Corrigé des exercices de Préparation aux oraux 2024

Séance 1 : Lundi 21 Mai (analyse)

Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel,2) : soit $f : [0,\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(t)=\dfrac{1}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$.

1) Montrer que f est dérivable en 0.
2) Déterminer une équation de la tangente à C_f en 0. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

1) On calcule $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t-\sin(t)}{t^2\sin(t)}$, avec $\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t-\dfrac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)$.

Donc $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6t^3}$. Donc $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \dfrac{1}{6}$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=\dfrac{1}{6}}$

2) Une équation de la tangente à C_f en 0 est $\boxed{y=f(0)+tf'(0)=\dfrac{1}{6}t}$

Puis $f(t)-\dfrac{1}{6}t=\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}-\dfrac{1}{6}t=\dfrac{t-\sin(t)-\dfrac{1}{6}t^2\sin(t)}{t\sin(t)}$

Or $\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t-\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{1}{120}t^5+o\left(t^5\right)$ et $t^2\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t^3-\dfrac{1}{6}t^5+o\left(t^5\right)$.

Donc $f(t)-\dfrac{1}{6}t \underset{t\to 0}{\sim} =\left(\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{120}\right)t^3$,avec $\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{120}>0$

Donc $\boxed{C_f \text{ est au dessus de sa tangente en 0 pour } t>0}$

Exercice 2 (Oral IMT 23, Bastien N,2) :

1) Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$.
2) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

1) On a directement $\ln(1+t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$.

2) On pose $f(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ pour $t \in \left]0,1\right]$. Il vient $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n$. On veut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. On pose $U_n(t)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}t^n$

- $\sum_n U_n$ converge simplement sur $\left]0,1\right]$ (et sa somme f est continue sur $\left]0,1\right]$).
- Chaque U_n est intégrable sur $\left]0,1\right]$.
- $\displaystyle\int_0^1 |U_n(t)|dt=\frac{1}{(n+1)^2}$, donc $\displaystyle\sum\int_0^1|U_n(t)|dt$ converge.

Donc par théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\left]0,1\right]$ et $\boxed{I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}}$

Si on admet $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}$, alors $I=\sum_{n \text{ pair}}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}+\sum_{n \text{ impair}}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\sum_{n \text{ impair}}\frac{1}{n^2}-\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n^2}$.

Donc $\boxed{I=\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{n \text{ pair}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{12}}$

Exercice 3 (oral CCINP 23, Mailys,2) : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+5}U_n \end{cases}$

1) Montrer que (U_n) est décroissante et convergente.
2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $V_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2}\frac{U_{n+1}}{U_n}$. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que $\ln(V_n)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{a}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   En déduire la nature de $\sum\ln(V_n)$.
3)
   a) En simplifiant, pour $n\geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(V_k)$, montrer qu'il existe $C>0$ tel que $U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{C}{n^{3/2}}$
   b) On pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}U_nx^n$. Montrer que S est définie sur $[-1,1]$.
4) Montrer que S est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle $2x(1-x)y'+(3-2x)y=3$.

1) Par récurrence, on a $\forall n\in\mathbb{N}, U_n>0$. Donc pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+2}{2n+5}\leq 1$ et $U_{n+1}\leq U_n$.
   $\boxed{\text{Donc } (U_n) \text{ est décroissante et minorée par 0 : elle converge}}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $V_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2}\frac{U_{n+1}}{U_n}$, donc $\ln(V_n)=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)$
   Donc $\ln(V_n)=\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(2n(1+\frac{1}{n})\right)-\ln\left(2n(1+\frac{5}{2n})\right)$.
   Donc $\ln(V_n)=\frac{5}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)$. Or $\ln(u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$
   Donc $\ln(V_n)=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{5}{2n}-\frac{25}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.
   Donc $\boxed{\ln(V_n)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{15}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ On prend ainsi } a=\frac{15}{8}}$

   On a donc $\ln(V_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{a}{n^2}$, avec $\left(\frac{a}{n^2}\right)$ de signe fixe et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\boxed{\sum\ln(V_n) \text{ converge}}$.

3) a) $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(V_k)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(U_{k+1})-\ln(U_k)\right)$. Ce sont des sommes télescopiques.
   Donc $\sum_{k=1}^{n-1}\ln(V_k)=\frac{3}{2}\ln(n)+\ln(U_n)-\ln(U_1)$ et avec 2), $\ln(n^{3/2}U_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(V_k)+\ln(U_1)\underset{n\to+\infty}{\to}b\in\mathbb{R}$
   Donc $\boxed{n^{3/2}U_n\underset{n\to+\infty}{\to}C=e^b>0 \text{ et on a bien } U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{C}{n^{3/2}}}$

3b) Soit $x\in[-1,1]$. Alors pour $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\left|U_nx^n\right|\leq U_n$.

Comme $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{3/2}}$, avec $\left(\dfrac{C}{n^{3/2}}\right)$ de signe fixe et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$

Donc par majoration, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente.

Donc $\boxed{S \text{ est définie sur } [-1,1]}$.

4) S est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Donc S est C^∞ sur $]-1,1[$ et on peut dériver terme à terme. Ainsi, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nU_n x^{n-1}$

Donc $(3-2x)S(x) = 3\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} U_{n-1} x^n$ et

$(2x)(1-x)S'(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nU_n x^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)U_{n-1}x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} nU_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)U_{n-1}x^n$

Donc $(3-2x)S(x) + 2x(1-x)S'(x) = 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left((3+2n)U_n - 2nU_{n-1}\right)x^n$.

Or pour $n \geq 1$, $U_n = \dfrac{2n}{2n+3}U_{n-1}$, donc $(3-2x)S(x) + 2x(1-x)S'(x) = 3$

$\boxed{S \text{ est solution sur }]0,1[\text{ de l'équation différentielle } 2x(1-x)y' + (3-2x)y = 3}$

Exercice 4 (Oral Mines 23, Lou Anne,3) : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (a_n) telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\ln(n)$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum \exp(-a_n)$ converge et que si $\alpha < 1$, alors $\sum\exp(-a_n)$ diverge.

$\boxed{\text{On suppose } \alpha > 1}$. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\ln(n)$, alors $\dfrac{a_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

On prend $c \in]1,\alpha[$. Avec la définition de limite, il existe $N\in\mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{a_n}{\ln(n)} \geq c$.

Pour $n \geq N$, il vient $a_n \geq c\ln(n)$, donc $\exp(-a_n) \leq \exp(-c\ln(n))$

Donc $0 \leq \exp(-a_n) \leq \dfrac{1}{n^c}$. Or d'après Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^c}$ converge,, donc par majoration, $\displaystyle\sum_{n\geq N}\exp(-a_n)$, donc comme la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, $\boxed{\sum\exp(-a_n) \text{ converge}}$

De même, si $\alpha < 1$, alors pour n assez grand, $\dfrac{a_n}{\ln(n)} \leq 1$ et $\exp(-a_n) \geq \dfrac{1}{n}$, donc $\sum\exp(-a_n)$ converge.

Exercice 5 (Oral Mines 23, Bastien L,4) : convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^3-k}$.

On pose pour $k \geq 1$: $U_k = \dfrac{1}{4k^3-k} > 0$. Alors $U_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4k^3} > 0$. Or $\sum\dfrac{1}{4k^3}$ converge, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geq 1} U_k \text{ converge}}$.

On décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{4k^3-k} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{4k^2-1}\right) = \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{2k-1}\dfrac{1}{2k+1}$.

Donc $U_k = -\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k-1} + \dfrac{1}{2k+1}$. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\sum_{k=1}^{N} U_k = -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k+1} = -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{2N+1} + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k-1} - 1$.

Or $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}$. Donc si on note $H_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$, il vient

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \frac{1}{2N+1} + 2\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - 1 = 2H_{2N} - 2H_N + \frac{1}{2N+1} - 1$$

Or $H_{2N} - H_N = \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N+k} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}} \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \ln 2$ avec les sommes de Riemann.

(On peut aussi montrer $H_N \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$, où $\gamma \in \mathbb{R}$

Donc $\sum_{k=1}^{N} U_k \underset{N\to+\infty}{\to} 2\ln(2) - 1$ et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^3 - k} = 2\ln(2) - 1}$

Exercice 6 (oral Centrale 1 23, Alice,3) : soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

On note $a_n = \min\left(\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geq n\right\}\right)$.

1) Montrer que a_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$.
2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{p} f(k)$.
3) Déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers l'infini.

1) On sait que $\alpha \in \left]0,1\right[$, donc avec les séries de Riemann, $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$ diverge.

   Comme il s'agit d'une série à termes positifs, $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p} f(k) = +\infty$ donc $\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geq n\right\}$ n'est pas vide et $\boxed{a_n \text{ est défini pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

   De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p < n$, alors $\sum_{k=1}^{p} f(k) = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^\alpha} \leq p < n$, donc on n'a pas $a_n < n$.

   Dès lors, nécessairement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n}$

2) On effectue une comparaison avec une intégrale : f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour $2 \leq k \leq p$, on sait que $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$, donc $1 + \int_2^{p+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{p} f(k) \leq 1 + \int_1^{p} f(t)\,dt$.

   Or $\int_1^p f(t)\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^p$, donc $\int_1^p f(t)\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(p^{1-\alpha} - 1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, donc $1 + \int_1^p f(t)\,dt \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

   De même, $1 + \int_2^{p+1} f(t)\,dt \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Donc par théorème d'encadrement sur les équivalents, $\boxed{\sum_{k=1}^{p} f(k) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$

3) Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$, on sait que $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Or si

$A_n = \left\{ p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geq n \right\}$, on sait que $a_n = \min\left(A_n\right) \in A_n$ et que $a_n - 1 \notin A_n$.

Donc $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n-1} f(k)$ et $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n} f(k) - \frac{1}{a_n^{\alpha}}$.

Donc $n \leq \sum_{k=1}^{a_n} f(k) \leq n + \frac{1}{a_n^{\alpha}} \leq n+1$ et $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Donc $\frac{a_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1-\alpha\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} n^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

Séance 2 : Mardi 22 Mai (algèbre)

Exercice 7 (oral CCINP 23, Raphaël,1) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in S_3^+\left(\mathbb{R}\right)$.

Tout d'abord, $A \in S_3\left(\mathbb{R}\right)$. De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors $X^T A X = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \geq 0$.

Donc $\boxed{A \in S_3^+\left(\mathbb{R}\right)}$

Exercice 8 (Oral Mines 23, Liam,2) : soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Démontrer $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$.

On prouve $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$. Si $Y \in \mathrm{Im}(A+B)$, alors on considère $X \in M_{p,1}\left(\mathbb{R}\right)$ tel que $Y = (A+B)X$. Il vient alors $Y = AX + BX \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$. On a donc bien $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

Dès lors, $rg(A+B) \leq \dim\left(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)\right) = rg(A) + rg(B) - \dim\left(\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B)\right)$ en utilisant la formule de Grassmann. Donc on a bien $\boxed{rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)}$

Exercice 9 (Oral IMT 23, Bastien N,3) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associée à A. Avec le moins de calculs possibles, déterminer $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$, les valeurs propres et vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

Notons $B = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ les colonnes de A.
Alors (C_1, C_2, C_3) est libre et $C_2 = C_4$, $C_1 = C_5$, donc $rg(f) = rg(A) = 3$.
On a alors $\boxed{\mathrm{Im}(f) = Vect\left(C_1, C_2, C_3\right)}$
Par théorème du rang, $\dim\left(Ker(f)\right) = 2$. Or $f(e_1) = f(e_5)$ et $f(e_2) = f(e_4)$.

Donc (e_1-e_5,e_2-e_4) est une famille libre de deux vecteurs de $\ker(f)$.

Donc $\boxed{(e_1-e_5,e_2-e_4) \text{ est une base de } \ker(f)}$

En outre, on remarque que $A.\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, et que $A.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc $1\in Sp(A)$, $e_3,e_2\in Ker(A-I_5)$ et $mult(1,\chi_A)\geq 2$.

Comme $\dim\left(Ker(A)\right)=2$, on a déjà trouvé 4 valeurs propres de A avec leur multiplicité.

Donc si on note α la dernière valeur propre (à priori complexe) de A, alors $Tr(A)=1+1+\alpha=4$. Donc $\alpha=2$.

Alors $A-2I_5=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&1\\1&-1&0&1&1\\1&0&-1&0&1\\1&0&0&-2&1\\1&0&0&0&-1\end{pmatrix}$, avec en regardant les colonnes $\left(A-2I_5\right)\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $u=e_1+3e_2+2e_3+e_4+e_5\in\ker(A-2I_5)$.

Dès lors, $\dim\left(Ker(A)\right)+\dim\left(Ker(A-I_5)\right)+\dim\left(Ker(A-2I_5)\right)\geq 2+2+1=5$.

Or $\sum_{\lambda\in Sp(A)}\dim\left(E_\lambda(A)\right)\leq 5$, donc $\boxed{Sp(A)=\{0,1,2\}}$

$\dim\left(Ker(A)\right)+\dim\left(Ker(A-I_5)\right)+\dim\left(Ker(A-2I_5)\right)=5$ donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

En outre, $\dim\left(Ker(A-I_5)\right)=2$ et $\boxed{(e_3,e_2) \text{ est une base de } Ker(A-I_5)}$

Enfin, $\boxed{u=e_1+3e_2+2e_3+e_4+e_5 \text{ est une base de } \ker(A-2I_5)}$

Exercice 10 (oral CCINP 23, Mathilde,2) : on pose $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b,c),(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

1) Soit $J=M(0,1,0)$. Calculer J^2 et exprimer $M(a,b,c)$ avec J,J^2,I_3.
2)
   a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et en trouver une base et la dimension.
   b) Montrer que le produit de deux matrices de E appartient à E.
3) Montrer que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de $j=\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.
4) Montrer que $M=M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de celles de J.
5) Montrer que $Sp(M)\subset\mathbb{R}\Leftrightarrow b=c$.

1) $J=M(0,1,0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ donc $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=M(0,0,1)$.

   Donc on a directement $\boxed{M(a,b,c)=a\,I_3+b\,J+c\,J^2}$

2) a) $E=\left\{M(a,b,c),(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{a\,I_3+b\,J+c\,J^2,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=Vect\left(I_3,J,J^2\right)$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et $\left(I_3,J,J^2\right)$ est génératrice de E.

Par ailleurs, elle est libre (si $aI_3 + bJ + cJ^2 = 0$; alors $M(a,b,c) = 0$ donc $a = b = c = 0$). Donc $\boxed{\left(I_3, J, J^2\right) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 3}$

b) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$.

On calcule $M(a,b,c).M(a',b',c') = \left(a I_3 + bJ + cJ^2\right)\left(a' I_3 + b'J + c'J^2\right)$.

Or $J^3 = I_3$, $J^4 = J$, donc $M(a,b,c).M(a',b',c') \in Vect\left(I_3, J, J^2\right) = E$.

Donc $\boxed{\text{le produit de deux matrices de } E \text{ appartient à } E}$

3) On calcule $\gamma_J = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ (les solutions de $z^3 = 1$ sont les racines troisièmes de 1, à savoir 1, $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ et $j^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right)$)

Donc $\boxed{Sp(J) = \left\{1, j, j^2\right\}}$. J possède 3 valeurs propres complexes distinctes et $J \in M_3\left(\mathbb{C}\right)$ donc J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

4) Soit $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ telles que $J = PDP^{-1}$. Alors $J = PD^2P^{-1}$

Donc si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2 = P\left(aI_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}$

Donc $M(a,b,c)$ est semblable à $D(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$

Donc $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\boxed{Sp\left(M(a,b,c)\right) = \left\{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2b+jc\right\}}$

5) On suppose $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $Sp(M) \subset \mathbb{R}$. Alors $z = a + jb + j^2c \in \mathbb{R}$ et $a + j^2b + jc \in \mathbb{R}$.

On a donc $\bar{z} = z$. Or $\bar{j} = \exp\left(\frac{-2i\pi}{3}\right) = j^2$, donc $\bar{z} = a + j^2b + jc$.

Donc $a + jb + j^2c = a + j^2b + jc$ et en soustrayant, $\left(j^2 - j\right)c = (j^2 - j)b$.

Donc comme $j \neq j^2$ (les racines troisièmes de 1 sont distinctes), on a bien $b = c$.

Réciproquement, si $b = c$, alors $a + bj + cj^2 = a + bj^2 + cj = a + b(j + j^2) = a - b \in \mathbb{R}$ (on sait en effet que $1 + j + j^2 = 0$). On a donc bien $\boxed{Sp(M) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow b = c}$

Exercice 11 (Oral Mines 23, Liam,3) : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est somme de deux matrices diagonalisables.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, il vient $A = M + N$, avec $M = \begin{pmatrix} 1/p & * & & \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & n/p \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A_{1,1} - 1/p & (0) & & \\ * & \ddots & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & A_{n,n} - n/p \end{pmatrix}$.

(plus précisément : pour $i > j$, $M_{i,j} = 0$ et $N_{i,j} = A_{i,j}$, pour $i < j$, $N_{i,j} = 0$ et $M_{i,j} = A_{i,j}$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$N_{i,i} = A_{i,i} - \frac{i}{p}$).

Alors N est diagonalisable car elle possède n valeurs propres distinctes (elle est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale).

De plus, pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, avec $i \neq j$, il vient $N_{i,i} = N_{j,j} \Leftrightarrow A_{i,i} - \frac{i}{p} = A_{j,j} - \frac{j}{p} \Leftrightarrow A_{i,i} - A_{j,j} = \frac{j-i}{p}$.

Si $A_{i,i} = A_{j,j}$, on a donc toujours $N_{i,i} \neq N_{j,j}$ et sinon, on a $N_{i,i} \neq N_{j,j}$ lorsque $p > \left| \frac{j-i}{A_{i,i} - A_{j,j}} \right|$.

Donc pour p assez grand ($p > \max\limits_{\substack{1 \le i,j \le n \\ A_{i,i} \neq A_{j,j}}} \left\{ \left| \frac{j-i}{A_{i,i} - A_{j,j}} \right| \right\}$), tous les coefficients diagonaux de n sont distincts et N est diagonalisable.

$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ est bien somme de deux matrices diagonalisables}}$.

Exercice 12 (Centrale 1 23,Eloi, 4) : soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1) Donner les éléments propres de J .

2) Soient $(a_0,...,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

1) Plusieurs approches sont possibles :

- On peut considérer $B = (e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et prendre u canoniquement associée à J .

  Alors $\begin{cases} u(e_1) = e_n \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases}$, donc pour $k \in [\![1,n]\!], u^n(e_k) = e_k$, donc $J^n = I_n$ et les valeurs propres de J sont parmi les racines n-èmes de l'unité, puis on cherche chaque sous-espace propre associé.
- On peut aussi calculer le polynôme caractéristique et on trouve $\chi_J = X^n - 1$ et de nouveau on cherche le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.
- On peut procéder d'une troisième manière qui permet de faire tout en même temps : on cherche les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $JX = \lambda X$.

  Le système s'écrit $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$. Si $\lambda^n \neq 1$, $X = 0$ est la seule solution et $\lambda \notin Sp(J)$.

Si $\lambda^n = 1$, $JX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_{n-1} \\ x_1 = x_1 \end{cases}$. Les solutions sont les $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{Sp(J) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda^n = 1\right\} = \left\{\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\boxed{E_{\omega_k}(J) = Vect(X_k) \text{, avec } X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}}$

2) On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1 \\ 1 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (on a $\begin{cases} u^2(e_1) = e_{n-1} \\ u^2(e_2) = e_n \\ \vdots \\ u^2(e_n) = e_{n-2} \end{cases}$ en reprenant u canoniquement associé à J). Donc on constate que $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i J^i$

Or les X_k sont des vecteurs propres de J associés à des valeurs propres distinctes.
Donc ils forment une famille libre et comme $B = (X_0, .., X_{n-1})$ contient n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de J.

Dès lors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $AX_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i J^i X_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \omega_i^k\right) X_k$

Donc $\boxed{B = (X_0, .., X_{n-1}) \text{ est aussi une base de vecteurs propres de } A}$.

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les $\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \omega_i^k\right)_{0 \le k \le n-1}$, donc $\boxed{Sp(A) = \left\{\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \omega_i^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$

Séance 3 : Lundi 27 Mai (analyse)

Exercice 13 (Oral IMT 23, Ethan,2) : on pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$. Trouver le développement en série entière de f.

Il vient directement pour $|x| < 1$: $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Puis en dérivant terme à terme sur $]-1, 1[$ (on peut le faire puisque $R = 1$) :

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n .$$

Donc $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2} = (3x+7) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n = (-3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$.

Donc $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (-3n + 7n + 7) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4n+7) x^n}$.

