais petit, on trouve que la valeur de φ pour laquelle $u = 1/r$ est minimal (ou maximal) se décale sur une « période » de $\Delta\varphi = \frac{4\pi\alpha GM}{l^3}$. Cet effet est bien cumulatif et donc facilement observable après un grand nombre de « périodes ». Notons que d'après (6), $l \simeq r^2 \dot{\varphi}$ est facile à mesurer en observant la trajectoire.

Plan incliné avec champ magnétique

Un plan incliné est constitué de deux barres parallèles en cuivre faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Les barres sont séparées d'une distance horizontale $d = 20$ cm. Elles sont reliées « en bas » par une résistance ohmique $\mathcal{R} = 10 \Omega$. Un cylindre plein, de longueur $L = 35$ cm et de rayon $a = 1$ cm, également en cuivre, est posé sur les deux barres, en position horizontale. La masse volumique du cuivre est environ 9 g cm^{-3} . Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $B = 10$ T, dirigé selon l'axe vertical. A $t = 0$ on lâche le cylindre et on suppose qu'il y a toujours roulement sans glissement.

Déterminer le mouvement du cylindre. Quelle serait sa vitesse limite v_∞ si les barres étaient infiniment longues ? Après quel temps $t_{1/2}$ la vitesse du cylindre est égale à $v_\infty/2$?

Commentaires

Partie électrique :

Flux : $\dot{\phi} = B \cos \alpha dv$, fem induite : $e = -\dot{\phi}$, courant dans le circuit : $I = \frac{e}{\mathcal{R}} = \frac{Bd}{\mathcal{R}} \cos \alpha v$.

Force de Laplace $\vec{F}_{\text{em}} = I \int_0^d d\vec{l} \wedge \vec{B}$ donc, en module, $F_{\text{em}} = I dB = \frac{B^2 d^2}{\mathcal{R}} \cos \alpha v$. Clairement la direction de cette force est horizontale et dans la direction dans laquelle les barres montent, car elle doit s'opposer au mouvement de descente. (On peut demander de trouver cela en faisant attention aux signes et aux différents sens des vecteurs ou se satisfaire de la bonne application de la règle de Lenz). Soit \vec{e}_{rail} le vecteur unitaire parallèle aux barres et pointant dans le sens de la descente. Alors

$$\vec{e}_{\text{rail}} \cdot \vec{F}_{\text{em}} = -\frac{B^2 d^2}{\mathcal{R}} \cos^2 \alpha v . \quad (1)$$

Partie mécanique :

Soit μ la masse volumique du cuivre. Masse du cylindre $m = \pi a^2 L \mu$. Poids : $\vec{F}_g = -mg \vec{e}_z$,

$$\vec{e}_{\text{rail}} \cdot \vec{F}_g = mg \sin \alpha . \quad (2)$$

PFD projeté sur \vec{e}_{rail} :

$$m\dot{v} = mg \sin \alpha - \frac{B^2 d^2}{\mathcal{R}} \cos^2 \alpha v - F_{\text{frottements}} . \quad (3)$$

C'est le $F_{\text{frottements}} = -F_{\text{frottements}} \vec{e}_{\text{rail}}$ qui fournit le moment de forces qui fait tourner le cylindre : $J\dot{\omega} = T = aF_{\text{frottements}}$. Mais $v = a\omega$ et donc $F_{\text{frottements}} = \frac{J}{a^2} \dot{v}$. En reportant dans (3) on a

$$\left(m + \frac{J}{a^2} \right) \dot{v} = mg \sin \alpha - \frac{B^2 d^2}{\mathcal{R}} \cos^2 \alpha v . \quad (4)$$

Calcul de J :

$$J = \int_0^a dm r^2 = \mu L 2\pi \int_0^a dr r^3 = \mu L 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} \mu \pi L a^2 = \frac{1}{2} m a^2 . \quad (5)$$

