PHYSIQUE II MINES PC 2016

MAXIME BONIS
libre diffusion autorisée

De la physique dans le tunnel du Fréjus.

I) Température dans le tunnel.

I·A) Evolutions saisonnières

1) La température moyenne est θ_0.

La température max est $\theta_0 + T_0$

min $\theta_0 - T_0$.

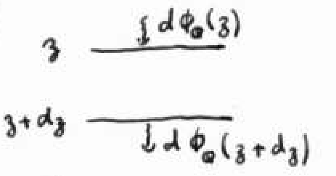
Proposition de valeur pour T_0 : 15 °C.

2) $d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{n}\, dS\, dt$ où $\vec{n}$ est la normale à la surface élémentaire, orientée dans le sens où le flux est compté positivement.

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times T} = \frac{M L^2 T^{-2}}{L^2 T} = M T^{-3}$$

3) Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -K\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$, valable dans un milieu isotrope et pour des variations de température pas trop brutales.

$$[K] = \frac{M T^{-3}}{\Theta L^{-1}} = M L T^{-3} \Theta^{-1}$$

4)


$\delta Q = d\Phi_Q(z) - d\Phi_Q(z+dz)$

5) Dans une tranche mésoscopique, il y a beaucoup d'atomes, la notion de température y a donc un sens. Comme elle est fine, on peut supposer la température uniforme à l'intérieur.

6) 1er principe appliqué à la tranche :

$$dU = \delta Q = -j_Q(z+dz) S\, dt + j_Q(z) S\, dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz\, S\, dt$$

Par ailleurs $dU = \underbrace{\rho_s S dz c_s}_{\text{capacité th de la tranche}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{variation de temp de la tranche en } z} dt$

7) $j_Q = -K \frac{\partial T}{\partial z}$ donc $dU = +K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz S dt$

d'où $\rho_s \cancel{S} \cancel{dz} c_s \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \cancel{dz} \cancel{S} dt$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho_s c_s}}_{D} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad D = \frac{K}{\rho_s c_s} \qquad [D] = L^2 T^{-1}$$

8) La forme de solution $\underline{T} = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ est ondulatoire : la variation de température au sommet se propage dans la roche.

On la remplace dans l'équation :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2}$$

$$i\omega = D(-i\underline{k})^2 = -D\underline{k}^2$$

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} \Rightarrow \underline{k} = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-i) = k' + i k''$$

$k' \to$ propagation, vitesse de phase

$k'' \to$ absorption

$$\underline{T}(z,t) = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k' z)} e^{+k'' z}$$

$$T(z,t) = \Theta_0 + T_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z}$$

9) $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_e} = 0{,}01$

$\Rightarrow -\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_e = \ln(0{,}01) \Rightarrow z_e = -\sqrt{\frac{2D}{\omega}} \ln(0{,}01)$

AN : $D = \frac{K}{\rho_s c_s} = \frac{3{,}00}{2{,}65 \cdot 10^3 \times 8{,}50 \cdot 10^3} = 1{,}33 \cdot 10^{-7}\ m^2 s^{-1}$

$\omega = \frac{2\pi}{1\ an} = \frac{2\pi}{86400 \times 365} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ rad/s$

$z_e = -\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-7}}{1{,}99 \cdot 10^{-7}}} \ln(0{,}01) = 5{,}32\ m$

$z_e \ll$ altitude du Fréjus, donc la température dans le tunnel est constante.

10) Pour des variations quotidiennes de température, $\omega = \frac{2\pi}{24h} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

$$e^{-\sqrt{\frac{2\omega}{D}}\,z_e} = e^{-\sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5}}{1{,}33 \cdot 10^{-7}}}\,5{,}32} = 4 \cdot 10^{-77} \ !$$

Les variations de basse fréquence se propagent plus profondément : le sol se comporte comme un filtre passe-bas.

I.B) Température d'origine géophysique.