On sait qu'il y a unicité du développement en série entière donc c'est le seul et avec d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

Exercice 14 (Oral CCINP 23, Jérémy,2) : pour $x > 0$, on considère $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + x} dt$.

1) Montrer que $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + x} dt$ existe.
2) Etudier la continuité de $I(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3) Etudier la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

1) Pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x,t) = \frac{\ln(t)}{t^2 + x}$. On fixe $x > 0$.

   Alors $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 + x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\ln(t)}{x}$ et $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $t \mapsto g(x,t)$ l'est aussi.

   $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable en $+\infty$.

   $\boxed{\text{Donc pour } x > 0,\ I(x) \text{ existe bien}}$.

2) On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus, soit $a > 0$. Alors pour $x \in [a,+\infty[$, $|g(x,t)| = \left|\frac{\ln(t)}{t^2 + x}\right| \leq \left|\frac{\ln(t)}{t^2 + a}\right| = h(t)$.

   Or avec 1), h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc I est continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
   Donc I est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) On utilise le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
   - Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x,t) = \frac{\ln(t)}{t^2 + x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
   - En prenant $a = 1$, on a pour $x \in [1,+\infty[$, $|g(x,t)| = \left|\frac{\ln(t)}{t^2 + x}\right| \leq \left|\frac{\ln(t)}{t^2 + 1}\right| = h(t)$, avec h intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Donc $\boxed{I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + x} dt \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$

Exercice 15 (Oral CCINP 23, Arthur,2) :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{U_n}{n!}$.

1) Calculer V_0, V_1, V_2, V_3.
2) Montrer que (V_n) converge et trouver sa limite.
3) Quel est le rayon de convergence R de $\sum V_n x^n$?
4) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n x^n$. Montrer que S satisfait une équation différentielle à préciser sur $]-R, R[$.

5) On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Comparer f et S.

1) On calcule $U_1 = U_0 - 1 = 0$, $U_2 = 1$ et $U_3 = 3-1=2$. Donc $\boxed{V_0 = 1, V_1 = 0, V_2 = \frac{1}{2}, V_3 = \frac{1}{3}}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $V_{n+1} - V_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et en sommant $V_n - V_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Donc $\boxed{V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to e^{-1}}$

3) Comme (V_n) converge, elle est bornée et $(V_n 1^n)$ est bornée donc $R \geq 1$. De plus, (V_n) ne converge pas vers 0, donc $R \leq 1$. Donc $\boxed{R=1}$

4) On peut dériver terme à terme sur $]-R,R[\,=\,]-1,1[$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(V_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} V_n n x^{n-1} + S(x) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n .$$

Donc $S'(x) = xS'(x) + S(x) - e^{-x}$ et $\boxed{(1-x)S'(x) = S(x) - e^{-x}}$

5) On sait que pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Donc $(1-x)f(x) = e^{-x}$. On dérive cette relation sur $]-1,1[$: on obtient $(1-x)f'(x) - f(x) = -e^{-x}$.

On note P le problème de Cauchy : $(P): \begin{cases} (1-x)y'(x) - y(x) = -e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$. On sait que ce problème admet une unique solution sur $]-1,1[$. Or f et S vérifient toutes deux ce problème car $f(0) = 1 = S(0)$

Donc $\boxed{f = S}$

Exercice 16 (Oral Mines 23,Eloi,3) : On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que F est impaire.
2) Montrer que F est dérivable, et exprimer F' sans intégrale.
3) Exprimer F sans l'intégrale. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}dt$?

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $g(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- Si $x=0$, $g(0,t)=0$ et $F(0)$ est défini avec $F(0)=0$.

  Si $x \neq 0$, $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} x$, donc $g(x,t) \underset{t\to 0}{=} O(1)$ et $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable en 0.

  De plus, $t^2 g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable en $+\infty$

  Donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F(x)$ existe toujours.

  De plus, $F(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-xt)}{t(1+t^2)}dt = -F(x)$ donc $\boxed{F \text{ est impaire car Arctan l'est}}$.

2) On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto g(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec 1)
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le \dfrac{1}{(1+t^2)}$, où $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc F est C^1 donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt}$

Comme F est impaire, F' est paire et se place sur $\mathbb{R}_+$.

On décompose en éléments simples si $x^2 \neq 1$ et $x \neq 0$:

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{(1+u)} - \frac{x^2}{(1-x^2)}\frac{1}{(1+x^2u)}.$$

Donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)}dt - \frac{x^2}{(1-x^2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)}dt$.

Donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{(1-x^2)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}+t^2\right)}dt = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[x\,\mathrm{Arctan}(xt)\right]_0^{+\infty}\right)$

Donc $F'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$. Par continuité de F' et de $x \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+x)}$, ce résultat reste vrai pour $x = 0$ et $x = 1$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)} \text{ et par parité, } \forall x \in \mathbb{R}_-, F'(x) = F'(-x) = \dfrac{\pi}{2(1-x)}}$

3) On sait que $F(0) = 0$, donc $\boxed{F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ si } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } F(x) = -F(-x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) \text{ si } x \in \mathbb{R}_-}$.

On calcule $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan^2(t)}{t^2}dt$. On pose $u(t) = \arctan^2(t)$, $u'(t) = \dfrac{2\arctan(t)}{1+t^2}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$.

$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et $u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.

Donc par intégration par parties, I a même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\arctan(t)}{t(1+t^2)}dt$.

Or cette dernière est convergente avec 1), donc I aussi et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan^2(t)}{t^2}dt = 2F(1) = \pi\ln(2)}$

Exercice 17 (Oral Mines 23, Raphaël,4) : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(t)\,dt$.

1) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles I_n est défini. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?
2) Déterminer la nature de $\sum I_n$.
3) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{I_n}{n!}x^n$. Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n$. En déduire I_n.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \ln^n(t)$ est continue sur $[1,e]$ donc I_n est toujours défini (pour $n=0$, $I_0 = e-1$).

On note alors pour $t \in [1,e[$: $f_n(t) = \ln^n(t)$. $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[1,e[$. En outre, pour $t \in [1,e[$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \le 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[1,e[$.

Donc $\boxed{\text{par théorème de convergence dominée, } I_n = \int_{[1,e[} \ln^n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

2) On change de variable et on pose $u = \ln(t)$. Alors $du = \frac{1}{t}dt$ et $I_n = \int_0^1 u^n e^u \, du$.

En intégrant par parties sur le segment $[0,1]$, $I_n = \left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}e^u\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 u^{n+1}e^u \, du$.

Or $0 \le \int_0^1 u^{n+1}e^u \, du \le e\int_0^1 u^{n+1} \, du$, donc $0 \le \int_0^1 u^{n+1}e^u \, du \le \frac{e}{n+2}$ et $\int_0^1 u^{n+1}e^u \, du \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc $I_n = \frac{e}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$. Donc $\boxed{\sum I_n \text{ diverge}}$.

3) On utilise d'Alembert pour les séries entières. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{I_n}{n!} > 0$ ($t \mapsto \ln^n(t)$ est continue sur $[1,e]$, positive, non constamment nulle, donc $I_n > 0$).

Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$ donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\boxed{R = R\left(\sum \frac{I_n}{n!}x^n\right) = +\infty}$

On calcule $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_1^e \frac{x^n}{n!}\ln^n(t)\,dt\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On veut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

On pose $g_n(t) = \frac{x^n}{n!}\ln^n(t)$ pour $t \in [1,e]$ et $n \in \mathbb{N}$. Chaque g_n est continue sur $[1,e]$.

On a $|g_n(t)| \le \frac{|x|^n}{n!}$ donc $0 \le \|g_n\|_\infty \le \frac{|x|^n}{n!}$, donc par majoration, $\sum \|g_n\|_\infty$ converge et $\sum_{n\ge 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,e]$.

Donc $S(x) = \int_1^e \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ln^n(t)\,dt = \int_1^e \exp\left(x\ln(t)\right)dt = \int_1^e t^x dt$

Pour $x \in]-1,1[$, $S(x) = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_1^e = \frac{e^{x+1}-1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)}\left(ee^x - 1\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)\left(e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} - 1\right)$.

Donc par produit de Cauchy (pour $x \in]-1,1[$, les deux séries convergent absolument) : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!} - (-1)^n\right)x^n$

Donc par unicité du développement en série entière, $\boxed{I_n = e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} - (-1)^n n!}$

On peut aussi l'obtenir à partir de $I_n = \int_0^1 u^n e^u \, du$ et d'une intégration par parties qui donne une relation de récurrence.

Exercice 18 (Centrale 1 23, Simon,3) ;

On considère $f(x)=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)=\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=0}^{N}\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier ses variations.

1) Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_N(x)=\prod_{n=0}^{N}\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)\geq 1$.

Il vient alors $\ln\left(f_N(x)\right)=\sum_{n=0}^{N}\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n(x)=\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$ et on note $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$.

- Chaque U_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x\in\mathbb{R}$, $|U_n(x)|=\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)\leq e^{-n(1+x^2)}\leq e^{-n}$.

Donc $0\leq\|U_n\|_\infty\leq e^{-n}$ et comme $\sum\left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge, $\sum U_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Donc si on pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)=\lim_{N\to+\infty}S_N(x)}$, alors on peut affirmer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Dès lors, $\ln\left(f_N(x)\right)=S_N(x)\underset{N\to+\infty}{\to}S(x)$, donc $f_N(x)=\exp\left(\ln\left(f_N(x)\right)\right)\underset{N\to+\infty}{\to}\exp\left(S(x)\right)$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\exp\left(S(x)\right)\text{, donc par composée, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

2) On peut remarquer que S est paire et étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.
On peut procéder de deux manières.

- Si $0\leq x\leq y$, alors $U_n(x)=\ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)\geq\ln\left(1+e^{-n(1+y^2)}\right)=U_n(y)$.

  Donc par somme, $S(x)\geq S(y)$ et $f(x)\geq f(y)$.

  Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et par parité croissante sur } \mathbb{R}_-}$

- On peut aussi utiliser le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.
  - Chaque U_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
  - $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
  - Pour $x\in\mathbb{R}_+$, $U_n'(x)=\dfrac{-2nxe^{-n(1+x^2)}}{1+e^{-n(1+x^2)}}$, donc si $a>0$, $\|U_n'\|_\infty\leq 2nae^{-n}$.

  Donc $0\leq n^2\|U_n'\|_\infty\leq 2n^3ae^{-n}$ et $\|U_n'\|_\infty\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum U_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$.

  Donc S est C^1 sur tout segment $[0,a]$, donc sur $\mathbb{R}_+$, avec $S'(x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2nxe^{-n(1+x^2)}}{1+e^{-n(1+x^2)}}\leq 0$.

  Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=S'(x)\exp\left(S(x)\right)\leq 0$.

  On retrouve que $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et par parité croissante sur } \mathbb{R}_-}$

Séance 4 : Mardi 28 Mai (algèbre)

Exercice 19 (Oral IMT 23, Thomas,2) : on considère $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P - (X+1)P'$

1) φ est-elle bijective ?
2) Déterminer les valeurs propres de φ. Est-elle diagonalisable ?

1) On écrit la matrice de φ dans la base canonique $B = (1, X, X^2, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourrait aussi se placer dans la base $C = (1, (X+1), (X+1)^2, ..., (X+1)^n)$).

Il vient $A = M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & & \vdots \\ & \ddots & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n-1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -n \end{pmatrix}$.

On a alors directement $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible et $\boxed{\varphi \text{ n'est pas bijective}}$.

On aurait aussi pu remarquer que $\varphi(X+1) = 0$.

2) La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Donc $\boxed{Sp(\varphi) = Sp(A) = \{1, 0, -1, ..., -n\}}$.

$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable car elle possède } (n+1) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \text{ valeurs propres distinctes}}$.

Exercice 20 (oral CCINP 23, Liam,2) : soit $A \in M_{5,10}(\mathbb{R})$. Soit $B = A^T A$.

1) Montrer que B est diagonalisable.
2) Trouver une des valeurs propres de B.

1) Tout d'abord, $B = A^T A \in M_{10}(\mathbb{R})$. De plus, $B^T = A^T A = B$ donc $B \in S_{10}(\mathbb{R})$.

Par théorème spectral, $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$.

2) $rg(B) = rg\left(A^T A\right) \leq rg(A^T) \leq 5$, donc comme $B \in M_{10}(\mathbb{R})$, B n'est pas inversible.

Donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } B}$.

Exercice 21 (Oral CCINP 23, Jérémy,3) : Soit $(E, \langle\ \rangle)$ euclidien, avec $\dim(E) = p \geq 1$.

Soit u une isométrie vectorielle et $v = u - Id_E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$

1) Pour $x \in \ker(v)$, calculer $u_n(x)$.
2)
   a) Montrer que $\ker(v) \subset (\mathrm{Im}(v))^\perp$
   b) Montrer que $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3)
   a) Montrer que si $x \in \mathrm{Im}(v)$, alors $\exists y \in E, u_n(x) = \frac{1}{n}\left(u^n(y) - y\right)$
   b) Pour $x \in E$, montrer que la suite $(u_n(x))$ converge et déterminer sa limite.
4) On ne suppose plus que u est une isométrie, mais que $\forall z \in E, \|u(z)\| \leq \|z\|$. Retrouver le résultat de la question précédente. On pourra poser $z = x + ty$, avec $x \in \ker(v)$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in E$

1) On a pour $x \in \ker(Id_E - u)$: $u(x) = x$ donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = x$.

$\boxed{\text{Donc } u_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x = x}$.

2) a) Soit $x \in \ker(v)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $z \in E, u(z) - z = y$.

Donc $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle u(x), u(z)\rangle = 0$ car $u \in O(E)$.

On a donc bien $\ker(v) \subset (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$.

b) De plus, par théorème du rang, $\dim(\ker(v)) = p - \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(v)^{\perp})$.

Donc $\ker(v) = (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$ et comme $\mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)^{\perp} = E$ on conclut :

$\boxed{\ker(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \text{ sont supplémentaires et orthogonaux}}$.

3) a) Soit $x \in \mathrm{Im}(v)$. $\exists y \in E, u(y) - y = x$. Soit un tel y.

Alors $u_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u^{k+1}(y) - u^k(y)\right)$.

La somme est télescopique et $\boxed{u_n(x) = \frac{1}{n}\left(u^n(y) - y\right)}$

b) Soit $a \in E$. Comme $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires, on peut écrire $a = x + z$, avec $z \in \ker(v)$ et $x \in \mathrm{Im}(v)$. Avec les notations du 3a), $\|u_n(x)\| = \frac{1}{n}\left\|y - u^n(y)\right\| \le \frac{1}{n}\left(\|y\| + \left\|u^n(y)\right\|\right)$.

Comme u est une isométrie vectorielle , on obtient $\left\|u^n(y)\right\| = \|y\|$.

Donc $\|u_n(x)\| \le \frac{1}{n}(2\|y\|)$ et $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$.

De plus, avec 1), $u_n(z) = z$ donc $u_n(a) = u_n(x) + u_n(z) \underset{n\to+\infty}{\to} z$

Alors $\boxed{u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} z = p(a) \text{, où } p \text{ est la projection sur } \ker(v) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(v)}$.

4) Soient $x \in \ker(v)$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in E$. Alors on pose comme suggéré $z = x + ty$

$\|u(z)\| \le \|z\|$ donne $\|x + tu(y)\|^2 \le \|x + t(y)\|^2$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, t^2\left(\|y\|^2 - \|u(y)\|^2\right) + 2t\langle x, y - u(y)\rangle \ge 0$.

Si $\langle x, y - u(y)\rangle \ne 0$, $t^2\left(\|y\|^2 - \|u(y)\|^2\right) + 2t\langle x, y - u(y)\rangle \underset{t\to0}{\sim} 2t\langle x, y - u(y)\rangle$ qui change de signe strictement en 0. C'est absurde, donc $\langle x, u(y) - y\rangle = 0$ puis $\langle x, v(y)\rangle = 0$.

$\boxed{\text{On retrouve que } \ker(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \text{ sont orthogonaux}}$ et ensuite supplémentaires avec les dimensions.

La suite de traite de même, avec $\left\|u^n(y)\right\| \le \|y\|$ au lieu de $\left\|u^n(y)\right\| = \|y\|$.

$\boxed{\text{Le résultat reste vrai si on suppose seulement } \forall z \in E, \|u(z)\| \le \|z\|}$.

Exercice 22 (Oral Mines 23,Eloi,3) : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\Phi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto aM + bM^T \end{array}$.

1) Trouver les éléments propres de Φ, sa trace et son déterminant.
2) Déterminer une condition sur a et b pour que Φ soit bijectif et lorsque c'est le cas, déterminer Φ^{-1}

1) On sait que $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

De plus, une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1\le i\le j\le n}$ et $\dim(S_n(\mathbb{R})) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc $\dim\left(A_n(\mathbb{R})\right)=n^2-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

Si $M\in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi(M)=(a+b)M$ et si $M\in A_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M)=(a-b)M$.

Dans une base C adaptée à la décomposition $S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$, il vient

$$M_C(\Phi)=\begin{pmatrix}(a+b)I_{\frac{n(n+1)}{2}} & (0)\\ (0) & (a-b)I_{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{Sp(\Phi)=\{a-b,a+b\}}$. Alors $S_n(\mathbb{R})\subset E_{a+b}(\Phi)$ et $A_n(\mathbb{R})\subset E_{a-b}(\Phi)$, donc $\dim\left(E_{a+b}(\Phi)\right)\geq\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(E_{a-b}(\Phi)\right)\geq\dfrac{n(n-1)}{2}$. Or $\dim\left(E_{a+b}(\Phi)\right)+\dim\left(E_{a-b}(\Phi)\right)=n^2$

donc nécessairement $\boxed{\dim\left(E_{a+b}(\Phi)\right)=\dfrac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\dim\left(E_{a-b}(\Phi)\right)=\dfrac{n(n-1)}{2}}$

On a directement $\boxed{Tr(\Phi)=Tr\left(M_B(\Phi)\right)=\dfrac{n(n+1)}{2}(a+b)+\dfrac{n(n-1)}{2}(a-b)=n^2a+nb}$

$$\boxed{\det(\Phi)=(a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

2) Φ est bijective si et seulement si $M_C(\Phi)$ est inversible.

Donc $\boxed{\Phi \text{ est bijective si et seulement si } a\neq b \text{ et } a\neq -b}$

On a alors $M_C\left(\Phi^{-1}\right)=\begin{pmatrix}(a+b)^{-1}I_{\frac{n(n+1)}{2}} & (0)\\ (0) & (a-b)^{-1}I_{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}.$

Donc $M\in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi^{-1}(M)=(a+b)^{-1}M$ et si $M\in A_n(\mathbb{R})$, $\Phi^{-1}(M)=(a-b)^{-1}M$.

Dès lors, si $M\in M_n(\mathbb{R})$, $M=\dfrac{M+M^T}{2}+\dfrac{M-M^T}{2}$, avec $\dfrac{M+M^T}{2}\in S_n(\mathbb{R})$ $\dfrac{M-M^T}{2}\in A_n(\mathbb{R})$.

Donc $\Phi^{-1}(M)=\dfrac{1}{a+b}\dfrac{M+M^T}{2}+\dfrac{1}{a-b}\dfrac{M-M^T}{2}=\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\left(a-b+a+b\right)M+\left(a-b-a-b\right)M\right)$

Donc $\boxed{\Phi^{-1}(M)=\dfrac{a}{(a^2-b^2)}M-\dfrac{b}{(a^2-b^2)}M^T}$

Exercice 23 (Oral Mines 23, Mailys,4) : soient $A,B\in M_2(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C},\lambda A+\mu B$ est diagonalisable. Montrer que $AB=BA$.

Si $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est $\chi_A=X^2-Tr(A)X+\det(A)$.

Donc $\chi_A=X^2-(a+d)X+ad-bc$. Soit $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc$

Si $\Delta\neq 0$, A possède deux valeurs propres complexes distinctes et est diagonalisable.

Si $\Delta=0$, A possède une seule valeur propre et diagonalisable si et seulement si elle est diagonale.

Donc $\boxed{A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable si et seulement si } b=c=0 \text{ ou } (a-d)^2+4bc\neq 0}$.

Dès lors, on considère f canoniquement associée à A et g canoniquement associée à B. Alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\lambda f+\mu g$ est diagonalisable. On prend une base C de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice $M=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ de f est diagonale. On pose $N=M_C(g)=\begin{pmatrix}u & w\\ v & x\end{pmatrix}$. Si $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $M_C(\lambda f+g)=\begin{pmatrix}\lambda\alpha+u & w\\ v & \lambda\beta+x\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Donc $v=w=0$ ou $\Delta=(\lambda(\alpha-\beta)+u-x)^2+4vw\neq 0$.