Donc $m + \frac{J}{a^2} = \frac{3}{2} m$ et (4) devient

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau} v + A \quad , \quad \tau = \frac{3m\mathcal{R}}{2B^2 d^2 \cos^2 \alpha} \quad , \quad A = \frac{2g \sin \alpha}{3} , \quad (6)$$

avec solution ($v(0) = 0$)

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau} + \tau A(1 - e^{-t/\tau}) = \tau A(1 - e^{-t/\tau}) . \quad (7)$$

Donc $v_\infty = \tau A = \frac{mg\mathcal{R} \sin \alpha}{B^2 d^2 \cos^2 \alpha}$. Le cylindre atteint la moitié de cette vitesse limite après un temps $t_{1/2} = \tau \ln 2$.

La masse du cylindre est $m = \mu\pi a^2 L \simeq 9 \times 3.14 \times 35 \text{ g} \simeq 989 \text{ g} \simeq 1 \text{ kg}$. On a $\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$ et $\sin = \frac{1}{2}$. On vérifiera que τ est bien homogène à un temps : $T = \text{kg A}^{-1}\text{s}^{-2} = \text{kg C}^{-1}\text{s}^{-1}$, $\Omega = \text{VA}^{-1} = \text{WA}^{-2} = \text{kg m}^2\text{s}^{-1}\text{C}^{-2}$. Donc

$$\tau = \frac{3 \times 10 \times 4}{2 \times 100 \times 0.01 \times 3} \frac{\text{kg kg m}^2\text{s}^{-1}\text{C}^{-2}}{\text{kg}^2 \text{C}^{-2}\text{s}^{-2}\text{m}^2} \quad , \quad A = \frac{g}{3} \simeq 3.27\text{m s}^{-2}$$

$$v_\infty = \tau A \simeq 65\text{m s}^{-1} \quad , \quad t_{1/2} \simeq 13.9 \text{ s} . \quad (8)$$

Fil qui pend

On considère un fil pesant (câble) inextensible de masse linéique non-nulle de longueur L . Le câble est attaché par ses deux extrémités aux points A et B sur un plafond. A $t = 0$, l'extrémité en B se rompt, calculer la tension au point A du fil. On supposera qu'à $t = 0$, la distance AB est faible par rapport à L .

Commentaires

Si on veut pouvoir traiter le problème, il faut bien remarquer qu'on a $AB \ll L$, cela nous permet de considérer le système comme unidimensionnel. Ensuite il faut faire attention à bien appliquer les bons théorèmes de mécanique, notamment ne pas utiliser ceux qui supposent un corps solide indéformable.

Vortex sphérique de Hill

On considère un écoulement dont la vorticité s'écrit en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\begin{aligned} \Omega_r &= 0 \\ \Omega_\theta &= Ar \\ \Omega_z &= 0 \end{aligned}$$

à l'intérieur d'une sphère de rayon R , et $\vec{\Omega} = \vec{0}$ dehors.

Montrer que cette solution correspond bien à une solution d'un écoulement d'un fluide parfait incompressible.

A quelle vitesse se déplace le vortex ?

Que font les particules de fluide dans le vortex ?

Commentaires

Cet exercice permet d'établir en préalable l'équation d'évolution de la vorticité dont, on rappelle la définition si le candidat ne la connaît pas.

Et on vérifie ensuite que la solution proposée est bien solution. On peut utiliser des symétries et utiliser des analogies avec la magnétostatique.

Il faut calculer \mathbf{v} , au centre du vortex ce qui peut être fait par Biot et Savard (en supposant une vitesse nulle à l'infini).

L'intérêt de la dernière question et de voir que dans le repère en translation avec le vortex les lignes de courant en \mathbf{R} sont tangentes à la sphère, on ne peut donc pas sortir de cette bulle de vorticité.e.

Lors de cet exercice, l'intervention de l'examineur est normale.