11) Bilan thermique en régime stationnaire sur la tranche $[z, z+dz]$

$$\frac{dU}{dt} = 0 = j_Q(z)S - j_Q(z+dz)S + P(z)S\,dz$$

12) On en déduit $\frac{dj_Q}{dz} = P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$$j_Q(z) = -HP_0 e^{-\frac{z}{H}} + cte$$

$$\text{Or } j_Q(z=L_c) = -j_m = -HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}} + cte$$

$$\Rightarrow j_Q(z) = HP_0\left(e^{-\frac{L_c}{H}} - e^{-\frac{z}{H}}\right) - j_m$$

$$j_Q(z) = -K\frac{dT}{dz} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{HP_0}{K}\left(e^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L_c}{H}}\right) + \frac{j_m}{K}$$

$$T(z) = \frac{j_m - HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K}\,z - \frac{H^2P_0}{K}e^{-\frac{z}{H}} + cte.$$

$$T(0) = -\frac{H^2P_0}{K} + cte = \Theta_0$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{j_m - HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K}\,z + \frac{H^2P_0}{K}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + \Theta_0$$

13) $j_S = j_Q(z=0) = HP_0\left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1\right) - j_m$.

14) Comparons j_m et $HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}}$

$$HP_0 e^{-\frac{L_c}{H}} = 10.10^3 . 2{,}50.10^{-6} . e^{-\frac{45}{10}} = 1{,}11.10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$j_m = 0{,}035$ W/m² domine

Donc $T(z) = \frac{j_m}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + \theta_0$.

$$T(z = 1{,}7 \text{ km}) = \frac{0{,}035}{3{,}00} . 1{,}7.10^3 + \frac{(10^4)^2 . 2{,}5.10^{-6}}{3{,}00}\left(1 - e^{-\frac{1{,}7}{10}}\right) + 0\,°C$$

$$= 19{,}8 \quad + 13{,}0 \quad + 0 = 32{,}8\,°C$$

$$j_S = HP_0\left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1\right) - j_m$$

$$= 10^4 . 2{,}5.10^{-6}\left(e^{-\frac{45}{10}} - 1\right) - 0{,}035 = -0{,}060 \text{ W/m}^2$$

Le sol émet de l'énergie thermique.

I. c) Prise en compte du relief.

15) Si on ne prend pas en compte la source d'énergie thermique dans la roche, l'équation de la chaleur 2 D est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0 \text{ en régime stationnaire}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Suppons que T est à variables séparables : $T(x,z) = f(x)\, g(z) + \text{cte}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f''(x)\, g(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f(x)\, g''(z)$$

$$f''(x)\, g(z) = -f(x)\, g''(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{f''}{f}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{-\frac{g''}{g}}_{\text{fonction de } z} = \text{cte}$$

$f'' = \text{cte}\, f$ et $g'' + \text{cte}\, g = 0$

Or on veut une solution oscillante en x et exponentielle en z, donc cte < 0

On note $cte = -k^2$

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \qquad g''(z) - k^2 g(z) = 0$$

$$f(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad g(\,) = C e^{-kz} + D e^{kz}$$

A, B, C, D constantes

Les conditions aux limites permettent d'avoir $D = 0$ et $B = 0$

$$T(x,z) = K \cos kx\, e^{-kz} + cte, \quad K \text{ constante}$$

$$T(x, z=0) = T_1 \cos kx + T_S \Rightarrow K = T_1 \text{ et } cte = T_S$$

$$T(x,z) = T_1 \cos(kx) e^{-kz} + T_S$$

La présence de la montagne fait que l'invariance par translation x supposée dans les parties précédentes n'est pas une hypothèse correcte.
Ici la montagne est encore absente, mais la température de surface est cohérente avec le relief.

16) En présence des sources internes d'énergie thermiques on avait

$$\frac{dj_Q}{dz} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

à 2D on obtient

$$div(\vec{j}_Q) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$-K\Delta T = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

On cherche une solution sous la forme $T(x,z) = T_1 \cos(kx) e^{-kz} + f(z) + T_S$

$f(z)$ s'identifie à la solution étudiée au I.B : elle vérifie

$$f''(z) = -\frac{P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}}$$

Au final, $T(x,z) = T_1 \cos kx\, e^{-kz} + \frac{j_m}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + T_S$

17) $T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

En surface on a $j_S = -K \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

d'où $T(x, z=0) = T(x, z=h) + \frac{j_S}{K} h$

$$= T_S + \frac{j_S}{K} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \Theta_0 + \beta z + \underbrace{\frac{j_S h_0}{K}}_{T_1} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$T(x, z) = \Theta_0 + \underbrace{\left(\beta + \frac{J_m}{K}\right)}_{C_1} z + \underbrace{\frac{H^2 \rho_0}{K}}_{C_2}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \underbrace{\frac{j_S}{K}}_{C_3} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-k z}$$

$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Rem : l'ajout de βz ne perturbe pas car sa dérivée seconde est nulle.

II) Radioactivité α et effet tunnel.