- Si $\alpha=\beta$, alors $M=\alpha I_2$ donc $f=\alpha Id_{\mathbb{C}^2}$ donc $f\circ g=g\circ f$ et on a bien $AB=BA$.
- Si $\alpha\neq\beta$, $\Delta=(\lambda(\alpha-\beta)+u-x)^2+4vw$ est un polynôme du second degré en λ. Il existe donc une valeur de λ telle que $\Delta=0$. Pour cette valeur de λ, on a forcément $v=w=0$ puisque $M_C(\lambda f+g)$ est diagonalisable. Donc $N=M_C(g)=\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$ et $MN=NM=\begin{pmatrix}\alpha u & 0\\ 0 & \beta x\end{pmatrix}$, donc $f\circ g=g\circ f$ et on a bien $AB=BA$.

Dans tous les cas, on conclut bien que $\boxed{AB=BA}$

Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) : soit $E=C([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $\Phi:E\to E$ donnée par $\forall x\in[0,1],\Phi(f)(x)=\int_0^1\min(x,t)f(t)\,dt$.

1) Montrer que Φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.
2) Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

1) Soit $f\in E=C([0,1],\mathbb{R})$. Alors si $x\in[0,1]$ est fixé et $t\in[0,1]$, on note $g(x,t)=\min(x,t)f(t)$.
   Alors pour $t\le x$, $g(x,t)=t\,f(t)$ et pour $t\ge x$, $g(x,t)=xf(t)$.
   Donc pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\Phi(f)$ est bien défini.
   Donc $\boxed{\Phi \text{ est bien définie.}}$

   De plus, si $f,g\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in[0,1]$, $\Phi(f+\lambda g)(x)=\int_0^1\min(x,t)(f+\lambda g)(t)\,dt$.
   Donc $\Phi(f+\lambda g)(x)=\Phi(f)(x)+\lambda\Phi(g)(x)$ et Φ est linéaire.
   On veut montrer que si $f\in E$, alors $\Phi(f)$ est continue sur $[0,1]$.
   On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :
   - Pour tout $t\in[0,1]$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (elle est constante sur $[0,x]$, puis linéaire sur $[x,1]$, et continue en x).
   - Pour $x,t\in[0,1]$, $|g(x,t)|=|\min(x,t)f(t)|\le\|f\|_\infty$ ($|f|$ est continue sur $[0,1]$, donc majorée par théorème des bornes atteintes. De plus, $t\mapsto\|f\|_\infty$ est constante donc intégrable sur $[0,1]$.

   Donc $\Phi(f)\in E$ et $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

2) On cherche $\ker(\Phi)$. Soit $f\in\ker(\Phi)$.
   On a $\Phi(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,dt+x\int_x^1 f(t)\,dt$, donc $\Phi(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ (les fonctions sous les deux intégrales sont continues et on utilise le théorème fondamental).
   De plus, $\Phi(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,dt-x\int_1^x f(t)\,dt$ donc $\Phi(f)'(x)=xf(x)-xf(x)-\int_1^x f(t)\,dt=-\int_1^x f(t)\,dt$
   De nouveau, $\Phi(f)'$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\Phi(f)''(x)=-f(x)$

Comme $f \in \ker(\Phi)$, $\Phi(f)=0$, donc $\Phi(f)''(x)=0=-f(x)$. Donc f est nulle. Donc $\boxed{\ker(\Phi)=\{0\}}$

On cherche $\mathrm{Im}(\Phi)$. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Phi)$. Alors il existe $f \in E$ telle que pour tout $x \in [0,1]$:

$g(x)=\Phi(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,dt - x\int_1^x f(t)\,dt$. En particulier, $g(0)=0$ et par théorème fondamental de l'analyse, g est C^1 sur $[0,1]$, avec $g'(x)=-\int_1^x f(t)\,dt$. En particulier, $g'(1)=0$ et g est de classe C^2 sur $[0,1]$ et vérifie $\forall x \in [0,1], f(x)=-g''(x)$.

Donc si $g \in \mathrm{Im}(\Phi)$, alors $g \in A=\left\{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h(0)=h'(1)=0\right\}$. De plus, on a prouvé que $g=\Phi(-g'')$.

Réciproquement, on suppose $g \in A$. Montrons que $g=\Phi(-g'')$. Ainsi, $g \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

Tout d'abord, $-g'' \in E$.

De plus, $\Phi(-g'')(x)=-\int_0^x t\,g''(t)\,dt - x\int_x^1 g''(t)\,dt$.

En intégrant par parties, $\Phi(-g'')(x)=-\left(\left[t\,g'(t)\right]_0^x-\int_0^x g'(t)\,dt\right)-x\left(g'(1)-g'(x)\right)$.

Donc $\Phi(-g'')(x)=-\left(xg'(x)-g(x)+g(0)\right)-x\left(g'(1)-g'(x)\right)=g(x)$

Donc on a bien $g=\Phi(-g'')$ et $g \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi)=A=\left\{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h(0)=h'(1)=0\right\}}$

Séance 5 : Jeudi 30 Mai (analyse)

Exercice 25 (oral CCINP 23, Maxime,3) : soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
2) Calculer sa somme.

1) On pose $U_n=3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$. Si $x=0$, $U_n=0$ et $\sum U_n$ converge.

   Si $x \neq 0$, $U_n=3^n\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x^3}{3^{2n}}=\frac{x^3}{9^n}$. Or $\left(\frac{x^3}{9^n}\right)$ est de signe fixe et $\sum\frac{x^3}{9^n}$ converge, donc

   $\boxed{\sum U_n \text{ converge}}$.

2) On linéarise $\sin^3\alpha=\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(e^{3i\alpha}-3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}-e^{-3i\alpha}\right)=\frac{3}{4}\sin(\alpha)-\frac{1}{4}\sin(3\alpha)$.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On étudie les sommes partielles, car si on coupe en deux, les deux séries obtenues ne sont pas convergentes.

   $\sum_{n=0}^N 3^n\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^N 3^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^N 3^n\sin\left(\frac{3x}{3^n}\right)$.

   Donc $\sum_{n=0}^N 3^n\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^N 3^{n+1}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)-\sum_{n=0}^N 3^n\sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)\right)$

$$\sum_{n=0}^{N} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{N+1} 3^n \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) - \sum_{n=0}^{N} 3^n \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(3^{N+1}\sin\left(\frac{x}{3^N}\right) - \sin(3x)\right)$$

Si $x \neq 0$, $3^{N+1}\sin\left(\frac{x}{3^N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} 3x$, donc $3^{N+1}\sin\left(\frac{x}{3^N}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} 3x$. Ceci reste vrai si $x = 0$.

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\left(3x - \sin(3x)\right)}$

Exercice 26 (Oral IMT 23, Thomas,2) : déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de classe C^∞ sur I et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$.

On cherche une fonction f développable en série entière vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$, avec un rayon de convergence $R > 0$

Si une telle fonction f existe, alors pour $x \in \left]-R, R\right[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

De plus, f est C^∞ sur $\left]-R, R\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n^2$, donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

Or on sait que $R\left(\sum_{n\geq 0} n^2 x^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 0} n x^n\right) = R\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$. Donc :

$\boxed{\text{On prend } I = \left]-1,1\right[\text{ pour } x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \text{ : cette fonction convient}}$.

Exercice 27 (oral CCINP 23, Simon,3) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + 1 < b$. Soit une suite (U_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$.
2)
   a) Prouver que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = -\infty$
   b) En déduire que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
3) On pose $\alpha = b - a$ et $V_n = n^\alpha U_n$. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ puis montrer que $\sum \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ converge.
4) Montrer $\exists A > 0, U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la nature de $\sum U_n$.
5) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{b-1}{b-a-1} U_0$. On pourra commencer par calculer la N-ème somme partielle de $n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n$.

1) $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(n(1+\frac{a}{n})\right) - \ln\left(n(1+\frac{b}{n})\right) = \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)$

Donc $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a-b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $a < b$, on a $a \neq b$ donc $\boxed{\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a-b}{n}}$.

2) a) $\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a-b}{n}$, donc comme $\left(\dfrac{a-b}{n}\right)$ est de signe fixe et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)$ diverge. Si on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{k+a}{k+b}\right)$, alors comme $a < a+1 < b$, (S_n) est décroissante (car $\ln\left(\dfrac{k+a}{k+b}\right) < 0$ pour $k \in \mathbb{N}$). Comme elle ne converge pas, $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \ln\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = -\infty}$

2b) Or $\sum\limits_{n=0}^{N-1} \ln\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \left(\ln\left(U_{n+1}\right) - \ln\left(U_n\right)\right) = \ln\left(U_N\right) - \ln\left(U_0\right)$, donc $\ln\left(U_N\right) \underset{N\to+\infty}{\to} -\infty$ et donc $\boxed{U_n = \exp(\ln(U_n)) \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

3) $\ln\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right) = \alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(n(1+\dfrac{a}{n})\right) - \ln\left(n(1+\dfrac{b}{n})\right)$.

Donc $\ln\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right) = (b-a)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{b}{n}\right)$.

Or $\ln(u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, donc

$$\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = (b-a)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{b}{n} - \frac{b^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2n^2}\left(a-b-(a^2-b^2)\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(a-b)(1-a-b)}{2n^2}}$

(On sait que $a+1<b$, donc $a \neq b$ et $a+b > 2a+1$ donc comme $a \in \mathbb{R}_+$, $a+b-1>0$).

Donc par critère d'équivalence, comme $\left(\dfrac{(a-b)(1-a-b)}{2n^2}\right)$ est de signe fixe, $\boxed{\sum \ln\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right) \text{ converge}}$.

4) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(\dfrac{V_{k+1}}{V_k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\ln\left(V_{k+1}\right) - \ln(V_k)\right)$. C'est une somme télescopique

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(\dfrac{V_{k+1}}{V_k}\right) = \ln(V_n) - \ln(V_1)$ et avec 3), $\ln(V_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(\dfrac{V_{k+1}}{V_k}\right) + \ln(V_1) \underset{n\to+\infty}{\to} b \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{n^\alpha U_n \underset{n\to+\infty}{\to} A = e^b > 0 \text{ et on a bien } U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}}$

Comme $a+1<b$, il vient $\alpha = b-a > 1$, donc $\boxed{\sum U_n \text{ converge}}$.

5) On calcule comme suggéré $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(n\left(U_{n+1} - U_n\right) + bU_{n+1} - aU_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{N} \left((n+b)U_{n+1} - (n+a)U_n\right) = 0$

On note $T_N = \sum\limits_{n=0}^{N} U_n$ et $T = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ On calcule d'une autre manière :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(n\left(U_{n+1} - U_n\right) + bU_{n+1} - aU_n\right) = \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)U_n - \sum_{n=1}^{N} nU_n + b\sum_{n=1}^{N+1} U_n - a\sum_{n=0}^{N} U_n$$

Donc $\sum_{n=0}^{N}\left(n\left(U_{n+1}-U_n\right)+bU_{n+1}-aU_n\right)=NU_{N+1}-\sum_{n=1}^{N}U_n+b(U_{N+1}+\sum_{n=1}^{N}U_n)-a\sum_{n=0}^{N}U_n$

Donc $\sum_{n=0}^{N}\left(n\left(U_{n+1}-U_n\right)+bU_{n+1}-aU_n\right)=NU_{N+1}-T_N+U_0+b(U_{N+1}+T_N-U_0)-aT_N$

Or $U_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{N^\alpha}$ avec $\alpha>1$ donc $NU_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.

En passant à la limite : $0=-T+U_0+bT-bU_0-aT$. Donc $\boxed{T=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n=\dfrac{b-1}{b-a-1}U_0}$

Exercice 28 (Oral Mines 23, Hugo B,4) : déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\dfrac{\sin\left(2\pi en!\right)}{\ln(n)}$

On développe en série entière : $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$.

Alors $\sin\left(2\pi en!\right)=\sin\left(2\pi\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}+2\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{n!}{k!}\right)=\sin\left(2\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{n!}{k!}\right)$ car $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}\in\mathbb{N}$.

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{n!}{k!}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}J_n$, avec $J_n=\sum_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{(n+1)!}{k!}=\dfrac{1}{n+2}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\dfrac{(n+1)!}{k!}$

Donc $0\leq J_n\leq\sum_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{(n+1)!}{k!}=\dfrac{1}{(n+2)}+\sum_{k=n+3}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k-1)}$.

Or $\sum_{k\geq 2}\dfrac{1}{k(k-1)}$ converge donc son reste tend vers 0. Par encadrement, $J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{n!}{k!}\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{n+1}+o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$, donc $\sin\left(2\pi en!\right)\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{2\pi}{(n+1)}+o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Donc $\dfrac{\sin\left(2\pi en!\right)}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2\pi}{n\ln(n)}=V_n$.

Or (V_n) est de signe fixe, donc $\sum_{n\geq 2}\dfrac{\sin\left(2\pi en!\right)}{\ln(n)}$ et $\sum_{n\geq 2}V_n$ ont même nature.

Or par comparaison somme-intégrale, $\sum_{n\geq 2}V_n$ diverge, donc $\boxed{\sum_{n\geq 2}\dfrac{\sin\left(2\pi en!\right)}{\ln(n)}\text{ diverge}}$.

(En effet, pour $N\geq n\geq 2$, $\dfrac{1}{n\ln(n)}\geq\int_n^{n+1}\dfrac{1}{t\ln(t)}dt$, donc $\sum_{n=2}^{N}\dfrac{1}{n\ln(n)}\geq\sum_{n=2}^{N}\int_n^{n+1}\dfrac{1}{t\ln(t)}dt$.

Donc $\sum_{n=2}^{N}\dfrac{1}{n\ln(n)}\geq\int_2^{N+1}\dfrac{1}{t\ln(t)}dt=\ln(\ln(N+1))-\ln(\ln(2))$)

Exercice 29 (Centrale 1 23, Thomas,4) ;

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $U_0=\alpha$ et $\forall n\in\mathbb{N},U_{n+1}=U_n+U_n^2$.

1) Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$.
2) Soit $V_n=\dfrac{\ln\left(U_n\right)}{2^n}$. Montrer que (V_n) converge vers un réel β.
3) Montrer que $\left|V_n-\beta\right|\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
4) Déterminer un équivalent de U_n

1) En premier lieu, pour $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n=U_n^2\geq 0$, donc (U_n) est croissante. Si elle converge, alors elle tend vers $b\geq U_0>0$, et en passant à la limite, on doit avoir $b=b+b^2$, donc $b=0$.
C'est absurde, donc (U_n) est croissante et ne converge pas : $\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty}$

2) $V_{n+1}=\dfrac{\ln(U_{n+1})}{2^{n+1}}=\dfrac{\ln(U_n^2+U_n)}{2^{n+1}}=\dfrac{\ln\left(U_n^2\left(1+\frac{1}{U_n}\right)\right)}{2^{n+1}}$.
Donc $V_{n+1}=V_n+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{U_n}\right)}{2^{n+1}}$. Donc $V_{n+1}-V_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ puisque $U_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$.
Or $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ est de signe fixe et $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0}(V_{n+1}-V_n)$ converge et avec le lien suite-série, $\boxed{\text{la suite } (V_n) \text{ converge vers un réel } \beta}$.

3) On reprend le résultat précédent : $V_{n+1}=V_n+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{U_n}\right)}{2^{n+1}}$. On fixe $n\geq 1$ et $N\geq n$.
Alors $\sum_{k=n}^{N}(V_{k+1}-V_k)=\sum_{k=n}^{N}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{U_k}\right)}{2^{k+1}}$. De plus, pour $k\geq n$, $U_k\geq U_n$ car (U_n) est croissante. Donc
$\ln\left(1+\dfrac{1}{U_k}\right)\leq\dfrac{1}{U_k}\leq\dfrac{1}{U_n}$ et ainsi $|V_{N+1}-V_n|=\sum_{k=n}^{N}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{U_k}\right)}{2^{k+1}}\leq\dfrac{1}{U_n}\sum_{k=n}^{N}\dfrac{1}{2^{k+1}}$.
Donc en passant à la limite quand N tend vers l'infini (avec 2), on sait que (V_n) converge) :
$|\beta-V_n|\leq\dfrac{1}{2U_n}\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k}$. Donc $|V_n-\beta|=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{U_n}$ et comme $U_n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$, $\boxed{|V_n-\beta|\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}$

4) On sait que $V_n=\dfrac{\ln(U_n)}{2^n}$, donc $U_n=\exp(2^nV_n)=\exp(2^n\beta)\exp(2^n(V_n-\beta))$
Or avec 3), $2^n(V_n-\beta)\underset{n\to+\infty}{\to}0$, donc $\boxed{U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\exp(2^n\beta)}$

Exercice 30 (Oral Centrale 22, Mines 23, Bastien L,5) : Existence et calcul de $I=\int_0^1\dfrac{t-1}{\ln(t)}dt$.

On vérifie tout d'abord la convergence de I. On pose $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$.

- f est continue sur $]0,1[$.
- Etude en 0 : $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}\underset{t\to 0}{\to}0$ donc $f(t)\underset{t\to 0}{=}O(1)$ donc comme $t\mapsto 1$ est intégrable en 0, f l'est aussi.
- Etude en 1 : on pose $t=1-h$. Alors $f(1-h)=\dfrac{-h}{\ln(1-h)}\underset{h\to 0}{\sim}1$, donc f est intégrable en 1.

Donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1[\text{ et } I \text{ existe bien}}$.

On effectue un changement de variable en posant $t=e^{-u}$. Alors $u=-\ln(t)$.

Donc $I=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}-1}{u}e^{-u}du=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u}e^{-u}du$.

On développe en série entière : $\frac{e^{-u}-1}{u}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n u^{n-1}}{n!}$. Donc $I=-\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n u^{n-1}}{n!}e^{-u}du$.

On utilise le théorème d'intégration terme à terme :

On pose $g_n(u)=\frac{(-1)^n u^{n-1}}{n!}e^{-u}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in\mathbb{R}_+$.

- Chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n(u)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc chaque g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $S:u\mapsto\frac{e^{-u}-1}{u}e^{-u}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On calcule $\int_0^{+\infty}|g_n(u)|du=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-u}du=\frac{\Gamma(n)}{n!}=\frac{1}{n}$. Le théorème ne s'applique pas ainsi….on va donc renforcer la convergence des intégrales.

On écrit $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{u}-1}{u}e^{-2u}du$. Donc $I=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{n!}e^{-2u}du$.

On utilise le théorème d'intégration terme à terme : on pose $g_n(u)=\frac{u^{n-1}}{n!}e^{-2u}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in\mathbb{R}_+$.

- Chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n(u)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc chaque g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $S:u\mapsto\frac{e^{u}-1}{u}e^{-2u}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On calcule $\int_0^{+\infty}|g_n(u)|du=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-2u}du$. On effectue un changement de variable en posant $v=2u$. Alors $\int_0^{+\infty}u^{n-1}e^{-2u}du=\frac{1}{2^{n-1}2}\int_0^{+\infty}v^{n-1}e^{-v}dv=\frac{1}{2^n}\Gamma(n)$, avec $\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}v^{n-1}e^{-v}dv=(n-1)!$ (on le prouve avec une intégration par parties).

  Donc $\int_0^{+\infty}|g_n(u)|du=\frac{1}{n2^n}$ et comme $0\le\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{2^n}$ et que $\sum\frac{1}{2^n}$ converge, $\sum\int_0^{+\infty}|g_n(u)|du$ converge.

On applique donc le théorème :

$$I=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{n!}e^{-2u}du=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{n!}e^{-2u}du=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n}=-\ln(1-\frac{1}{2})=\ln(2).$$

Donc $\boxed{I=\ln(2)}$

Séance 6 : Vendredi 31 Mai (probabilités)

Exercice 31 (oral CCINP 23,Arthur,1) : soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p . Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $Y_n=X_nX_{n+1}$

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la variance de $S_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$

1) On a $Y_n(\Omega)=\{0,1\}$. On calcule $P(Y_n=1)=P(X_n=1,X_{n+1}=1)=p^2$

   Donc $\boxed{Y_n\text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre }p^2}$. Donc $E(Y_n)=p$ et $V(Y_n)=p(1-p)$

2) $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)$.

Pour $j > i+1$, comme $X_i, X_{i+1}, X_j, X_{j+1}$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, Y_i et Y_j sont indépendantes donc $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

De plus, pour $1 \le i \le n-1$, $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(X_i X_{i+1} X_{i+2}) - p^4 = p^3 - p^4$.

Donc $\boxed{V(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)\big(n(1+p) + 2p(n-1)\big)}$

Exercice 32 (oral CCINP 23, Eva,2) : On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 3P(X = n+2) = 4P(x = n+1) - P(X = n)$.