Cosmonaute sur astéroïde

Un cosmonaute échoué sur un astéroïde de rayon R et de même densité que la terre parvient a s'en échapper en sautant en l'air. Quelle est la valeur maximale de R ?

Commentaires

On exprime le résultat en fonction de grandeurs que l'on peut estimer sur la terre ($g = 10\text{m/s}^2$). On estime également l'énergie cinétique que nous sommes capable de fournir en calculant la hauteur maximal que nous sommes capable de sauter sur Terre. Pour ceci, on peut utiliser la conservation de l'énergie. Une fois cette hauteur obtenue, on peut exprimer la hauteur maximale pour cette même énergie cinétique.

Ensuite, il faut calculer la vitesse la vitesse initiale qui permet de s'échapper de l'attraction gravitationnelle d'un astéroïde de taille donn e. Elle correspond à la vitesse pour laquelle la hauteur maximale diverge. En combinant le tout, on obtient la taille maximal de l'astéroïde pour la vitesse que nous somme capable d'obtenir en sautant.

Sphère roulant dans une rainure

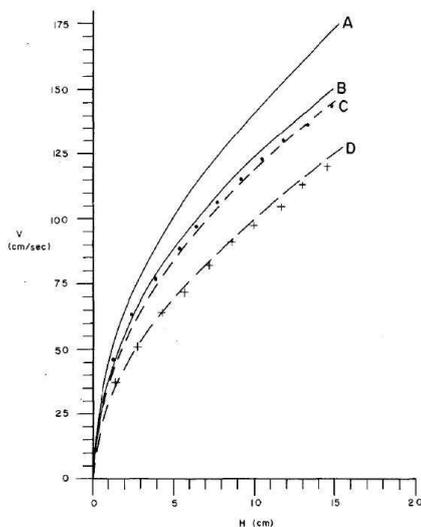
Une sphère de rayon R et de masse m roule dans une rainure de largeur w pos e sur un plan incliné, puis quitte le plan en chute libre pour tomber dans un bac de sable situé plus bas. On mesure la distance au plan x en fonction du rayon de la sphère. Et on en déduit la vitesse de la sphère v lorsqu'elle quitte le plan.

a. Donner une expression entre x et v .

b. Les courbes A et B ci-dessus correspondent respectivement à la vitesse finale d'un mouvement de glissement pur et de roulement pur d'une sphère (moment d'inertie p.r l'axe $I = 2/5mR^2$). Donner l'expression de ces courbes.

c. Les courbes C et D ci-dessus correspondent aux mesures de la vitesse finale d'un mouvement de roulement sans glissement dans une rainure de largeur $w = 1$ cm, pour

des sphères de rayon $R = 0.633$ cm et $R = 1.9$ cm. Pourquoi la vitesse dépend-t-elle du rayon ? Quelle courbe correspond quel rayon ?



d. Donner l'expression général de la vitesse pour un rayon quelconque. Quelle est la condition pour avoir un mouvement sans glissement ?

Commentaires

a. La sphère est en chute libre, ce qui permet de calculer v en fonction de x et de l'angle d'inclinaison θ .

b. On peut faire un bilan d'énergie. Pour un glissement pur, ou toute l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de translation, alors que pour un roulement pur d'une sphère, une partie de l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de rotation.

c. La rotation de rotation de la sphère (donc l'énergie transformée mouvement de rotation) dépend du rapport entre son rayon sur la largeur de la rainure. Plus ce rapport est grand, plus on se rapproche du cas d'une sphère roulant sur un plan.

d. La vitesse de rotation s'exprime en fonction de v et de la projection normale au plan de la distance entre le centre de la sphère et bord de la rainure, elle même dépendant de w . On utilise alors la conservation de l'énergie pour obtenir $v(w)$.