II. A) Le quanton libre.

18) $dP = |\underline{\Psi}(x,t)|^2 dx$

$[\Psi] = L^{-\frac{1}{2}}$

19) $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\Psi}(x,t)|^2 dx = 1 \iff \Sigma \, dP = 1$

20) $\rho = |\underline{\Psi}(x,t)|^2 = \frac{dP}{dx}$ est la densité linéique de propabilité de présence de la particule.

Equation de conservation : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$ avec $\vec{j} = \rho \vec{v_G} = j \, \vec{e_x}$ où $\vec{v_G}$ est la vitesse de groupe.

21) Une particule non relativiste se déplace à une vitesse petite devant la vitesse de la lumière.

$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x) \, \underline{f}(t)$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \underline{\varphi}''(x) f(t) + V(x) \underline{\varphi}(x) f(t) = i\hbar \underline{f}'(t) \underline{\varphi}(x)$

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''}{\varphi} + V(x) = i\hbar \frac{f'}{f} = cte$ car fonction de x = fonction de t

Cette constante s'identifie à l'énergie E.

On obtient $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' + V(x) \varphi = E \varphi$

et $i\hbar f' = E f \Rightarrow f(t) = A e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

22) Pour une particule libre, $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' = E \varphi$

$\varphi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2} \varphi = 0$

$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

$\Psi(x,t) = \underbrace{A e^{i\left(kx - \frac{Et}{\hbar}\right)}}_{x \text{ croissants}} + \underbrace{B e^{-i\left(kx + \frac{Et}{\hbar}\right)}}_{x \text{ décroissants}}$

23) $\vec{k} = k\,\vec{e_x}$ avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \hbar k$$

$\vec{p} = \hbar \vec{k}$ relation de De Broglie.

II. B) Effet tunnel.

24) En mécanique classique, les régions où l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie totale ne sont pas accessibles : la particule rebondirait sur la barrière de potentiel.

25) Dans les régions I et III, la particule est libre donc les formes des solutions sont $\varphi_I(x) = \underbrace{A e^{ikx}}_{\text{incidente}} + \underbrace{B e^{-ikx}}_{\text{réfléchie}}$

et $\varphi_{III}(x) = \underbrace{C e^{ikx}}_{\text{transmise}}$ A, B, C constantes d'intégration

26) Dans la zone II, l'équation de Schrödinger indépendante du temps est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + V_0\varphi = E\varphi$$

$$\varphi'' + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0 \qquad \varphi'' - q^2\varphi = 0$$

$$\varphi(x) = D e^{qx} + F e^{-qx}$$ D, F constantes d'intégration

27) En $x=0$ et en $x=a$, la fonction d'onde doit être continue, ainsi que sa dérivée première.

La condition de normalisation permet de définir totalement la fonction d'onde.

28) Dans la région III, $\underline{\Psi} = |C| e^{i(kx - \omega t + \phi_c)}$ avec $\omega = \frac{E}{\hbar}$ et $\phi_c = \arg(C)$

$\bar{\underline{\Psi}} = |C| e^{-i(kx - \omega t + \phi_c)}$

$$j_{III} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\Psi}\frac{\partial \bar{\underline{\Psi}}}{\partial x} - \bar{\underline{\Psi}}\frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial x}\right)\vec{u_x} = \frac{i\hbar}{2m}\left(|C|^2(-ik) - |C|^2 ik\right) = \frac{\hbar k}{m}|C|^2$$

$j_{III} = j_{\text{transmis}}$

Dans la région I, on a de même $j_{incident} = \frac{\hbar^2 k}{m} |A|^2$

$$j_{réfléchi} = -\frac{\hbar^2 k}{m} |B|^2$$

$$R = \left| \frac{j_{ref}}{j_{inc}} \right| \qquad T = \left| \frac{j_{tr}}{j_{inc}} \right|$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \qquad T = \left| \frac{C}{A} \right|^2$$