1) Determiner la loi de X
2) Montrer X est d'espérance finie et admet une variance. Les calculer.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = P(X = n)$. Alors $3U_{n+2} - 4U_{n+1} + U_n = 0$.
On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est $3X^2 - 4X + 1 = 0$, de solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{3}$.
Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
De plus, si $A \ne 0$, $U_n = P(X = n) \underset{n\to+\infty}{\to} A$ et $\sum U_n$ diverge grossièrement, ce qui est absurde puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$. Donc $A = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = B\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, donc $B\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ et
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = P(X = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

2) Si on note pour $x \in \left]-1,1\right[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, alors il vient en dérivant terme à terme (le rayon de convergence de cette série entière étant égal à 1) :
$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.
X et $X(X-1)$ sont à valeurs positives.
Donc $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{X \text{ est d'espérance finie et } E(X) = \frac{1}{2}}$.

Puis par théorème de transfert, $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = \frac{2}{27}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2}$.
Donc par somme, $X^2 = X(X-1) + X$ est d'espérance finie, et $\boxed{X \text{ admet une variance}}$.
Donc $\boxed{V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \frac{3}{4}}$

Exercice 33 (oral CCINP 22,2) On considère un espace probabilisé (Ω, A, P) Soit $p \in]0,1[$

1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p Expliciter la loi de X.
   Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p}$

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[1,+\infty[$, $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ où les x_k sont distincts. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = x_k)$ et on considère $f_k : t \mapsto p_k e^{-t\,x_k}$. Soit $F_X : t \mapsto E\left(e^{-t\,X}\right)$.

2) Montrer que F_X est définie sur $\mathbb{R}_+$. Trouver un lien entre F_X et la série $\sum f_k$.
3) Montrer que la série $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
4) Montrer que f_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$.
5) Montrer que F_X est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt$. Quel est le lien avec $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$?
6) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p. Calculer F_X et retrouver le résultat de la question 1).

1) On utilise le théorème de transfert pour cette variable aléatoire à valeurs positives : $\boxed{E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p\,q^{n-1}}{n} = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n} = -\frac{p\ln(1-q)}{1-p}}$.

2) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, et $k \in \mathbb{N}$, il vient $0 \le |f_k(t)| = p_k e^{-t\,x_k} \le p_k$ (en effet, $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \ge 1 \ge 0$), et $\displaystyle\sum_k P(X = x_k)$ est convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-t\,x_i} P(X = x_i)$ est absolument convergente. Donc par théorème de transfert, $e^{-t\,X}$ est d'espérance finie et $F_X(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(t)$, donc $\boxed{F_X = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f_i}$

3) On a vu que pour $t \in \mathbb{R}_+$, et $k \in \mathbb{N}$, il vient $0 \le |f_k(t)| = p_k e^{-t\,x_k} \le p_k$. Donc $0 \le \|f_k\|_\infty \le p_k$. Or $\displaystyle\sum_k p_k$ est convergente, donc $\boxed{\sum f_k \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+}$.

4) On sait que si $\alpha > 0$, alors $t \mapsto e^{-\alpha\,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ici, $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \ge 1 > 0$. Donc f_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = \frac{p_k}{x_k}}$

5) On utilise le théorème d'intégration terme à terme : pour $t \in \mathbb{R}_+$, $F_X(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(t)$.

- Chaque f_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après 4).
- $\sum f_k$ converge normalement donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ d'après 3). Comme chaque f_k est continue sur $\mathbb{R}_+$, $F_X = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- On prouve que $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,dt$ converge. On sait que pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt = \frac{p_k}{x_k} \le p_k$ car $x_k \ge 1$.

  Donc $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,dt = \sum \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$ converge puisque $\displaystyle\sum_k p_k$ converge.

Donc par théorème d'intégration terme à terme, $\boxed{F_X \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p_k}{x_k} = E\left(\frac{1}{X}\right)}$

6) Pour la loi géométrique, on sait que $X(\Omega) = \{k, k \in \mathbb{N}^*\} \subset [1,+\infty[$. Les hypothèses de l'énoncé s'appliquent donc bien. On pose $q = 1-p$.

Par théorème de transfert, $F_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}e^{-tk}$. Donc $\boxed{F_X(t) = p\,e^{-t}\sum_{k=1}^{+\infty}(qe^{-t})^{k-1} = \frac{p\,e^{-t}}{1-qe^{-t}}}$

On calcule l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt$ en posant $u = e^{-t}$ (la première intégrale est convergente, donc l'autre l'est aussi) : $du = -e^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt = p\int_0^1 \frac{1}{1-qu}\,du$.

Donc $\int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt = -\frac{p}{q}\ln(1-q)$ et avec 5) et $q = 1-p$, $\boxed{E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p\ln(p)}{1-p}}$

Exercice 34 (Oral Mines 23, Ali,3) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $P([\![1,n]\!])$ (ensemble des sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$) de l'équiprobabilité. Calculer $P\left(\left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}\right)$.

On note $F = \left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}$

On sait que $card\left(P([\![1,n]\!])\right) = 2^n$, donc $card\left(P([\![1,n]\!])^2\right) = 2^{2n} = 4^n$.

Puisqu'il y a équiprobabilité, il vient $P(F) = \frac{card(F)}{4^n}$.

On pose pour $k \in [\![0,n]\!]$ $F_k = \left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing, card(A) = k\right\}$

On a alors directement $F = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$, et les F_k sont deux à deux incompatibles.

Donc $card(F) = \sum_{k=0}^{n} card(F_k)$.

On fixe $k \in [\![0,n]\!]$. Pour construire les éléments de F_k, on prend une partie A de $[\![1,n]\!]$ avec k éléments (il y a $\binom{n}{k}$ manières de la choisir), puis une partie B de $\overline{A}$ (complémentaire de A dans $[\![1,n]\!]$). Il y a 2^{n-k} choix possibles de la partie B pour une partie A donnée.

Donc $card(F) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ et $\boxed{P\left(\left\{(A,B) \in P([\![1,n]\!])^2, A \cap B = \varnothing\right\}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Exercice 35 (Oral Mines 23, Maxime,4) : Une urne contient p boules. On effectue des tirages successifs avec remise. On note X_n le nombre de boules ayant été tirées après n tirages.

1) Montrer que $P(X_n = p) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
2) Déterminer l'espérance de X_n.

1) On note $E_{n,k}$: « la $k-ème$ boule a été prise au moins une fois lors des n premiers tirages ».

Alors $P(X_n = p) = P\left(\bigcap_{k=1}^{p} E_{n,k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{p} \overline{E_{n,k}}\right)$.

Or $P\left(\bigcup_{k=1}^{p} \overline{E_{n,k}}\right) \leq \sum_{k=1}^{p} P\left(\overline{E_{n,k}}\right)$, avec $P\left(\overline{E_{n,k}}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ (en effet, à chaque tirage, on ne doit pas prendre la boule numéro k).

Donc $P(X_n = p) \geq 1 - p\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ et par encadrement, $\boxed{P(X_n = p) \underset{n\to+\infty}{\to} 1}$

2) X_n est le nombre de boules ayant été tirées après n tirages. Donc si on note $1_{E_{n,k}}$ la fonction indicatrice de $E_{n,k}$, il vient $X_n = \sum_{k=1}^{p} 1_{E_{n,k}}$.

Donc par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{p} E\left(1_{E_{n,k}}\right) = \sum_{k=1}^{p} P(E_{n,k}) = \sum_{k=1}^{p}\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)$.

On conclut que $\boxed{E(X_n) = p\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n\right)}$

Exercice 36 (oral Centrale 1 23, Raphaël) : Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi.
Soit N une variable aléatoire sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes et d'espérance finie. On pose $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

1) Pour $t \in [0,1]$, montrer que $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) P(N = k) t^n$.
2) Montrer que $\forall t \in [0,1], G_Y(t) = G_N \circ G_{X_1}(t)$.
3) Montrer que Y est d'espérance finie et exprimer l'espérance de Y en fonction de celle de X_1 et de celle de N .

1) Soit $t \in [0,1]$. On sait que G_Y est définie et continue sur $[-1,1]$, donc $G_Y(t)$ existe bien. De plus, $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) t^n$.

Or $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales, il vient $P(Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left((Y = n) \cap (N = k)\right)$.

$P\left((Y = n) \cap (N = k)\right) = P\left(\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) \cap (N = k)\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) P(N = k)$ d'après le lemme des coalitions (comme $(X_1, .., X_k, N)$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{k} X_i$ et N le sont aussi).

On obtient bien $\boxed{G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) P(N = k) t^n}$

2) Soit $t \in [0,1]$. On calcule $G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n \in [0,1]$.

Il vient par ailleurs pour $u \in [0,1]$: $G_N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)u^k$.

Donc $G_N \circ G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)\left(G_{X_1}(t)\right)^k$.

Or si on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, alors comme $(X_1,..,X_k)$ sont indépendantes, $G_{S_k} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i} = (G_{X_1})^k$ car $X_1,..,X_k$ ont toutes la même loi. Donc $G_N \circ G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)\left(G_{S_k}(t)\right)$

Or $G_{S_k}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right)t^n$, donc on a bien par Fubini en permutant les deux sommes :

$\boxed{\forall t \in [0,1], G_Y(t) = G_N \circ G_{X_1}(t)}$

3) Toutes ces variables aléatoires sont à valeurs positives, donc on peut calculer $E(Y) \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme X_1 et N sont d'espérance finie, G_{X_1} et G_N sont dérivables en 1.

De plus, $G_{X_1}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n) = 1$, donc G_N est dérivable en $G_{X_1}(1)$.

Donc par composée, G_Y est dérivable en 1 et $G_Y'(1) = G_N'\left(G_{X_1}(1)\right).G_{X_1}'(1) = E(N)E(X_1)$

Donc on conclut que Y est d'espérance finie et que $\boxed{E(Y) = E(N)E(X_1)}$

Séance 7 : Jeudi 6 Juin (algèbre)

Exercice 37 (oral CCINP 23, Emma,1) : On note E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f, g \in E$, on note $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

1) Montrer que c'est un produit scalaire.
2) Soit $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que si $g \in E$, alors $x \mapsto x^2 g(x)$ est élément de H . En déduire que $H^{\perp} = \{0\}$.

1) On a tout d'abord pour $f, g \in E$: $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. $\langle,\rangle$ est symétrique.
De plus, si $f, g, h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\langle f + \lambda g | h\rangle = \langle f, h\rangle + \lambda\langle g, h\rangle$ par linéarité de l'intégrale.
Par symétrie, on a aussi la linéarité par rapport à l'autre variable et $\langle,\rangle$ est bilinéaire.

En outre, $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \geq 0$. Donc $\langle,\rangle$ est positif.

Enfin, si $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt = 0$, la fonction f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle : donc $\forall t \in [-1,1], f^2(t) = 0$. Donc $\langle,\rangle$ est défini positif.

$\boxed{\text{Finalement, } \langle,\rangle \text{ est un produit scalaire.}}$

2) Soit $g \in E$. On pose $h : x \mapsto x^2 g(x)$. Par opérations, c'est une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
De plus, $h(0) = 0$ donc $\boxed{h \in H}$.

Soit alors $g \in H^{\perp}$. On reprend la fonction $h : x \mapsto x^2 g(x)$. Comme $h \in H$, il vient directement $\langle g,h \rangle = 0$, donc $\int_{-1}^{1} h(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 g^2(t)dt = 0$. la fonction $t \mapsto t^2 g^2(t)$ est continue, positive, d'intégrale nulle : donc $\forall t \in [-1,1], t^2 g^2(t) = 0$ et $\forall t \in [-1,1] \setminus \{0\}, g(t) = 0$.

Comme g est continue en 0, on a par ailleurs $g(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$ donc $g = 0$

On a donc bien $\boxed{H^{\perp} = \{0\}}$

Exercice 38 (Oral IMT 23, Emma,3) : pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Phi(P) = \int_{X}^{X+1} P(t)\,dt$.

Pour $n \geq 2$, on note Φ_n la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que Φ_2 est un endomorphisme.
2) Φ_2 est-elle diagonalisable ?
3) Mêmes questions avec Φ_n.
4) Déterminer les éléments propres de Φ_n.

1) On prouve tout d'abord que Φ est linéaire : soient $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On calcule $\Phi(P+\lambda Q) = \int_{X}^{X+1} P(t)\,dt + \lambda \int_{X}^{X+1} Q(t)\,dt = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)$.

   Donc Φ, et de même Φ_n et Φ_2 sont linéaires.

   Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = \sum_{k=0}^{2} a_k X^k$, alors $\Phi(P) = \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}\right]_k^{k+1} = \sum_{k=0}^{2} \frac{a_k}{k+1}\left((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right)$

   Or tous les termes sont de degré inférieur ou égal à 2 (pour $k=2$, $(X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$)

   Donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\boxed{\Phi_2 \text{ est un endomorphisme.}}$

2) On se place dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Il vient $\Phi_2(1) = X + 1 - X = 1$; $\Phi_2(X) = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 - X^2\right) = X + \frac{1}{2}$ et

   $\Phi_2(X^2) = \frac{1}{3}\left((X+1)^3 - X^3\right) = X^2 + X + \frac{1}{3}$

   Donc $M_B(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire et $Sp(\Phi_2) = \{1\}$.

   Si $M_B(\Phi_2)$ était diagonalisable, elle serait égale à I_3. Ce n'est pas le cas.

   Donc $\boxed{\Phi_2 \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3) On procède de même : Φ_n est linéaire. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

   $\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Donc $\boxed{\Phi_n \text{ est un endomorphisme.}}$

   On se place dans la base canonique $B = (1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il vient $\Phi_2(1) = X+1-X = 1$; $\Phi_2(X) = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 - X^2\right) = X + \frac{1}{2}$ et

$$\Phi_n(X^k) = \frac{1}{k+1}\left((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i} X^i$$

Donc $M_B(\Phi_n)$ est triangulaire et $Sp(\Phi_n) = \{1\}$.

Donc Φ_n n'est pas diagonalisable (sinon on aurait $M_B(\Phi_n) = I_{n+1}$)

4) On étudie le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
On note Id l'identité de $\mathbb{R}_n[X]$.
$\operatorname{Im}(\Phi_n - Id) = Vect\left((\Phi_n - Id)(X^k)\right)_{1\le k\le n}$ car $(\Phi_n - Id)(X^0) = 0$

Or pour $k \in [\![1,n]\!]$, $(\Phi_n - Id)(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i} X^i$

Donc $\deg(\Phi_n - Id)(X^k) = k-1$ et la famille $\left((\Phi_n - Id)(X^k)\right)_{1\le k\le n}$ est libre, car échelonnée en degré.

Donc $\dim\left(\operatorname{Im}(\Phi_n - Id)\right) = n$ et par théorème du rang $\dim\left(Ker(\Phi_n - Id)\right) = 1$.

Comme $1 \in Ker(\Phi_n - Id)$, on conclut $\boxed{Sp(\Phi_n) = \{1\} \text{ et } Ker(\Phi_n - Id) = Vect(1)}$

Exercice 39 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) : Soient $n \ge 2$, un entier, et $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

1) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^T AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^T AX\right)^T$ et montrer que $X^T AX = 0$.
2) Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est zéro. En déduire que M et N sont inversibles.
3) Montrer que M et N commutent, et qu'il en est de même pour M^{-1} et N^{-1}. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas -1 comme valeur propre.
4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in A_n(\mathbb{R})$ telle que $U = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$

1) On sait que $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $X^T \in M_{1,n}(\mathbb{R})$. Donc par produit matriciel, $X^T AX \in M_1(\mathbb{R})$ et on confond cette matrice avec son unique coefficient, donc $X^T AX \in \mathbb{R}$.
Dès lors, $\left(X^T AX\right)^T = \left(X^T AX\right)$ d'une part, et d'autre part, $\left(X^T AX\right)^T = \left(X^T A^T X\right) = -\left(X^T AX\right)$ car $A \in A_n(\mathbb{R})$. On a donc bien $\boxed{X^T AX = 0}$

2) On prend $\lambda \in Sp(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors $X^T AX = \lambda \|X\|^2$. Mais d'après 1), on a donc $\lambda \|X\|^2 = 0$, et comme $X \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc $\boxed{Sp(A) \subset \{0\}}$
Dès lors, 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de A, donc $\boxed{M = I_n + A \text{ et } N = I_n - A \text{ sont inversibles}}$.

3) On calcule $MN = (I_n + A)(I_n - A) = NM$ et $(NM)^{-1} = (MN)^{-1}$. Donc $N^{-1}M^{-1} = M^{-1}N^{-1}$
Donc $\boxed{M \text{ et } N \text{ commutent, et il en est de même pour } M^{-1} \text{ et } N^{-1}}$

Comme $A \in A_n(\mathbb{R})$, on a directement $M^T = N$, donc M et $M^T = N$ commutent.

On calcule alors $\Omega = M\left(M^T\right)^{-1}$, donc $\Omega^T = M^{-1}M^T$.

Puis $\Omega^T\Omega = M^{-1}M^T M\left(M^T\right)^{-1} = M^{-1}MM^T\left(M^T\right)^{-1} = I_n$.

Donc $\boxed{\Omega \in O_n(\mathbb{R})}$

Par l'absurde, on suppose que -1 est valeur propre de Ω.
Soit alors $X \neq 0$ tel que $MN^{-1}X = -X$. On remarque que $M = 2I_n - N$. Il vient donc $2N^{-1}X - X = -X$

Et $X=0$, ce qui est absurde. $\boxed{\text{Donc } -1 \text{ n'est pas valeur propre de } \Omega}$.

4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeur propre. Alors $I_n + U$ est inversible.
On procède par analyse et synthèse et on suppose que B existe. Alors $(I_n+B)U=(I_n-B)$, donc $B(I_n+U)=(I_n-U)$, donc $B=(I_n-U)(I_n+U)^{-1}$. Il y a unicité si existence.
Réciproquement, on pose $B=(I_n-U)(I_n+U)^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $B(I_n+U)=(I_n-U)$, donc $(I_n+U)^T B^T=(I_n-U)^T$ et $(I_n+U^T)B^T=(I_n-U^T)$, donc $U(I_n+U^T)B^T=U(I_n-U^T)$.
Comme $U \in O_n(\mathbb{R})$, $U^TU=UU^T=I_n$.
Donc $(I_n+U)B^T=-(I_n-U)=-B(I_n+U)$.
De plus, $B(I_n+U)=(I_n-U)$ et $(I_n+U)B=(I_n+U)(I_n-U)(I_n+U)^{-1}$.
Or $(I_n+U)(I_n-U)=I_n-U^2=(I_n-U)(I_n+U)$, donc $(I_n+U)B=(I_n-U)=-(I_n+U)B^T$
Donc comme I_n+U est inversible, $B^T=-B$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$.
Donc avec 2), -1 n'est pas valeur propre de B et $B(I_n+U)=(I_n-U)$, donc on a bien
$U=(I_n+B)^{-1}(I_n-B)$
$\boxed{B=(I_n-U)(I_n+U)^{-1} \text{ est l'unique matrice de } A_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } U=(I_n+B)^{-1}(I_n-B)}$.

Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :
Soit $f(x)=\exp(-x^2)$. Pour n entier naturel, x réel, soit $P_n(x)=(-1)^n f^{(n)}(x)\exp\left(x^2\right)$.

Pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, soit $\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)f(t)\,dt$.

1) Montrer que P_n est polynomiale, de degré n, et que le coefficient dominant de P_n est égal à $2n$
Etudier la parité de P_n.
2) Montrer que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\langle P_n, X^p\rangle$ pour $n \geq p$. Montrer que la famille des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer $\langle P_n, P_n\rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ $H(n)$: « P_n est polynomiale, de degré n, de coefficient dominant égal à $2n$ et de même parité que n ».
   - $H(0)$ est vraie avec $P_0=1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $P_n'(x)=(-1)^n\left(f^{(n+1)}(x)\exp\left(x^2\right)+2xf^{(n)}(x)\exp\left(x^2\right)\right)$.
   Donc $P_n'(x)=-P_{n+1}(x)+2xP_n(x)$, donc $\boxed{P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_n'(x)}$

   Or $P_n(x)=2nx^n+S_n(x)$, avec $\deg(S_n)<n$.
   Donc $P_{n+1}(x)=2(n+1)x^{n+1}+T_n(x)$, avec $\deg(T_n)<n+1$.
   Donc P_{n+1} est polynomiale, de degré $n+1$, et le coefficient dominant de P_{n+1} est égal à $2(n+1)$.
   Si n est pair, P_n est paire, donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x)=P_n(x)$ et en dérivant $P_n'(-x)=-P_n'(x)$.
   Donc $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P_n'(-x)=-P_{n+1}(-x)$ et P_{n+1} est impaire.
   De même si n est impair, P_n est impaire et P_{n+1} est paire.
   Donc $H(n+1)$ est vraie.

$\boxed{P_n \text{ est polynomiale, de degré } n\text{, de coefficient dominant égal à } 2n \text{ et de même parité que } n}$

2) Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)f(t)\,dt$. Vérifions que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Tout d'abord, soit $R=PQ\in\mathbb{R}[X]$. Alors par croissance comparée, $R(t)e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t\mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable en $+\infty$ et de même en $-\infty$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\langle P,Q\rangle$ existe bien.