Thermo-cube

Soit un système thermodynamique satisfaisant la relation suivante entre son entropie S , son énergie interne U , son volume V , et le nombre de particules N :

$$S = A(NVU)^{1/3} \quad (1)$$

1.a) Déterminer une relation entre U, N, V , et la température T .

b) Déterminer une relation entre la pression P , et N, V, T .

c) Déterminer la capacité calorifique à volume constant c_v .

2. Deux corps identique satisfaisant la relation Eq. (1), de même volume et nombre de particules, sont initialement à des température T_1 et T_2 . On les utilise comme source de travail jusqu'à les amener à une température constante T_f . Ce processus est réalisé en extrayant de la chaleur du corps le plus chaud et en transférant une partie au corps le plus froid, le reste apparaissant comme travail.

a) Déterminer la gamme possible de température finale.

b) Quelle température correspond au travail maximum délivré, et quel est ce travail maximum.

Commentaires

1.a) On peut exprimer la température en fonction de la variation de l'énergie par rapport à l'entropie à volume et nombre de particule constant. On peut calculer cette variation à partir de la relation donnée.

b) La pression s'exprime en fonction de la variation de l'énergie par rapport au volume, à entropie et nombre de particule fixé.

c) La capacité calorifique est la variation de l'énergie par rapport la température à volume constant.

2.a) La température maximale est obtenue si aucun travail n'est produit, la température minimale si aucune entropie n'est créée.

b) Le travail maximum est produit lorsqu'aucune entropie n'est créée.

Tonneau percé

Un tonneau cylindrique de rayon R et de hauteur H est percé de trous. A une altitude z (à partir de sa base), les trous occupent une fraction $f(z)$ de la paroi du tonneau. A quelle vitesse faut-il remplir le tonneau (en litre par seconde) pour réussir à le faire déborder ? On considérera l'eau comme un fluide parfait (sans viscosité) et incompressible. A.N : $R = H = 1$ m, $f = 1\%$.

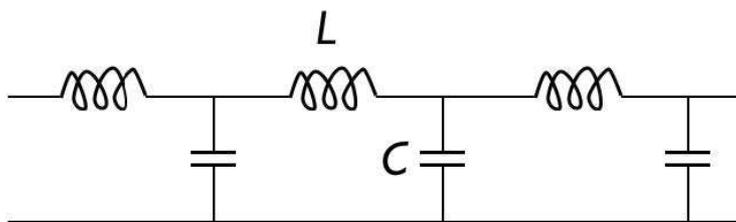
Commentaires

On peut supposer que l'énergie potentielle de l'eau sortant par un trou à une hauteur z du sol est entièrement convertie en énergie cinétique, on peut obtenir la vitesse de sortie du fluide en fonction de la hauteur du trou, ainsi que la variation de volume dans le

tonneau en intégrant le flux de fluide par trou multiplié par la densité de trou sur toute la paroi du tonneau. Si l'on rajoute le débit entrant (supposé constant), on obtient une équation différentielle pour le volume d'eau dans le tonneau. Cette équation a une solution stationnaire qui dépend du débit entrant, ce qui permet de calculer le débit qui correspond à un débordement.

Transmission le long d'un réseau LC

Considérons la ligne de transmission dessinée ci-dessous :



Déterminer la relation de dispersion pour une onde périodique traversant la ligne. Quelle est la fréquence de coupure ?

Commentaires

On définit le noeud i , qui se trouve à un potentiel V_i et qui est traversé par un courant venant de l'inductance en amont et se répartissant entre l'inductance en aval et le condensateur. En passant à la limite continue, où l'on assimile la différence $V_i - V_{i-1}$ à une dérivée spatiale, on peut obtenir une équation différentielle en temps et en espace pour le potentiel $V(i)$, qu'il est facile de résoudre.

Pour obtenir la fréquence de coupure, il faut repasser en discret, et regarder la propagation d'une onde de type : $V_i = e^{ikl - \omega t}$. On remarque qu'une solution purement réelle pour k n'est possible qu'en deçà d'une fréquence de coupure.