2g) $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}}{1{,}05 \cdot 10^{-34}} = 5{,}14 \cdot 10^9 \ m^{-1}$

a(nm)	0,50	1,00	2,00
q a	2,57	5,14	10,3
ch(qa)	6,57	85,4	$1{,}49 \cdot 10^4$
T(qa)	$2{,}32 \cdot 10^{-2}$	$1{,}37 \cdot 10^{-4}$	$4{,}52 \cdot 10^{-9}$

$$T(qa) = \frac{1}{1 + sh^2(qa)} = \frac{1}{ch^2(qa)}$$

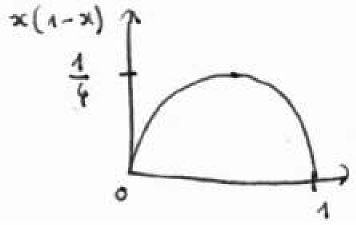
Une barrière de potentiel est dite épaisse lorsque $\overset{a \gg \lambda_{dB}}{qa \gg 1} \Rightarrow sh^2(qa) \gg 1$

alors $T = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} sh^2(qa)} \simeq \dfrac{4E(V_0 - E)}{V_0^2} \dfrac{1}{sh^2(qa)}$

$$sh(qa) = \frac{e^{qa}}{2} \qquad sh^2 qa \simeq \frac{e^{2qa}}{4}$$

$$T = \underbrace{\frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2}}_{T_0(E, V_0)} e^{-2qa}$$

A V_0 fixé, $T_0 = 16 \frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) = 16\, x(1-x)$ pour x entre 0 et 1.



Donc T_0 varie entre 0 et 2, on peut prendre en moyenne $T_0 \simeq 1$ d'où $T \simeq e^{-2qa}$

II. c) Radioactivité α.

30) L'énergie potentielle électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 est $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$

Ici $q_1 q_2 = 2(Z-2)e^2$ et $r_{12} = x$.

$$V_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_m}$$

AN pour l'uranium, $V_0 = \dfrac{2 \cdot 90 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{3,5 \cdot 10^{-15}} 8,98 \cdot 10^9 = 1,18 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$

$= 73,9\ \text{MeV}$

$$x_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mathcal{E}} = \frac{2 \cdot 90 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4,00 \cdot 10^6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})} \cdot 8,98 \cdot 10^9 = 6,46 \cdot 10^{-14}\ \text{m}$$

Largeur de la barrière de potentiel à franchir : $a = x_m - x_0 = 61 \cdot 10^{-15}\ \text{m}$.

La barrière est épaisse si $qa \gg 1$.

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - \mathcal{E})}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 6,64 \cdot 10^{-27} \cdot 69,9 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}{1,05 \cdot 10^{-34}} = 3,67 \cdot 10^{15}\ \text{m}^{-1}$$

$qa = 224 \gg 1$ La barrière est épaisse, mais non infranchissable.

31) $T(x+dx) = T(x) e^{-2q\,dx}$ avec ici $q(x) = \dfrac{\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar}$

$$T(x+dx) = T(x)\left(1 - 2q\,dx\right)$$

$$\frac{T(x+dx) - T(x)}{T(x)} = -2q\,dx$$

$$d \ln T = -2q\,dx$$

$$\ln T = -2\int_{x_0}^{x_m} q(x)\,dx = -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x} - E\right)}\,dx$$

32) $x_m = \dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}$

$$\ln T = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E x}-1}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\frac{x_m}{x}-1}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x_m\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\,\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{x_0}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 E}{K}}\right)$$

$$= \frac{4}{\hbar}\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\sqrt{2mEx_0\frac{4\pi\varepsilon_0 E}{K}} - \frac{2}{\hbar}\frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{2}\sqrt{2m}\,\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$= \underbrace{\frac{4}{\hbar}\sqrt{\frac{K}{4\pi\varepsilon_0}2mx_0}}_{a} - \underbrace{\frac{K}{\hbar\, 4\varepsilon_0}\sqrt{2m}}_{b}\,\frac{1}{\sqrt{E}}$$

33) $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m_\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 4{,}00\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{6{,}64\cdot 10^{-27}}} = 14{,}9\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$

Entre 2 rebonds sur la barrière, la particule parcourt la distance $4x_0$.

$t_m = \dfrac{4x_0}{v}$

Nombre moyen de rebonds par seconde

$N = \dfrac{1}{t_m} = \dfrac{v}{4x_0}$

$dp = NT\,dt$

$t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{NT}$

$$\ln t_{1/2} = \underbrace{\ln\left(\frac{\ln 2}{N}\right)}_{\text{cte car } t_m \text{ cte}} - \ln T = \text{cte} + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

34) Le résultat précédent est en accord avec la figure 7 : $\log_{10}(t_{1/2})$ est proportionnel à $\ln(t_{1/2})$ et son tracé en fonction de $\dfrac{1}{\sqrt{E}}$ est une droite croissante, de coefficient directeur b.