De plus, soient $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $\langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle$ et $\langle,\rangle$ est symétrique.

De plus, $\langle P+\lambda R,Q\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}(P+\lambda R)(t)Q(t)e^{-t^2}dt=\langle P,Q\rangle+\lambda\langle R,Q\rangle$ (toutes les intégrales convergent donc on peut séparer en deux), donc par symétrie, $\langle,\rangle$ est bilinéaire.

En outre, $\langle P,P\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}P^2(t)e^{-t^2}dt\geq 0$. Enfin, si $\langle P,P\rangle=0$, alors la fonction $t\mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle. Donc $\forall t\in\mathbb{R},P^2(t)e^{-t^2}=0$ et P a une infinité de racines, donc $P=0$ et $\langle,\rangle$ est définie positif. $\boxed{\text{Donc } \langle,\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

Soit $n\geq p$. Alors $\left\langle P_n,X^p\right\rangle=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(t)t^p\,dt$

On effectue des intégrations par parties.

$f^{(n-1)}(t)t^p=(-1)^{n-1}t^pP_{n-1}(t)\exp(-t^2)\underset{t\to\pm\infty}{\to}0$ par croissance comparée.

Donc $\left\langle P_n,X^p\right\rangle=(-1)^{n+1}p\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n-1)}(t)t^{p-1}\,dt$ (et cette nouvelle intégrale converge aussi).

Puis $\left\langle P_n,X^p\right\rangle=(-1)^{n+p}p!\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n-p)}(t)\,dt$.

Si $p<n$, $f^{(n-1-p)}(t)=(-1)^{n-1-p}P_{n-p-1}(t)\exp(-t^2)\underset{t\to\pm\infty}{\to}0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n-p)}(t)\,dt=0$ et $\left\langle P_n,X^p\right\rangle=0$.

Si $p=n$, $\boxed{\left\langle P_n,X^n\right\rangle=(-1)^{n+n}n!\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=n!I}$, où $\boxed{I=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt=\sqrt{\pi}}$

Dès lors, si $k<n$, on écrit $P_k=\sum_{p=0}^{k}a_pX^p$ et $\langle P_n,P_k\rangle=\sum_{p=0}^{k}a_p\left\langle P_n,X^p\right\rangle=0$.

Si $k>n$, $\langle P_n,P_k\rangle=\langle P_k,P_n\rangle=0$

Donc $\boxed{\text{la famille des } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale}}$.

Enfin, $P_n=\sum_{p=0}^{n-1}a_pX^p+2nX^n$ avec 1), donc $\langle P_n,P_n\rangle=\sum_{p=0}^{n-1}a_p\left\langle P_n,X^p\right\rangle+2n\left\langle X^n,P_n\right\rangle$.

Donc $\boxed{\langle P_n,P_n\rangle=(2n)n!I}$

Exercice 41 (Oral Mines 23, Hugo A,3) : soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge. Pour $f,g\in E$, on note $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)dt$.

On considère $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Q_n\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j\in[\![1,n]\!],(Q_n)_{i,j}=\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$.

On suppose que pour $r\in\mathbb{N}^*$ fixé, Q_r est inversible.

1) Montrer que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive.
3) Montrer que $\varphi_{r+1}\in Vect(\varphi_1,...,\varphi_r)\Leftrightarrow Q_{r+1}$ est non inversible.

1) Pour $f,g\in E$, on pose $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)dt$. Vérifions que c'est un produit scalaire sur E. Tout d'abord, comme $|f\,g|\le\frac{1}{2}(f^2+g^2)$, on peut dire que $f\,g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc que $\langle f,g\rangle$ est bien défini.
De plus, soient $f,g,h\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Alors $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$ et $\langle,\rangle$ est symétrique.
De plus, $\langle f+\lambda g,h\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}(f+\lambda g)(t)h(t)\,dt=\langle f,g\rangle+\lambda\langle f,h\rangle$ (toutes les intégrales convergent donc on peut séparer en deux), donc par symétrie, $\langle,\rangle$ est bilinéaire.
En outre, $\langle f,f\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt\ge 0$. Enfin, si $\langle f,f\rangle=0$, alors la fonction $t\mapsto f^2(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle. Donc $\forall t\in\mathbb{R}, f(t)=0$ et $f=0$ et $\langle,\rangle$ est définie positif.
$\boxed{\text{Donc } \langle,\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

2) On prouve que $Q_r\in S_r^{++}(\mathbb{R})$. Pour cela, on considère $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}\in M_{r,1}(\mathbb{R})$.

On calcule $X^TQ_rX=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}x_ix_j\,(Q_r)_{i,j}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}x_ix_j\,\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$

Donc par bilinéarité : $X^TQ_rX=\left\langle\sum_{i=1}^{r}x_i\varphi_i,\sum_{i=1}^{r}x_j\varphi_j\right\rangle=\left\|\sum_{i=1}^{r}x_i\varphi_i\right\|^2\ge 0$.

Donc $Q_r\in S_r^{+}(\mathbb{R})$. De plus, Q_r est inversible, donc $0\notin Sp(Q_r)$.

Donc $Q_r\in S_r^{++}(\mathbb{R})$ et $Sp(Q_r)\subset\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\boxed{\text{la plus petite valeur propre de } Q_r \text{ est strictement positive}}$.

3) On procède par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose que $\varphi_{r+1}\in Vect(\varphi_1,...,\varphi_r)$. On peut écrire que $\varphi_{r+1}=\sum_{k=1}^{r}a_k\varphi_k$, avec $a_1,...,a_r\in\mathbb{R}$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!],(Q_{r+1})_{i,r+1}=\langle\varphi_i,\varphi_{r+1}\rangle=\left\langle\varphi_i,\sum_{k=1}^{r}a_k\varphi_k\right\rangle=\sum_{k=1}^{r}a_k\,\langle\varphi_i,\varphi_k\rangle$

Donc pour $i\in[\![1,n]\!]$, $(Q_{r+1})_{i,r+1}=\sum_{k=1}^{r}a_k\,(Q_{r+1})_{i,k}$.

Donc si on note $(C_1,...,C_{r+1})$ les colonnes de Q_{r+1}, il vient $C_{r+1}=\sum_{k=1}^{r} a_k C_k$.

Une des colonnes de Q_{r+1} est combinaison linéaire des autres, $\boxed{\text{donc } Q_{r+1} \text{ n'est pas inversible}}$.

$\Leftarrow$ On suppose que Q_{r+1} n'est pas inversible. Alors la famille $(C_1,...,C_{r+1})$ des colonnes de Q_{r+1} est liée et il existe $(\lambda_1,...,\lambda_{r+1})\neq(0,...,0)$ tels que $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k C_k=0$.

Donc pour $i\in[\![1,n+1]\!]$, $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\left(Q_{r+1}\right)_{i,k}=0$, donc $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\langle\varphi_i,\varphi_k\rangle=0$ et $\left\langle\varphi_i,\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\varphi_k\right\rangle=0$.

Donc par combinaison linéaire, $\left\langle\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_i\varphi_i,\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\varphi_k\right\rangle=0$ et $\left\|\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\varphi_k\right\|^2=0$, donc $\sum_{k=1}^{r+1}\lambda_k\varphi_k=0$.

Comme $(\lambda_1,...,\lambda_{r+1})\neq(0,...,0)$, la famille $\left(\varphi_1,...,\varphi_{r+1}\right)$ est liée.

De plus, $\left(\varphi_1,...,\varphi_r\right)$ est libre (en effet, si $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\varphi_k=0$, alors pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\left\langle\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\varphi_k,\varphi_i\right\rangle=0$, donc $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\langle\varphi_k,\varphi_i\rangle=0$ et $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k D_k=0$, où $(D_1,...,D_r)$ sont les colonnes de Q_r. Or Q_r est inversible, donc $(D_1,...,D_r)$ forment une famille libre et $(\lambda_1,...,\lambda_r)=(0,...,0)$)

Donc $\boxed{\varphi_{r+1}\in Vect\left(\varphi_1,...,\varphi_r\right)}$

Exercice 42 (Oral Mines 23, Alice) : soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ définis par $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$. On admet que c'est un produit scalaire.

1) Montrer que $\exists!\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les P_n soient deux à deux orthogonaux, que $\deg(P_n)=n$ et $\left\langle P_n,X^n\right\rangle=1$.
2) On note $Q_n(X)=(-1)^n P_n(-X)$. Montrer que $\left(Q_n\right)$ vérifie les trois conditions ci-dessus et en déduire que P_n est de même parité que n.
3) Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, avec $n\geq 2$. Montrer que $\langle P_n,Q\rangle=0$.
4) Expliciter P_0,P_1,P_2.

1) On prouve l'existence et l'unicité. On adapte le procédé de Gram-Schmidt car on veut une suite $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et pas seulement une famille finie.

   Existence : on calcule $\left\langle 1,X^0\right\rangle=\int_{-1}^{1}1\,dt=2$. $\boxed{\text{On pose } P_0=\frac{1}{2} \text{ et il convient}}$.

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose que $\left(P_0,P_1,...,P_n\right)$ ont été construits et sont deux à deux orthogonaux, et vérifient $\forall k\in[\![0,n]\!],\deg(P_k)=k$ et $\left\langle P_k,X^k\right\rangle=1$. On veut construire P_{n+1}.

   On note $F_k=\mathbb{R}_k[X]$ pour $k\in[\![0,n+1]\!]$. On pose $\boxed{Q_{n+1}=X^{n+1}-p_{Fn}\left(X^{n+1}\right)\in F_n^{\perp}}$, où p_{F_n} est la projection orthogonale sur F_n, $F_n^{\perp}$ l'orthogonal de F_n dans F_{n+1}.

   Il vient $\deg\left(Q_{n+1}\right)=n+1$

   On suppose par l'absurde $\left\langle Q_{n+1},X^{n+1}\right\rangle=0$. Alors $\left\langle Q_{n+1},Q_{n+1}\right\rangle=\left\langle Q_{n+1},X^{n+1}\right\rangle-\left\langle Q_{n+1},p_{Fn}\left(X^{n+1}\right)\right\rangle=0$ car $Q_{n+1}\in F_n^{\perp}$ et $p_{Fn}\left(X^{n+1}\right)\in F_n$. Donc $Q_{n+1}=0$, ce qui est absurde.

On pose alors $\boxed{P_{n+1} = \dfrac{1}{\langle Q_{n+1}, X^{n+1}\rangle} Q_{n+1}}$. On a bien $\langle P_{n+1}, X^{n+1}\rangle = 1$, $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et $P_{n+1} \in F_n^{\perp}$,

donc P_{n+1} est orthogonal à $(P_0,...,P_n)$ et la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue convient.

Unicité : on suppose qu'il existe une autre suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convient.

On a alors $P_0 - B_0 = \alpha \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\langle P_0 - B_0, 1\rangle = \langle P_0, 1\rangle - \langle B_0, 1\rangle = 0$. Mais $\langle P_0 - B_0, 1\rangle = 2\alpha$, donc $\alpha = 0$ et $P_0 = B_0$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \in \left(Vect(B_0,...,B_n)\right)^{\perp}$. Or $(B_0,...,B_n)$ est une base de F_n (c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc libre, et elle contient $(n+1)$ éléments).

Donc $B_{n+1} \in F_n^{\perp}$, où $F_n^{\perp}$ est l'orthogonal de F_n dans F_{n+1}.

Comme $\dim(F_n^{\perp}) = 1$, on peut écrire que $B_{n+1} = \lambda Q_{n+1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\langle B_{n+1}, X^{n+1}\rangle = 1 = \langle Q_{n+1}, X^{n+1}\rangle$, donc $\langle B_{n+1}, X^{n+1}\rangle = 1 = \lambda$ et $\lambda = 1$.

Donc $B_{n+1} = Q_{n+1}$ et on a bien $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci prouve l'unicité.

2) Soit $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a bien $\deg(Q_n) = n$.

Pour $k, n \in \mathbb{N}$ et $k \neq n$, $\langle Q_k, Q_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_k(-t)P_n(-t)\,dt = 0$ en posant $u = -t$ et avec $\langle P_k, P_n\rangle = 0$.

Enfin, $\langle Q_n, X^n\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} t^n P_n(-t)\,dt = 1$ en posant de nouveau $u = -t$.

Donc (Q_n) vérifie les trois conditions ci-dessus et d'après l'unicité du 1), on a $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = P_n$.

Donc $\boxed{\text{si } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est de même parité que } n}$

3) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, avec $n \geq 2$. Montrer que $\langle P_n, Q\rangle = 0$. On a montré au 1) que $P_n = \dfrac{1}{\langle Q_n, X^n\rangle} Q_n$,

avec $Q_n = X^n - p_{Fn-1}(X^n) \in F_{n-1}^{\perp}$, où $F_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc $\boxed{\langle P_n, Q\rangle = 0}$

4) On a vu que $P_0 = \dfrac{1}{2}$. De plus, si $S = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est pair, alors $S(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et par unicité des coefficients, les coefficients des termes de puissance impaire sont nuls. De même, si $S = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est impair, les coefficients des termes de puissance paire sont nuls.

Donc $P_1 = \alpha X$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_2 = aX^2 + b$.

Alors $\langle P_1, X\rangle = \dfrac{2\alpha}{3} = 1$, donc $\boxed{P_1 = \dfrac{3}{2} X}$

Puis $\langle P_2, P_0\rangle = 2\left(\dfrac{a}{3} + b\right) = 0$, donc $b = -\dfrac{a}{3}$ et $P_2 = a\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)$.

Puis $\langle P_2, X^2\rangle = 2a\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}\right) = 1$, donc $a = \dfrac{45}{8}$ et $\boxed{P_2 = \dfrac{45}{8}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)}$

Séance 8 : Mercredi 5 Juin (analyse)

Exercice 43 (Oral CCINP 23,3) : On note $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$

On définit la fonction f sur F par $f(x, y) = (x - y)^2 - xy$.

1) Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les extrema globaux de f sur F.

1) Soit, pour tout entier naturel n, $U_n = (x_n, y_n) \in F$. On suppose que $U_n = (x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (x, y)$. Montrons que $(x, y) \in F$. On sait que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$.
   Alors on sait que pour tout entier naturel n, $x_n \geq 0, y_n \geq 0, x_n + y_n \leq 1$, donc en passant ces inégalités à la limite, $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ et $(x, y) \in F$. $\boxed{\text{Donc } F \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^2.}$

2) Tout d'abord, si $(x, y) \in F$, il vient $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Donc $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ et F est borné.
   Comme f est continue sur le fermé borné F, par **théorème des bornes atteintes**, f possède un minimum et un maximum global sur F. Ils peuvent être atteints sur le bord, ou bien dans l'ensemble $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < 1\right\}$. C'est un ouvert comme intersection finie d'ouverts.
   Plus précisément, $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\right\} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\right\} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\right\}$ et comme $(x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\right\}$ est ouvert, et c'est la même chose pour les autres ensembles.
   Si f admet un extremum local atteint en $a \in U$, alors c'est un point critique et $\nabla f(a) = 0$.
   Or si $a = (x, y) \in U$, $\nabla f(a) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$.
   Donc f n'a pas de point critique, donc pax d'extremum local ni global dans U.
   Le maximum global et le minimum global sont donc atteints sur la frontière de F.
   On regarde $f(x, 0) = x^2$ et $f(0, y) = y^2$ dont le minimum est 0 et le maximum 1 dans F.
   De plus, $f(x, 1 - x) = (2x - 1)^2 - x(1 - x) = 5x^2 - 5x + 1$, maximale en 0 et 1 et minimale pour $x = \frac{1}{2}$.
   Donc $\boxed{\text{le maximum global de } f \text{ sur } F \text{ égal à 1 (atteint en } (0,1) \text{ et } (1,0)) \text{ et son minimum global à } -\frac{1}{4}.}$

Exercice 44 (Oral IMT 23, Jérémy,2) :

Etudier la nature de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \sum_{k=0}^{n} ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$.

On utilise le lien suite-série. On prend $n \in \mathbb{N}^*$.

On calcule $U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ch\left(\frac{1}{\sqrt{n-1+k}}\right) - n + 1 = ch\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) + \sum_{k=0}^{n-2} ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n + 1$.

Donc $U_n - U_{n-1} = ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) + ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+n-1}}\right) - ch\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - 1$.

On effectue un développement limité : $ch(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u^2 + O(u^4)$

Il vient donc $U_n - U_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n-1}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{(2n-1)(n-1)+2n(n-1)-(2n)(2n-1)}{(2n)(2n-1)(n-1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{3}{4n^2}$.

Donc $U_n-U_{n-1}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est positive, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 1}(U_n-U_{n-1})$ converge et avec le lien suite série, $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ converge}}$.

Exercice 45 (oral CCINP 23, Orane, Raphaël,3) : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, développable en série entière sur l'intervalle $]-r,r[$, avec $r>0$. Soit $\alpha>0$. On étudie (E) : $y'+\dfrac{\alpha}{x}y=\dfrac{f(x)}{x}$, avec $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x\in\,]0,r[$, on pose $T_\alpha f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}f(u)\,du$

1) Résoudre l'équation homogène $y'+\dfrac{\alpha}{x}y=0$ sur $]0,r[$
2) Soit $x\in\,]0,r[$.
   a) Montrer qu'il existe $M_x>0$ tel que $\forall t\in[0,x],|f(t)|\leq M_x$
   b) Montrer que $u\mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $]0,x]$.
3) Montrer que $T_\alpha f$ est solution de (E) sur $]0,r[$ et résoudre (E) sur $]0,r[$.
4) Montrer qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que $\forall x\in\,]0,r[,T_\alpha f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+\alpha}x^n$
5) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]0,r[$ telle que f possède une limite finie en 0.

1) L'équation s'écrit $y'=-\dfrac{\alpha}{x}y$ (H). Il vient $S_H=\{x\mapsto A\exp(-\alpha\ln(x)),A\in\mathbb{R}\}$.

   Donc $\boxed{S_H=\left\{x\mapsto\dfrac{A}{x^\alpha},A\in\mathbb{R}\right\}}$

2) a) Soit $x\in\,]0,r[$. f est développable en série entière sur $]-r,r[$ donc elle est continue sur $]-r,r[$ et donc sur $[0,x]$. Par théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur $[0,x]$.
   Donc $\boxed{\text{il existe } M_x>0 \text{ tel que } \forall t\in[0,x],|f(t)|\leq M_x}$

   b) $u\mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est continue sur $]0,x]$.
   De plus, si $u\in\,]0,x]$, alors $0\leq\left|u^{\alpha-1}f(u)\right|\leq\dfrac{M_x}{u^{1-\alpha}}$. Or $1-\alpha<1$, donc $u\mapsto\dfrac{M_x}{u^{1-\alpha}}$ est intégrable en 0, donc $u\mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ l'est aussi par majoration.
   Donc $\boxed{u\mapsto u^{\alpha-1}f(u) \text{ est intégrable sur }]0,x]}$.

3) Avec ce qui précède, $T_\alpha f$ est bien définie. De plus, pour $x\in\,]0,r[$,

$$T_\alpha f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x u^{\alpha-1}f(u)\,du=\frac{1}{x^\alpha}\left(\int_{r/2}^x u^{\alpha-1}f(u)\,du+\int_0^{r/2}u^{\alpha-1}f(u)\,du\right).$$

$u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)$ est continue sur $\left[\frac{r}{2}, x\right]$ (ou sur $\left[x, \frac{r}{2}\right]$), donc par théorème fondamental, $T_\alpha f$ est dérivable sur $\left]0, r\right[$ et $T_\alpha f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du + \frac{f(x)}{x} = -\frac{\alpha}{x} T_\alpha f(x) + \frac{f(x)}{x}$.

Donc $\boxed{T_\alpha f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \left]0, r\right[}$ et $\boxed{S_E = \left\{ x \mapsto \frac{A}{x^\alpha} + T_\alpha f(x), A \in \mathbb{R} \right\}}$

4) Pour $x \in \left]0, r\right[$, on sait que $T_\alpha f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du$.

Comme f est développable en série entière, il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall u \in \left]-r, r\right[, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n$.

Alors $T_\alpha f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^{n+\alpha-1} \right) du$.

On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

- On pose $h_n(u) = b_n u^{n+\alpha-1}$. Chaque h_n est intégrable sur $\left]0, x\right]$ ($\forall n \in \mathbb{N}, -n-\alpha+1 < 1$).
- $\sum h_n$ converge simplement sur $\left]0, x\right]$ (sa somme est $u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)$, continue sur $\left]0, x\right]$).
- $\int_0^x |h_n(u)|\, du = \frac{|b_n|}{n+\alpha} x^n$, donc $0 \le \int_0^x |h_n(u)|\, du = \frac{1}{\alpha} |b_n| \, |x^n|$ et comme $|x| < r$, $\sum b_n x^n$ converge absolument, donc $\sum \int_0^x |h_n(u)|\, du$ converge.

On a donc, en prenant $b_n = a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{T_\alpha f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x b_n u^{n+\alpha-1} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+\alpha} x^n}$

5) Tout d'abord, étudions la limite de $T_\alpha f$ en 0.

On cherche à utiliser le théorème de la double limite. On se place sur $\left]0, \frac{r}{2}\right]$

On note $g_n(x) = \frac{a_n}{n+\alpha} x^n$. Alors $0 \le \|g_n\|_{\infty,[0,r/2]} = \frac{|a_n|}{n+\alpha} \left(\frac{r}{2}\right)^n \le \frac{1}{\alpha} |a_n| \left(\frac{r}{2}\right)^n$

Or $\forall u \in \left]-r, r\right[, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, donc comme $0 \le \frac{r}{2} < R\left(\sum a_n u^n\right)$, $\sum a_n \left(\frac{r}{2}\right)^n$ converge absolument. Donc par majoration, $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\left]0, \frac{r}{2}\right]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \frac{a_n}{n+\alpha} x^n \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $g_0(x) = \frac{a_0}{\alpha} \underset{x\to 0}{\to} \frac{a_0}{\alpha}$.

Donc $T_\alpha f(x) \underset{x\to 0}{\to} \frac{a_0}{\alpha}$. De plus, si $A \ne 0$, $\frac{A}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{\to} \pm\infty$.

On sait que $S_E = \left\{ x \mapsto \frac{A}{x^\alpha} + T_\alpha f(x), A \in \mathbb{R} \right\}$

Donc $\boxed{T_\alpha f \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ sur } \left]0, r\right[\text{ qui possède une limite finie en } 0}$.

Exercice 46 (Oral Mines 23, Samuel,4) :

1) Soit $x>0$. Montrer qu'il existe un unique $t_x>0$ tel que $sh(x)=x+\frac{x^3}{6}sh\left(x\,t_x\right)$
2) Montrer que $sh\left(x\,t_x\right)>1$
3) Etudier les limites de t_x lorsque x tend vers 0 ou vers $+\infty$.

1) On fixe $x>0$. On cherche $t_x>0$ tel que $sh\left(x\,t_x\right)=\frac{6\left(sh(x)-x\right)}{x^3}$. Or sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc $y=\frac{6\left(sh(x)-x\right)}{x^3}$ possède un unique antécédent u_x par sh. On pose alors $t_x=\frac{u_x}{x}$ et on a bien $sh(x)=x+\frac{x^3}{6}sh\left(x\,t_x\right)$.

   De plus, on étudie $a:x\mapsto sh(x)-x$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}, a'(x)=ch(x)-1\geq 0$, avec $\forall x\in\mathbb{R}^*, a'(x)>0$.
   Donc comme a est continue sur $\mathbb{R}_+$, a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $x>0$, on peut dire que $y=\frac{6\left(sh(x)-x\right)}{x^3}>0$. Donc $sh(u_x)>sh(0)$ et par stricte croissance de sh, il vient $t_x=\frac{u_x}{x}>0$
   Enfin, par bijectivité de sh, t_x est bien unique (si on prend une autre solution t', on doit avoir $sh\left(x\,t_x\right)=sh\left(x\,t'\right)$, donc $x\,t_x=x\,t'$ et $t_x=t'$).
   Donc $\boxed{\text{il existe un unique } t_x>0 \text{ tel que } sh(x)=x+\frac{x^3}{6}sh\left(x\,t_x\right)}$

2) On utilise **la formule de Taylor avec reste intégral** pour sh (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et x, à l'ordre $n=3$. Il vient donc $sh(x)=x+\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{3!}sh(t)dt$.

   Or pour $t\in\left[0,x\right]$, $\frac{(x-t)^3}{3!}sh(t)\geq 0$ et $t\mapsto\frac{(x-t)^3}{3!}sh(t)$ est continue sur $\left[0,x\right]$, sans être la fonction nulle. Donc $\int_0^x\frac{(x-t)^3}{3!}sh(t)dt>0$ et $sh(x)>x+\frac{x^3}{6}$.

   Dès lors, $x+\frac{x^3}{6}sh\left(x\,t_x\right)>x+\frac{x^3}{6}$ donc $\boxed{sh\left(x\,t_x\right)>1}$

3) On sait que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $a\in\mathbb{R}_+^*$ l'unique réel tel que $sh(a)=1$.
   Alors $sh\left(x\,t_x\right)\geq sh\left(a\right)$, donc $x\,t_x\geq a$ et $t_x\geq\frac{a}{x}$, donc $\boxed{t_x\underset{x\to 0}{\to}+\infty}$

   Il vient par ailleurs $sh\left(x\,t_x\right)=\frac{6\left(sh(x)-x\right)}{x^3}$ donc $\ln\left(\frac{e^{xt_x}-e^{-xt_x}}{2}\right)=\ln(6)-3\ln(x)+\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x\right)$.
   On met le terme dominant en facteur :
   $\ln\left(e^{xt_x}\frac{1-e^{-2xt_x}}{2}\right)=\ln(6)-3\ln(x)+\ln\left(e^x\left(\frac{1-e^{-2x}}{2}-xe^{-x}\right)\right)$.
   Donc $xt_x\underset{x\to+\infty}{=}x+o(x)$, donc $t_x\underset{x\to+\infty}{=}1+o(1)$ et $\boxed{t_x\underset{x\to+\infty}{\to}1}$

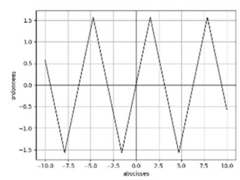
Exercice 47 (Oral Centrale 1 23, Bastien L,4) :

1) Dessiner le graphe de $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$.

2) Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} \sin^{2n+1}(x) \right) dx$.

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1) On note $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$. Elle est 2π périodique, donc il suffit de la tracer sur $[-\pi, \pi]$.
De plus, f est impaire car Arcsin l'est.
Enfin, pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \arcsin(\sin(x)) = x$ (on compose une fonction et sa réciproque).
On peut ainsi tracer le graphe de f.



2) On cherche à appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n(x) = \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} \sin^{2n+1}(x)$. $\|U_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} = \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)}$

On utilise la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$

Donc $\|U_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{2n+1} n} \dfrac{\sqrt{4n\pi}}{2n\pi} \left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \left(\dfrac{e}{n}\right)^{2n}$. Donc $\|U_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n\sqrt{n\pi}} = \dfrac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}} > 0$.

Comme $\dfrac{3}{2} > 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ converge, et la suite $\left(\dfrac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}\right)$ est à valeurs positives.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme chaque U_n est continue,

il vient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} \sin^{2n+1}(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\, dx \right)$ (et la série converge bien).

On retrouve les intégrales de Wallis : calculons $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\, dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sin^{2n} t\, dt$.

On effectue une intégration par parties en posant : $\begin{cases} u(t) = \sin^{2n}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$, avec $\begin{cases} u'(t) = 2n\cos(t)\sin^{2n-1}(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

Il vient : $J_n = 0 + 2n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{2n-1}(t)\, dt$.

On a donc $J_n = 0 + 2n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{2n-1}(t)\, dt = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^{2n-1}(t)\, dt = 2n(J_{n-1} - J_n)$.

Donc $J_n = \dfrac{2n}{2n+1} J_{n-1}$

Il vient par récurrence en itérant le procédé : $J_n = \dfrac{2n}{2n+1} J_{n-1} = \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2(n-1)}{2n-1}...\dfrac{2}{3}J_0$.

On multiplie en haut et en bas par les termes pairs : $J_n = \dfrac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}$.

Donc $\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} J_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}}$

3) On peut aussi calculer I d'une seconde manière en utilisant un développement en série entière de Arcsin . Soit $x \in \left]-1,1\right[$. $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, avec $a_n = \dfrac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}-k\right) = \dfrac{1}{n!}(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{(2k+1)}{2}$. Donc $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}$ et $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2} x^{2n}$.

En intégrant terme à terme et en utilisant $\text{Arcsin}(0)=0$, il vient $\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$.

Donc $I = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2 (2n+1)} \sin^{2n+1}(x) \right) d\,x = \int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(x))\, d\,x$.

Donc $\boxed{I = \int_0^{\pi/2} x dx = \dfrac{\pi^2}{8}}$. Il vient donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\pi^2}{8}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Exercice 48 (Oral Mines 23, Paul B,5) : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Etudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $F_{\alpha,\beta}$ définie par $F_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\{x\}^{\lfloor x \rfloor^\beta}\right)$, où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

On cherche d'abord à savoir si $F_{\alpha,\beta}$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \left]0,1\right[$. Alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et $\lfloor x \rfloor^\beta$ n'est pas défini si $\beta < 0$. On doit donc avoir $\beta \geq 0$.
On commence par traiter le cas $\beta = 0$.

Donc ce cas, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x$, donc $F_{\alpha,0}(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ et $F_{\alpha,0}$ est continue sur $\left]0,1\right[$.

De même, si $\beta > 0$, $F_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha$ et $F_{\alpha,\beta}$ est continue sur $\left]0,1\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \left[n,n+1\right[$, $F_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x-n)^{n^\beta}\right)$ et $F_{\alpha,\beta}$ est continue par opérations sur $\left[n,n+1\right[$. De plus, $F_{\alpha,\beta}(x) \underset{x\to(n+1)^-}{\rightarrow} (n+1)^\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (n+1)^\alpha$.

Donc $F_{\alpha,\beta}$ possède une limite finie à gauche en $(n+1)$ (c'est aussi le cas à droite en tout $n \in \mathbb{N}^*$ par continuité).

Donc $\boxed{F_{\alpha,\beta} \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}_+^* \text{ lorsque } \beta \geq 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}}$.

- Etude en 0^+ : on se place sur $]0,1[$ et il vient si $\beta > 0$: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor x \rfloor^{\beta} = 0$.

  Donc $F_{\alpha,\beta}(x) = x^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^0\right) = x^{\alpha}$. Donc $F_{\alpha,\beta}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha > -1$.

  Lorsque $\beta = 0$, $F_{\alpha,0}(x) = x^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\pi}{2} x^{\alpha+1}$ et $F_{\alpha,\beta}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha > -2$.

  Donc $\boxed{F_{\alpha,\beta} \text{ est intégrable en } 0^+ \text{ si et seulement si } \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha > -2 \\ \beta = 0 \end{cases}}$

- Etude en $+\infty$. On remarque tout d'abord que $F_{\alpha,\beta}$ est à valeurs positives.

  On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $J_n = \int_n^{n+1} F_{\alpha,\beta}(x)dx = \int_n^{n+1} x^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-n)^{n^{\beta}}\right)dx = \int_0^1 (u+n)^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(u)^{n^{\beta}}\right)du$.

  Ici, comme $u \in [0,1]$, il vient $\frac{\pi}{2}(u)^{n^{\beta}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

  Or si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \le \sin(t) \le t$. Donc $n^{\alpha} \int_0^1 (u)^{n^{\beta}} du \le J_n \le (1+n)^{\alpha} \frac{\pi}{2} \int_0^1 (u)^{n^{\beta}} du$.

  Donc $0 \le \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}+1} \le J_n \le \frac{(1+n)^{\alpha}}{n^{\beta}+1} \frac{\pi}{2}$.

  Si $\sum J_n$ converge, alors par majoration, $\sum \frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}+1}$ converge également.

  Or $\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$, donc comme ces séries sont à termes positifs, $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ converge et $\beta > 1+\alpha$.

  Réciproquement, si $\beta > 1+\alpha$, alors comme $\frac{(1+n)^{\alpha}}{n^{\beta}+1} \frac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \frac{\pi}{2}$, $\sum \frac{(1+n)^{\alpha}}{n^{\beta}+1} \frac{\pi}{2}$ converge et $\sum J_n$ converge. Donc $\boxed{\sum_{n \ge 1} J_n \text{ converge si et seulement si } \beta > 1+\alpha}$

  Montrons que $\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ converge si et seulement si $\sum_{n \ge 1} J_n$ converge.

  Si $\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ converge, alors $\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \int_1^{N+1} F_{\alpha,\beta}(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} J_n$, donc $\sum_{n \ge 1} J_n$ converge.

  Si $\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ diverge, alors comme $F_{\alpha,\beta}$ est à valeurs positives, $X \to \int_1^{X} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ est croissante donc $\int_1^{X} F_{\alpha,\beta}(x)dx \underset{X \to +\infty}{\to} +\infty$, donc par caractérisation séquentielle, $\lim_{N \to +\infty} \int_1^{N+1} F_{\alpha,\beta}(x)dx = +\infty$ et $\sum_{n \ge 1} J_n$ diverge.

  Donc finalement, $\boxed{\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx \text{ converge si et seulement si } \beta > 1+\alpha}$

Si $\beta = 0$, cette dernière condition devient $\alpha < -1$
En réunissant les deux conditions, on conclut :

$$\boxed{F_{\alpha,\beta} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > 1+\alpha \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -1 > \alpha > -2 \\ \beta = 0 \end{cases}}$$

La condition $\beta \ge 0$ est alors automatiquement vérifiée dans le premier cas.

Séance 9 : Lundi 10 Juin (algèbre)

Exercice 49 (oral CCINP 23, Simon,3) : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $M+M^T$ nilpotente.

1) Montrer que $M \in A_n(\mathbb{R})$.
2) Le résultat reste-t-il toujours vrai si on suppose $M \in M_n(\mathbb{C})$?

1) $S = M+M^T$ est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable. De plus, elle est nilpotente, donc admet un polynôme annulateur de la forme X^p avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Comme les valeurs propres de S sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme, 0 est la seule valeur propre possible de S. S étant diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc $S=0$ et $M^T=-M$, donc $\boxed{M \in A_n(\mathbb{R})}$

2) On cherche un contre-exemple lorsque $n=2$. On prend M symétrique complexe, mais non diagonalisable. On choisit $\boxed{M=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}}$. Alors $S=M+M^T=\begin{pmatrix}2 & 2i\\ 2i & -2\end{pmatrix}=2M$.
Donc pour $\lambda \in \mathbb{C}, \chi_S(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2i\\ -2i & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2$ (comme S n'est pas nulle, elle n'est pas diagonalisable).
En calculant S^2, ou avec Cayley-Hamilton, il vient $S^2=0$ donc $\boxed{S=M+M^T \text{ est nilpotente}}$. Pourtant, $\boxed{\text{on n'a pas } M^T=-M}$.

Exercice 50 (oral CCINP 23, Samuel,3) : pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A)=\max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.
Soit $\| \ \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A,B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|$.

1) Donner une matrice non nulle admettant uniquement 0 comme valeur propre. Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ n'est pas une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
2)
   a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle. Montrer que $XX^T \in M_n(\mathbb{C})$ et calculer ses coefficients diagonaux.
   b) Montrer que $\rho(A) \le \|A\|$. On pourra montrer que pour $\lambda \in Sp(A), \exists X \neq 0, AXX^T=\lambda XX^T$
3) On définit, pour $A=(a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$. On admet que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A,B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|$.
4) Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall i,j \in [\![1,n]\!], S_{i,j}=\frac{1}{2}$ si $|i-j|=1$ et $S_{i,j}=0$ sinon.
Montrer que si λ est valeur propre complexe de S, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\exists \theta \in [0,\pi], \lambda=\cos\theta$.
5) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\theta_k=\frac{k\pi}{n+1}$ et $X_k=\begin{pmatrix}\sin(\theta_k)\\ \vdots\\ \sin(n\theta_k)\end{pmatrix}$. Calculer SX_k et en déduire les valeurs propres de S.

1) On prend $\boxed{M=\begin{pmatrix}0 & & (1)\\ & \ddots & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}}$ triangulaire, avec tous ses termes diagonaux nuls et les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale non nuls (égaux à 1 par exemple).
Les éléments diagonaux sont alors les valeurs propres et $Sp(M)=\{0\}$.

Si par l'absurde $A \mapsto \rho(A)$ était une norme sur $M_n(\mathbb{C})$, alors on aurait $\rho(M)=0 \Rightarrow M=(0)$, ce qui n'est pas le cas avec l'exemple précédent. Donc $\boxed{A \mapsto \rho(A) \text{ n'est pas une norme sur } M_n(\mathbb{C})}$

2) a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors $X^T \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ et par produit matriciel, $\boxed{XX^T \in M_n(\mathbb{C})}$

De plus, pour $1 \le i, j \le n$, il vient $\left(XX^T\right)_{i,j} = X_i X_j$ donc $\boxed{\left(XX^T\right)_{i,i} = X_i^2}$

b) Soit $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda|$. Alors $,\exists X \neq 0, AX = \lambda X$. Soit un tel X. Alors $AXX^T = \lambda XX^T$
.

On a donc $\left\|AXX^T\right\| = |\lambda| \left\|XX^T\right\|$, avec $\left\|AXX^T\right\| \le \|A\| \left\|XX^T\right\|$, donc $|\lambda| \left\|XX^T\right\| \le \|A\| \left\|XX^T\right\|$.

De plus, comme $X \neq 0$, $\exists i \in [\![1,n]\!], X_i \neq 0$ et donc $\left(XX^T\right)_{i,i} = X_i^2 \neq 0$ donc $\left\|XX^T\right\| \neq 0$.

On a donc $|\lambda| \le \|A\|$ et $\boxed{\rho(A) \le \|A\|}$

3) Soient $A = \left(a_{i,j}\right) \in M_n(\mathbb{C}), B = \left(b_{i,j}\right) \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$. Alors $\left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right|$

Donc $\left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right|$, donc $\|AB\| = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right|\right)$.

Or $\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^n \left|a_{i,k}\right| \sum_{j=1}^n \left|b_{k,j}\right| \le \|A\| \|B\|$. Donc on a bien $\boxed{\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \le \| A \| \| B \|}$

4) On a ici $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/2 & & 1/2 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, donc avec $\|S\| = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^n \left|S_{i,j}\right|\right) = 1$

Or avcc 2b), on sait que $\rho(A) \le \|A\| = 1$.

Donc si λ est valeur propre complexe de S, alors $|\lambda| \le 1$. En outre, $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc par théorème spectral, toutes ses valeurs propres sont réelles donc $\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \exists \theta \in [0, \pi], \lambda = \cos\theta.}$

5) On calcule $SX_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(0\theta_k) + \sin(2\theta_k) \\ \sin(\theta_k) + \sin(3\theta_k) \\ \vdots \\ \sin((n-1)\theta_k) + \sin((n+1)\theta_k) \end{pmatrix}$.

Or pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a) + \sin(b) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Donc $SX_k = \cos(\theta_k)\begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix} = \cos(\theta_k) X_k$, donc $\boxed{SX_k = \cos(\theta_k) X_k}$

Or pour $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \neq 0$. On en déduit que les $\left(\cos(\theta_k)\right)_{1 \le k \le n}$ sont des valeurs propres de S.

Elles sont distinctes car $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$.

Comme il y en a n et que $S \in M_n(\mathbb{C})$, ce sont les seules. Donc $\boxed{Sp(S) = \left\{\cos(\theta_k), k \in [\![1,n]\!]\right\}}$

Exercice 51 (Oral IMT 23, Orane,4) : Par l'absurde, on considère $A \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1}$ est de rang 1.

1) Montrer qu'il existe un vecteur propre de A^2, et que -1 est valeur propre de A^2.
2) Déterminer les valeurs propres complexes de A
3) Conclure.

1) Comme $A + A^{-1}$ est de rang 1, elle n'est pas inversible et il existe $X \neq 0$, $\left(A + A^{-1}\right)X = 0$.

   Alors $A\left(A + A^{-1}\right)X = 0$, donc $A^2 X = -X$.

   $\boxed{\text{Donc il existe un vecteur propre de } A^2 \text{, et } -1 \text{ est valeur propre de } A^2}$.
2) On sait que A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

   $A = P\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$. Alors $A^2 = P\begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

   Donc $Sp\left(A^2\right) = \left\{a^2, b^2\right\}$. Comme -1 est valeur propre de A^2, on a $a^2 = -1$ ou $b^2 = -1$ et i ou $-i$ est valeur propre de A. Mais si i est valeur propre de A, son conjugué l'est aussi donc finalement $\boxed{Sp(A) = \{a, b\} = \{-i, i\}}$

3) Le calcul précédent, avec $a + b = i - i = 0$, montre que $A^2 = -I_2$. Donc $A\left(A + A^{-1}\right) = 0$ et comme A est inversible, $A + A^{-1} = 0$, ce qui est absurde puisqu'on suppose $rg\left(A + A^{-1}\right) = 1$.

   Donc $\boxed{\text{si } A \in GL_2(\mathbb{R}),\ rg\left(A + A^{-1}\right) \neq 1}$

Exercice 52 (Oral Mines 23, Lou Anne,4) : soit $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $P_n = 1 + X + ... + X^n$.

1) On suppose n pair. Montrer que si α est racine de P_n, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, α^{2^k} est aussi racine de ce même polynôme.
2) Qu'en est-il pour n impair ?

1) Cherchons les racines de P_n. α est racine de P_n si et seulement si $1 + \alpha + ... + \alpha^n = 0$. Comme $n + 1 \neq 0$, on a $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 1$ est racine de P_n si et seulement $\dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = 0$. Ceci équivaut à $\alpha^{n+1} = 1$, donc $\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont les racines } (n+1)-\text{èmes de } 1 \text{, sauf } 1.}$

   L'ensemble R des racines de P_n est $R = \left\{\exp\left(\dfrac{2ip\pi}{n+1}\right), p \in [\![1, n]\!]\right\}$.

   Ainsi, si α est racine de P_n, alors il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha = \exp\left(\dfrac{2ip\pi}{n+1}\right)$.

   Si on prend $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^{2^k} = \exp\left(\dfrac{2^{k+1}ip\pi}{n+1}\right)$. On constate alors que $\left(\alpha^{2^k}\right)^{n+1} = 1$, donc il suffit de prouver que $\alpha^{2^k} \neq 1$ pour déduire que $\alpha^{2^k} \in R$.

   Or $\alpha^{2^k} = 1 \Leftrightarrow \exp\left(\dfrac{2^{k+1}ip\pi}{n+1}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2^{k+1}ip\pi}{n+1} \equiv 0[2\pi]$.

   Donc si $\alpha^{2^k} = 1$, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2^{k+1}p\pi}{n+1} = 2\pi q$ (on a forcément $q \in \mathbb{N}^*$ car $\dfrac{2^{k+1}p\pi}{n+1} > 0$). On a alors $2^k p = q(n+1)$. Si on décompose q en produit de facteurs premiers, il vient $q = 2^m r$, avec r impair. Si $m < k$, alors $2^{k-m} p = r(n+1)$, où $r(n+1)$ est impair puisque n est pair.

C'est absurde car $2^{k-m}p$ est pair. Donc $m \geq k$ et $p = 2^{k-m} r(n+1) \geq n+1$.

C'est absurde car $p \in [\![1,n]\!]$. Donc $\boxed{\text{on n'a pas } \alpha^{2^k} = 1 \text{ et } \alpha^{2^k} \text{ est aussi racine de } P_n}$

2) Si n est impair, on note $n = 2p+1$. Alors $P_n(-1) = \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^k = 0$ donc (-1) est racine de P_n.

Pourtant, $(-1)^2 = 1$ ne l'est pas. $\boxed{\text{Le résultat n'est plus vrai si } n \text{ est impair}}$.

Exercice 53 (Oral Mines 23, Maxime,4) : soit $M \in M_d(\mathbb{C})$. On s'intéresse à la série entière $\sum \|M^n\| z^n$.

1) Montrer que le rayon de convergence ne dépend pas de la norme choisie.
2) Déterminer ce rayon pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.
3) La précédente matrice est-elle semblable à sa transposée ?

1) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Dès lors, si N et N' sont deux normes quelconques sur $M_d(\mathbb{C})$, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall A \in M_d(\mathbb{C})$, $N(A) \leq CN'(A)$.
Donc pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq N(M^n) \leq CN'(M^n)$. Dès lors, soit $r > 0$.
Si $\left(N'(M^n)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors c'est aussi le cas de $\left(N(M^n)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme N et N' sont quelconques, on a aussi l'autre implication (si $\left(N(M^n)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $\left(N'(M^n)r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi).

$$R\left(\sum N(M^n)z^n\right) = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}_+, (N(M^n)r^n) \text{ est bornée}\right\}\right) = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}_+, (N'(M^n)r^n) \text{ est bornée}\right\}\right)$$

Donc $R\left(\sum N(M^n)z^n\right) = R\left(\sum N'(M^n)z^n\right)$.

$\boxed{\text{Le rayon de convergence ne dépend pas de la norme choisie}}$.

2) On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = \alpha M^2$ (on peut aussi calculer χ_M et avec Cayley-Hamilton retrouver ce résultat). Donc par récurrence, $\forall n \geq 2, M^n = \alpha^{n-2}M^2$. Puis $\|M^n\| = |\alpha|^{n-2}\|M^2\|$.

Or $\sum_{n\geq 2} |\alpha|^{n-2} z^n$ converge si et seulement si $|\alpha z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \dfrac{1}{|\alpha|}$ (si $\alpha \neq 0$).

$\boxed{\text{Donc } R = \dfrac{1}{|\alpha|} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } R = +\infty \text{ si } \alpha = 0}$.

3) On considère f canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$. On cherche s'il existe une base $C = (u,v,w)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $M_C(f) = M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. On veut donc $\begin{cases} f(u) = u - v \\ f(v) = u - v \\ f(w) = u - v + \alpha w \end{cases}$.

On traite d'abord le cas $\alpha = 0$ **.** On doit avoir $f(u-v) = 0_E = f(u-w)$, donc $u-v, u-w \in \ker(f)$.

Or $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $rg(M) = 1 = rg(f)$ et $\ker(f) = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{C}\right\}$

De plus, on doit avoir $u - v \in \operatorname{Im}(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset Ker(f)$.

On prend $u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a bien $f(u) = u - v$. On a alors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f(v) = u - v$.

On prend $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $f(w) = u - v$. On pose $C = (u, v, w)$. Si B est la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors

$M_B(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det\left(M_B(C)\right) \neq 0$ donc C est une base de $\mathbb{C}^3$,avec $M_C(f) = M^T$, donc M et M^T sont semblables.

On traite le cas $\alpha \neq 0$ **.** On doit avoir $f(u-v) = 0_E$, donc $u - v \in \ker(f)$.

Or $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ donc $rg(M) = 2 = rg(f)$ et $\ker(f) = Vec\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

De plus, on doit avoir $u - v \in \operatorname{Im}(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, avec $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$

On prend $u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{pmatrix}$. On a bien $f(u) = u - v$. On a alors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/\alpha \end{pmatrix}$ et $f(v) = u - v$.

On veut $f(w) = u - v + \alpha w$, c'est-à-dire $\left(f - \alpha Id\right)(w) = u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On veut $\begin{cases} (1-\alpha)a - b = 1 \\ a - (1+\alpha)b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{\alpha} \\ b = -\dfrac{1}{\alpha} \\ a = b \end{cases}$. On prend $w = \begin{pmatrix} -1/\alpha \\ -1/\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a bien $f(w) = u - v + \alpha w$

On pose $C = (u, v, w)$. Si B est la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors $M_B(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & -1 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & -1/\alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $\det\left(M_B(C)\right) = -1 \neq 0$ donc C est une base de $\mathbb{C}^3$,avec $M_C(f) = M^T$, donc M et M^T sont semblables.

$\boxed{\text{Finalement, dans tous les cas, } M \text{ et } M^T \text{ sont bien semblables}}$.

Exercice 54 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :

Soit $\varphi \in L(\mathbb{R}[X])$ telle que $\varphi(1)=1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X], (\varphi(P))' = \varphi(P')$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $\varphi(X^n) = X^n + R_n$, avec $\deg(R_n) < n$.
2) En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. A quelles conditions la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?
3) Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Quel est son spectre ?

1) On procède **par récurrence** sur $n \in \mathbb{N}$ et on prouve $H(n)$: « il existe un polynôme R_n tel que $\deg(R_n) < n$ et $\varphi(X^n) = X^n + R_n$ ».

- $H(0)$ est vraie avec $R_0 = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Alors $\left(\varphi(X^{n+1})\right)' = (n+1)\varphi(X^n) = (n+1)X^n + R_n$

Si on note $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, il existe une constante a telle que $\varphi(X^{n+1}) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + a$.

On pose alors $R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + a = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} X^k + a$ et on a bien $\deg(R_{n+1}) < n+1$.

Donc $H(n+1)$ est vraie.

2) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors par linéarité, $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

On écrit la matrice de la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique B_n de $\mathbb{R}_n[X]$:

$M_B(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & (*) & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle ne possède qu'une seule valeur propre, donc est diagonalisable si et seulement si elle semblable à I_{n+1}, donc égale à I_{n+1}.

Donc $\boxed{\text{la restriction } \varphi_n \text{ de } \varphi \text{ à } \mathbb{R}_n[X] \text{ est diagonalisable si et seulement si } \varphi_n = Id_{\mathbb{R}_n[X]}}$

3) On prouve d'abord que φ est injective. Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors si on prend $n \geq \deg(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$. Mais $M_B(\varphi_n)$ est inversible, donc φ_n est bijective et $P = 0$.

Donc $\boxed{\ker(\varphi) = \{0\} \text{ et } \varphi \text{ est injective}}$.

On prouve ensuite que φ est surjective. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors si on prend $n \geq \deg(Q)$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme φ_n est bijective, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = \varphi_n(P) = Q$.

Q possède un antécédent par φ, $\boxed{\text{donc } \varphi \text{ est surjective}}$.

Ainsi, φ est linéaire et bijective, donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$

De plus, on a $\varphi(1) = 1$, donc $1 \in Sp(\varphi)$.

Réciproquement, si $\lambda \in Sp(\varphi)$, on prend $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

Alors si on prend $n \geq \deg(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\lambda \in Sp(\varphi_n)$.

Or avec $M_B(\varphi_n)$, $Sp(M_B(\varphi_n)) = \{1\}$, donc $\lambda = 1$ et $\boxed{Sp(\varphi) = \{1\}}$

Séance 10 : Lundi 10 Juin (analyse)

Exercice 55 (Oral IMT 23, Emma,2) : pour $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f
2) Montrer que f est continue sur D.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) f est-elle dérivable sur D ?

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on note $U_n(t) = \frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$. $U_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{n^2}$, et $\left(\frac{e^{-t}}{n^2}\right)$ est de signe fixe, avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum_{n\geq 0} U_n(t)$ converge et $\boxed{D = \mathbb{R}}$
2) On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.
   - Chaque U_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   - On considère deux réels a,b tels que $a \leq b$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a,b]$, $|U_n(t)| \leq \frac{e^{-a}}{n^2}$.

     Donc $0 \leq \|U_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{e^{-a}}{n^2}$ et par majoration, $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$

   Donc $\boxed{f \text{ est continue sur tout segment de } \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

3) On utilise le théorème de la double limite. $U_n(t) = \frac{e^{-t}}{n^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$

   De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $|U_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $0 \leq \|U_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n^2}$ et par majoration, $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

   Donc $\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0}$

4) On pose pour $t \in D$: $g(t) = f(t)e^t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$, On montre que g est dérivable sur D et par produit, comme $f(t) = e^t g(t)$, f sera dérivable sur $D = \mathbb{R}$

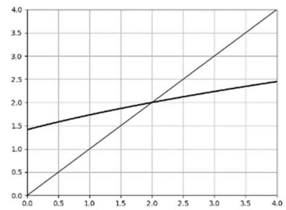
   On note $V_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$
   - Chaque fonction V_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ (pour $n \geq 1$).
   - $\sum V_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car $V_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$).
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n'(t) = \frac{-2t}{\left(n^2+t^2\right)^2}$. On considère deux réels a,b tels que $a \leq b$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a,b]$, $0 \leq |V_n'(t)| \leq \frac{2\left(|a|+|b|\right)}{n^4}$, donc $0 \leq \|V_n'\|_\infty \leq \frac{2\left(|a|+|b|\right)}{n^4}$. Donc $\sum_{n\geq 1} V_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur tout segment de } \mathbb{R}\text{, donc dérivable sur } D = \mathbb{R}}$.

Exercice 56 (Oral IMT 23, Paul C,3) :
Soit (U_n) une suite définie par $U_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

1) Nature de la suite (U_n) ?
2) Nature de la série de terme général $2-U_n$?

1) On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(2)=2$. On trace f et la droite d'équation $y = x$.



On étudie pour $x \in \mathbb{R}_+$ le signe de $g(x) = f(x) - x$ (on le voit bien sur le dessin).
$f(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \dfrac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x} = \dfrac{(2-x)(x+1)}{\sqrt{2+x}+x}$.
Donc pour $x \geq 2$, $f(x)-x \leq 0$ et pour $x \leq 2$, $f(x) - x \geq 0$. De plus, si $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$.
On distingue deux cas :

- Si $U_0 \geq 2$, alors comme f est croissante, $U_1 = f(U_0) \geq f(2) = 2$ et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$. Donc $f(U_n) - U_n \leq 0$ et (U_n) est décroissante, minorée par 2, donc elle converge vers $a \geq 2$. Comme f est continue en a, on doit avoir $f(a) = a$, donc $a = 2$.
- Si $0 \leq U_0 \leq 2$, alors $0 \leq U_1 = f(U_0) \leq f(2) = 2$ et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 2$. Donc $f(U_n) - U_n \geq 0$ et (U_n) est croissante, majorée par 2, donc elle converge vers $a \in [0,2]$. Comme f est continue en a, on doit avoir $f(a) = a$, donc $a = 2$.

Finalement, dans tous les cas, $\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2}$

2) On pose $V_n = 2 - U_n$. Alors $V_{n+1} = 2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{2+U_n} = \dfrac{4-(2+U_n)}{2+\sqrt{2+U_n}} = \dfrac{V_n}{2+\sqrt{2+U_n}}$.

Donc $|V_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|V_n|$ et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |V_n| \leq \dfrac{1}{2^n}|V_0|$.

Or $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge, donc par critère de majoration, $\sum V_n$ est absolument convergente.

Donc $\boxed{\sum(2-U_n) \text{ converge}}$.

Exercice 57 (oral CCINP 23, Emma,4) : Soit $n \geq 2$, avec $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$

1) Déterminer le domaine de définition de f_n.
2) Etudier ses variations et ses limites aux bornes.
3) Est-ce que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$?
4) Déterminer le domaine de définition D de $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$. Etudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ sur D.
5) Etudier la continuité de S sur D.
6) Etudier les limites de S en 1 et en $+\infty$

1) $\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, } D_{f_n} = \mathbb{R}}$. Si n est impair, on résout $1+x^n = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Donc $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } D_{f_n} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$

2) On distingue deux cas :

- Si n est **pair** : $\boxed{f_n \text{ est paire et strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ avec } f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$

  Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, avec $f_n(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$

- Si n est **impair**, on a $D_{f_n} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f_n'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{\left(1+x^n\right)^2}$, avec $n-1$ pair.

  Donc $\boxed{f_n \text{ est décroissante sur }]-\infty,-1[\text{ et sur }]-1,+\infty[}$.

  De plus, $\boxed{f_n(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0,\ f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0,\ f_n(x) \underset{x\to-1^-}{\to} -\infty \text{ et } f_n(x) \underset{x\to-1^+}{\to} +\infty}$

3) On fixe $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ On distingue plusieurs cas :

- Si $x = 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$
- Si $|x| < 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
- Si $|x| > 1$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\left|1+x^n\right|}$, avec $\left|1+x^n\right| \geq \left|x^n\right| - |1|$, donc $\left|1+x^n\right| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Donc $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}\setminus\{-1\} \text{ vers la fonction } f : \begin{cases} x \mapsto 1 \text{ si } |x|<1 \\ 1 \mapsto 1/2 \\ x \mapsto 0 \text{ si } |x|>1 \end{cases}}$

4) On étudie d'abord la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$.

- Si $|x| \leq 1$, $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 2}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(x)$ diverge.
- Si $|x| > 1$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\left|1+x^n\right|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$. Or $\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$ est positive (de signe fixe), et $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)^n$

  converge, donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

Donc $\boxed{D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$

De plus, $\|f_n\|_{\infty,]1,+\infty[} = \dfrac{1}{2}$ (f_n est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$).

Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} f_n \text{ ne converge pas normalement sur }]1,+\infty[, \text{ donc pas non plus sur } D}$.

5) On utilise le théorème de continuité de la somme des séries de fonctions.

- Chaque f_n est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$
- On prend $1 < a < b$ et on se place sur $[a,b]$. Alors $0 \leq \|f_n\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{1}{1+a^n} \leq \dfrac{1}{a^n}$.

  Donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge normalement sur tout segment $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Donc S est continue sur tout segment de $]1,+\infty[$, donc sur $]1,+\infty[$

On prend $a<-1$ et on se place sur $]-\infty,a[$. $0 \leq \|f_n\|_{\infty,]-\infty,a[} = \dfrac{1}{\left|1+a^n\right|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{|a|^n}$.

Donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge normalement sur tout segment $]-\infty,a[\subset]-\infty,-1[$.

Donc S est continue sur $]-\infty,-1[$

Finalement, $\boxed{S \text{ est continue sur } D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$

6) On étudie d'abord la limite en $+\infty$ avec le théorème de la double limite.

- $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$
- $0 \leq \|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} = \dfrac{1}{1+2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$, donc $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[2,+\infty[$.

Donc $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$

En outre, si on pose $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$, alors pour $A>0$, on considère $N\geq A+2$.

Alors $S(x)\geq \sum\limits_{n=2}^{N} f_n(x)$. Or $\sum\limits_{n=2}^{N} f_n(x) \underset{x\to 1}{\to} \sum\limits_{n=2}^{N} 1=(N-1)$ donc avec la définition de limite, il existe $\alpha>0$, $\forall x\in]1,1+\alpha]$, $S(x)\geq N-2\geq A$.

Toujours avec la définition de limite, $\boxed{S(x) \underset{x\to 1^+}{\to} +\infty}$

Exercice 58 (Oral Mines 23, Mailys,5) : Convergence et calcul de $\sum (-1)^n I_n$, avec $I_n=\int_0^{\pi} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}dt$

On sait que $I_n=\int_0^{\pi} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}dt$. On fixe $N\in\mathbb{N}^*$ et on étudie $S_N=\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k I_k$.

Il vient $S_N=\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+\cos^2 t}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \sin((2k+1)t)\right)dt$.

On calcule pour $t\in[0,\pi]$: $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \sin((2k+1)t)=\mathrm{Im}\left(e^{it}\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k e^{2ikt}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{it}\sum\limits_{k=0}^{N} (-e^{2it})^k\right)$

Pour $t\neq\dfrac{\pi}{2}$, $e^{it}\sum\limits_{k=0}^{N} (-e^{2it})^k=e^{it}\left(\dfrac{1-(-e^{2it})^{N+1}}{1+e^{2it}}\right)=\dfrac{e^{it}}{e^{it}\left(2\cos t\right)}\left(1+(-1)^N e^{i(2N+2)t}\right)$.

Donc $\sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \sin((2k+1)t)=\dfrac{(-1)^N \sin((2N+2)t)}{2\cos t}$.

La valeur $t=\dfrac{\pi}{2}$ pose problème.

En posant $u=\pi-t$, on remarque que $\int_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin((2n+1)u)}{1+\cos^2 u}du$.

Donc $I_n=2\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}dt$ et $S_N=2\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1+\cos^2 t}\left(\dfrac{(-1)^N \sin((2N+2)t)}{2\cos t}\right)dt=(-1)^N\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin((2N+2)t)}{\cos t(1+\cos^2 t)}dt$.

La fonction sous l'intégrale est prolongeable par continuité en $\pi/2$ donc cette intégrable impropre est convergente et on a bien l'égalité.

On pose alors $u=\dfrac{\pi}{2}-t$ pour se ramener à un problème en 0 : $S_N=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+2)u\right)}{\sin u(1+\sin^2 u)}du$.

Donc $S_N=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+2)u\right)}{\sin u}du-\int_0^{\pi/2}\sin\left((2N+2)u\right)\frac{\sin u}{(1+\sin^2 u)}du$.

On utilise le lemme de Riemann-Lebesgue qui se prouve à l'aide d'une intégration parties (vu en TD) :

Si g est C^1 sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin\left((2N+2)t\right)dt\underset{N\to+\infty}{\to}0$.

Donc ici $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\left((2N+2)u\right)\frac{\sin u}{(1+\sin^2 u)}du\underset{N\to+\infty}{\to}0$

Alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+2)u\right)}{\sin u}du=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+1)u\right)}{\sin u}du+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+2)u\right)-\sin\left((2N+1)u\right)}{\sin u}du$.

Pour $c,d\in\mathbb{R}$, $\sin(c)-\sin(d)=\operatorname{Im}(e^{ic}-e^{id})=\operatorname{Im}\left(e^{i(c+d)/2}(2i\sin\left(\frac{c-d}{2}\right)\right)=2\sin\left(\frac{c-d}{2}\right)\cos\left(\frac{c+d}{2}\right)$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+2)u\right)-\sin\left((2N+1)u\right)}{\sin u}du=2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\left((2N+3/2)u\right)}{\cos\frac{u}{2}}du\underset{N\to+\infty}{\to}0$, avec la même preuve que pour le lemme de Riemann-Lesbesgue.

Si on note $K_N=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+1)u\right)}{\sin u}du$, alors

$K_{N+1}-K_N=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left((2N+3)u\right)-\sin\left((2N+1)u\right)}{\sin u}du=2\int_0^{\pi/2}\cos\left((2N+2)u\right)du=0$, donc $K_N=K_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Donc $S_N\underset{N\to+\infty}{=}K_N+o(1)\underset{N\to+\infty}{\to}\dfrac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{\sum(-1)^n I_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n=\frac{\pi}{2}}$

Exercice 59 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) : on considère $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}dt$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer l'existence et calculer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

1) Soit $g(x,t)=\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}$ pour $x\in\mathbb{R}_+$ et $t>0$.

   On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :
   - Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour $x\in\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}_+^*$, $|g(x,t)|\le\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}=\varphi(t)$

     φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

     $t^{3/2}\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ donc $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, donc φ est intégrable en $+\infty$.

En outre, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}=\varphi(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{2}\dfrac{t^2}{t^2}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{2}$ est intégrable en 0 donc φ aussi.

Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$.

On utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout $x,t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto g(x,t)$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $t\in\mathbb{R}_+^*$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec ce qui précède (car φ l'est).

  De plus, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}$ et $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrale en $+\infty$ (car $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$) et en 0 (car $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{t}{2}$) donc est intégrable.
- En outre, si $0<a<b$ et $x\in[a,b]$, alors $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|=\left|(1-\cos(t))e^{-tx}\right|\le 2e^{-ta}=h(t)$

  Où h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur tout segment de } \mathbb{R}_+^* \text{ donc sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus, $f''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-tx}dt$

2) On fait une intégration par parties : on pose $a'(t)=\sin(t)$, $a(t)=1-\cos(t)$, $b(t)=\dfrac{1}{t}$ et $b'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$.

$a(t)b(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ et $a(t)b(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{t}{2}$ donc $a(t)b(t)\underset{t\to0}{\to}0$.

Donc par intégration par parties, I a même nature que $f(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ qui converge avec 1).

Donc $\boxed{I \text{ existe et } I=f(0)}$.

En outre, si $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-tx}dt=\frac{1}{x}-\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}e^{t(i-x)}dt\right)$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{t(i-x)}dt=-\frac{1}{x-i}\left[e^{t(i-x)}\right]_0^{+\infty}$, avec $\left|e^{t(i-x)}\right|=e^{-tx}\underset{t\to+\infty}{\to}0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{t(i-x)}dt=\frac{1}{x-i}=\frac{x+i}{x^2+1}$ et $\boxed{f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}}$, donc il existe une constante C telle que

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f'(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)+C$.

En outre, $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos(t))}{t}e^{-tx}dt\underset{x\to+\infty}{\to}0$ par théorème de convergence dominée (en effet, on prend $x\in[1,+\infty[$ et il vient $\left|\dfrac{(1-\cos(t))}{t}e^{-tx}\right|\le\left|\dfrac{(1-\cos(t))}{t}e^{-t}\right|$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec 1))

Donc $C=0$

On veut une primitive de $x\mapsto\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$:

$$\int^x\left(\ln(t)-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)dt=\left[t\left(\ln(t)-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)\right]^x-\int^x\left(1-\frac{t^2}{1+t^2}\right)dt=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\mathrm{Arctan}(x)$$

Donc il existe $C, D \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \text{Arctan}(x) + D$

De même, par convergence dominée, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et $\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$, donc $D = \frac{\pi}{2}$. Enfin, f est continue en 0 et $\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = x\ln(x) - x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\to} \frac{\pi}{2}$.

Donc $\boxed{I = f(0) = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 60 (oral X, Mines 23, Liam, 4) : soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) + (1+f'(x))^2 \le 1$.

1) Montrer que f est décroissante.
2) Montrer que f est la fonction nulle.

1) On a nécessairement pour $x \in \mathbb{R}$: $(1+f'(x))^2 \le 1$ donc $-1 \le 1+f'(x) \le 1$ et $f'(x) \le 0$. Donc :

$$\boxed{f \text{ est décroissante}}$$

2) On suppose par l'absurde que f n'est pas la fonction nulle. Soit alors $a \in \mathbb{R}, f(a) \ne 0$.

On suppose ici $f(a) < 0$. On a alors, comme f est décroissante, $\forall x \ge a, f(x) \le f(a) < 0$, donc on déduit $\forall x \ge a, f^2(x) \ge f^2(a)$. Soit alors $x \ge a$.

Il vient $(1+f'(x))^2 \le 1 - f^2(x) \le 1 - f^2(a)$, donc $1 - f^2(a) \ge 0$ et $f'(x) \le M = \sqrt{1-f^2(a)} - 1$.

Comme $f(a) < 0$, on a de plus $M < 0$.

Soit alors $x > a$. On applique le théorème des accroissements finis à f sur $[a, x]$(f est bien continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$). Soit $c \in]a, x[, f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$.

On a donc $f(x) \le f(a) + M(x-a)$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

C'est absurde car $f^2(x)+(1+f'(x))^2 \le 1$ entraîne que f est bornée.

Il reste à traiter le cas $f(a) > 0$. On procède de même : pour $x \le a, f(x) \ge f(a) > 0$, donc $\forall x \le a, f^2(x) \ge f^2(a)$. On obtient donc pour $x \le a$ $f(x) \ge f(a) + M(x-a)$ (car $x - a \le 0$):

Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ce qui reste absurde car f est bornée.

$$\boxed{f \text{ est donc bien la fonction nulle}}$$

Séance 11 : Mardi 11 Juin (algèbre)

Exercice 61 (oral CCINP 23, Paul,3) :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -256$
2) Soit $P = X^4 + \alpha X^3 + \beta X + 16$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Trouver α, β tels que P admette une racine triple.

1) $z^4 = -256 \Leftrightarrow z^4 = 4^4 e^{i\pi} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,3]\!], z = 4e^{i\pi/4}e^{ik\pi/2} = 2\sqrt{2}(1+i)i^k$.

Donc $\boxed{S = \left\{2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(i-1), -2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(1-i)\right\}}$

2) P admet une racine triple notée a si et seulement si $\begin{cases} P(a) = P'(a) = P''(a) = 0 \\ P^{(3)}(a) \neq 0 \end{cases}$

On calcule $P' = 4X^3 + 3\alpha X^2 + \beta$ et $P'' = 12X^2 + 6\alpha X = 6X(2X + \alpha)$

On procède par analyse et synthèse et on suppose que a est racine triple de P.

Alors $P''(a) = 0$ donc $a = 0$ ou $a = -\dfrac{\alpha}{2}$.

Or $P(a) \neq 0$ donc on n'a pas $a = 0$.

Donc $a = -\dfrac{\alpha}{2}$ et $0 = P'(a) = -\dfrac{1}{2}\alpha^3 + \dfrac{3}{4}\alpha^3 + \beta = \dfrac{1}{4}\alpha^3 + \beta$. Donc $\beta = -\dfrac{1}{4}\alpha^3$.

Puis $0 = P(a) = \dfrac{\alpha^4}{16} - \dfrac{\alpha^4}{8} + \dfrac{\alpha^4}{8} + 16$ et $\alpha^4 = -256$.

Donc $\alpha \in \left\{2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(i-1), -2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(1-i)\right\}$.

Réciproquement (synthèse), on suppose $\alpha \in \left\{2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(i-1), -2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(1-i)\right\}$.

Alors on pose $\beta = -\dfrac{1}{4}\alpha^3$. On sait que $\alpha^4 = -256$. Alors $P = X^4 + \alpha X^3 + -\dfrac{1}{4}\alpha^3 X + 16$.

On pose $a = -\dfrac{\alpha}{2}$. On calcule et on trouve $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$.

De plus, $P^{(3)}(a) = 24a + 6\alpha = -6\alpha \neq 0$.Donc a est racine triple de P

$$\boxed{P \text{ admet une racine triple si et seulement si } \begin{cases} \alpha \in \left\{2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(i-1), -2\sqrt{2}(1+i), 2\sqrt{2}(1-i)\right\} \\ \beta = -\dfrac{1}{4}\alpha^3 \end{cases}}$$

Exercice 62 (oral CCINP 23, Paul C,4) : Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit W l'ensemble des fonctions w telles que $w(t) = a\,t + b$, avec a et b des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des fonctions g C^2 telles que $g(0) = g(1) = 0$ et $g'(0) = g'(1) = 0$

Soit $H = \{g'', g \in G\}$ On considère sur E le produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1) Justifier que W est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
2) Soit $g \in G$. Montrer que $g'' \in W^{\perp}$.
3)
   a) En admettant que $E = W \oplus H$, établir que $W^{\perp} \subset H$.
   b) Déterminer entièrement $W^{\perp}$.
4) Soit $f \in E$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, tels que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$. Justifier que

   a et b sont solutions du système : $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \\ \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{2} = \displaystyle\int_0^1 F(t)\,dt \end{cases}$

5) Conclure.

1) On considère $u : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto t$. Alors $W = Vect(u,v)$ et $\boxed{W \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. De plus, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha u + \beta v = 0$, alors pour $t = 0$, il vient $\alpha = 0$, puis pour $t = 1$, $\beta = 0$. Donc (u,v) est libre et est une base de W. Donc $\boxed{\dim(W) = 2}$

2) Soit $g \in G$. Soit $w \in W$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $w(t) = at + b$, avec a et b des réels quelconques.
On calcule $\langle w, g'' \rangle = \int_0^1 (at+b)\, g''(t)\, dt$. On intègre deux fois par parties.
$\langle w, g'' \rangle = (a + bg'(1) - bg'(0)) - \int_0^1 a g'(t)\, dt = 0$ avec $g(0) = g(1) = 0$ et $g'(0) = g'(1) = 0$.
Donc $\boxed{g'' \in W^{\perp}}$

3) a) On admet $E = W \oplus H$. Soit $u \in W^{\perp}$. On peut écrire $u = w + h$, avec $w \in W$ et $h \in H$.
On veut prouver que $w = 0$. On calcule $\langle w, w \rangle = \langle w, u \rangle - \langle w, h \rangle$.
Or $h \in H$, donc avec 2), $h \in W^{\perp}$. Donc $\langle w, w \rangle = 0$ et $w = 0_E$.
Donc $u = h \in H$ et on a bien $\boxed{W^{\perp} \subset H}$.

b) Au 2), on a prouvé $H \subset W^{\perp}$ et on vient de montrer $W^{\perp} \subset H$. Donc $\boxed{W^{\perp} = H}$

4) Soit $f \in E$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, tels que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\, du$.
Alors avec 2), on sait que $h \in W^{\perp}$, donc $\langle h, u \rangle = \langle h, v \rangle = 0$.
On obtient donc $\begin{cases} \int_0^1 (at+b)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt \\ \int_0^1 (at+b)\, t\, dt = \int_0^1 t f(t)\, dt \end{cases}$. Or en intégrant par parties, $\int_0^1 t f(t)\, dt = F(1) - \int_0^1 F(t)\, dt$, donc
$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \int_0^1 f(t)\, dt = F(1) \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{2} + b - \int_0^1 F(t)\, dt \end{cases}$ et on déduit bien $\boxed{\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \int_0^1 f(t)\, dt \\ \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{2} = \int_0^1 F(t)\, dt \end{cases}}$

5) L'objectif est ici de montrer que $E = W \oplus H$. La question 4) est une analyse : si $f \in E$, on suppose que l'on peut écrire $f = w + h$, avec $w \in W$ et $h \in H$. On a ainsi $w(t) = at + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \int_0^1 f(t)\, dt \\ \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{2} = \int_0^1 F(t)\, dt \end{cases}$, donc $\begin{cases} a = 6\left(\int_0^1 f(t)\, dt - 2\int_0^1 F(t)\, dt \right) \\ b = -2\int_0^1 f(t)\, dt + 6\int_0^1 F(t)\, dt \end{cases}$ (*) et on a unicité si existence de w et de $h = f - w$.
Réciproquement (synthèse), on suppose que a, b sont donnés par (*) et on considère $w(t) = at + b$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $h = f - w$. On a bien $w \in W$. Il faut montrer que $h \in H$.

Comme a,b sont donnés par $(*)$, il vient $\begin{cases} \dfrac{a}{2}+b=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{2}=\displaystyle\int_0^1 F(t)\,dt \end{cases}$.

On sait que h est continue sur $[0,1]$. On pose pour $x\in[0,1]$: $g(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u h(t)dt\right)du$. Alors par théorème fondamental, il vient $g'(x)=\displaystyle\int_0^x h(t)dt$ et $g''=h$. Montrons que $g\in G$. On a $g'(0)=0$ et $g'(1)=\displaystyle\int_0^1 h(t)dt=\int_0^1 f(t)\,dt-\left(\frac{a}{2}+b\right)=0$.

On a aussi $g(0)=0$ et $g(1)=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^u h(t)dt\right)du=\int_0^1\left(F(u)-a\frac{u^2}{2}-bu\right)du=0$, donc $g\in G$ et $h=g''\in H$.

On a montré que $\forall f\in E,\exists!(w,h)\in W\times H, f=w+h$. $\boxed{\text{On a bien } E=W\oplus H}$

Exercice 63 (Oral IMT 23, Paul C,4) : soit $A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$

Soit ω un complexe tel que $\omega^n=1$. Soit $P=a_0+a_1X+...+a_{n-1}X^{n-1}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. Soit $U=\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que U est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ que l'on explicitera en fonction de P.
2) A quelle condition $\lim\limits_{N\to+\infty} A^N$ existe-t-elle ?

1) On calcule $AU=\begin{pmatrix} a_0+a_1\omega+...+a_{n-1}\,\omega^{n-1} \\ a_0\omega+a_1\omega^2+...+a_{n-1}\,\omega^n \\ \vdots \\ a_0\omega^{n-1}+a_1\,\omega^n+...+a_{n-1}\,\omega^{2n-2} \end{pmatrix}=P(\omega)U$.

$\boxed{\text{Donc } U \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } P(\omega)}$.

On pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et pour $p\in[\![0,n-1]\!]$: $U_p=\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^p \\ \vdots \\ \omega^{p(n-1)} \end{pmatrix}$.

Comme $(\omega^p)^n=1$ (ce sont les racine n-èmes de l'unité), on sait avec 1) que $AU_p=P(\omega^p)U_p$.

De plus, on note B la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $C=(U_0,...,U_{n-1})$.

Alors $M_B(C) = P = V_n(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & & & \omega^{n-1} \\ 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \cdots & \left(\omega^{n-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$. On reconnait la transposée de la matrice de Vandermonde, et comme les racines n-èmes de l'unité sont toutes distinctes, elle est inversible. Donc C est une base de $\mathbb{C}^n$ et si a est canoniquement associée à A, alors

$M_C(a) = D = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & & (0) \\ 0 & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$ est diagonale.

Par changement de base, il vient alors $A = PDP^{-1}$ puis, par récurrence, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $A^N = P\,D^N P^{-1}$ et $D^N = P^{-1} A^N P$.

L'application $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$ est linéaire en dimension finie, donc continue. Dès lors, si (D^N) converge, alors (A^N) converge aussi, et de même, si (A^N) converge, alors (D^N) aussi.

Or $D^N = \begin{pmatrix} \left(P(1)\right)^N & 0 & & (0) \\ 0 & P(\omega)^N & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & P(\omega^{n-1})^N \end{pmatrix}$.

Dès lors, $\boxed{(A^N) \text{ converge si et seulement si } \forall p \in [\![0, n-1]\!], \left(\left|P(\omega^p)\right| < 1 \text{ ou } P(\omega^p) = 1\right)}$

(en effet, si pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$, alors $\left|q^n\right| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc $\left(q^n\right)$ diverge. En outre, si $|q| = 1$ et $q \neq 1$ $q = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi$, alors $\left(q^n\right)$ diverge aussi car $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\to} q \neq 1$).

Exercice 64 (Oral Mines 23, Ali,3) : Déterminer les solutions dans $M_2(\mathbb{C})$ de l'équation $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

On procède par analyse et synthèse : on suppose que A convient

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

Comme $A^n = T$, on doit avoir $AT = TA$. Donc $\begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d+b \end{pmatrix}$, donc $b = 0, a = d$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Donc $A = a\,I_2 + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $K^2 = (0)$. Comme aI_2 et K commutent, il vient :

$A^n = a^n I_2 + na^{n-1}cK = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}c \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. Or $A^n = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}c = 1 \end{cases}$ et il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right) = \omega_k$. De plus, $nc = a$ et $c = \dfrac{a}{n}$.

Donc $A=\begin{pmatrix}\omega_k & \dfrac{\omega_k}{n}\\ 0 & \omega_k\end{pmatrix}$. Réciproquement, soit $A=\begin{pmatrix}\omega_k & \dfrac{\omega_k}{n}\\ 0 & \omega_k\end{pmatrix}=A=\omega_k I_2+\dfrac{\omega_k}{n}K$.

Alors avec les calculs précédents, on a bien $A^n=T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 65 (Oral Mines 23, Mathilde,4) : Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X+X^T=Tr(X)A$ d'inconnue $X\in M_n(\mathbb{R})$.
On pourra distinguer les cas $Tr(A)=2$ et $Tr(A)\neq 2$

On procède par analyse et synthèse : on suppose que $X\in M_n(\mathbb{R})$ est solution de $X+X^T=Tr(X)A \quad (E)$.
On a alors $Tr(X)+Tr\left(X^T\right)=Tr(X)Tr(A)$, donc $2Tr(X)=Tr(A)Tr(X)$.
On distingue deux cas :

- Si $Tr(A)\neq 2$, alors $Tr(X)=0$, donc $X+X^T=0$ et $X\in A_n(\mathbb{R})$.

  Réciproquement, si $X\in A_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux sont nuls et on a bien $X+X^T=Tr(X)A$.

  Donc $\boxed{\text{si } Tr(A)\neq 2,\ S=A_n(\mathbb{R})}$
- Si $Tr(A)=2$, on utilise que $S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})=M_n(\mathbb{R})$ et on écrit $X=U+V$, avec $U\in S_n(\mathbb{R})$ et $V\in A_n(\mathbb{R})$. L'équation (E) s'écrit alors $U+U=Tr(U)A$ (car $Tr(X)=Tr(U)+0$).

  Donc $U=\dfrac{Tr(U)}{2}A$ et $\exists\alpha\in\mathbb{R}, U=\alpha A$

  - Si $A\notin S_n(\mathbb{R})$, on a nécessairement $\alpha=0$ (sinon $A=\dfrac{1}{\alpha}U\in S_n(\mathbb{R})$), donc $U=0$ et $X\in A_n(\mathbb{R})$.

    Réciproquement, si $X\in A_n(\mathbb{R})$, on a bien $X+X^T=Tr(X)A$.

    $\boxed{\text{Donc si } A\notin S_n(\mathbb{R}) \text{ et } Tr(A)=2,\text{ alors } S=A_n(\mathbb{R})}$.

  - Si $A\in S_n(\mathbb{R})$, on a obtenu $X=\alpha A+V$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

    Etudions réciproquement si ces matrices conviennent : on a alors $Tr(X)=\alpha Tr(A)+Tr(V)=2\alpha$.

    Donc $X+X^T=2\alpha A=Tr(X)A$. Donc X est bien solution de (E).

    Donc $\boxed{\text{si } A\in S_n(\mathbb{R}) \text{ et } Tr(A)=2,\text{ alors } S=\left\{\alpha A+V,\alpha\in\mathbb{R},V\in A_n(\mathbb{R})\right\}=Vect(A)\oplus A_n(\mathbb{R})}$

Exercice 66 (Oral Centrale 18, Mines 23, Paul B et Yanis,4) : soit E un espace vectoriel de dimension N. Soit $n=\left\lfloor \dfrac{N}{3}\right\rfloor$. Soit $u\in L(E)$ tel que $rg(u)\geq N-n$ et $u^3=0$.

1) Que peut-on dire de $rg(u^2)$? Montrer que $N=3n$.
2) Montrer que $A=\begin{pmatrix}0_n & I_n & 0_n\\ 0_n & 0_n & I_n\\ 0_n & 0_n & 0_n\end{pmatrix}$ est la matrice de u dans une certaine base.

1) On sait que $u^3=0$, donc que $\mathrm{Im}(u^2)\subset\ker(u)$ et par théorème du rang, $\dim(\ker(u))\leq n$ puisque $rg(u)\geq N-n$. Donc $\boxed{rg(u^2)\leq n}$

   De plus, on écrit le théorème du rang pour $f:\begin{array}{l}\mathrm{Im}(u)\to E\\ x\mapsto u(x)\end{array}$.

On a $\mathrm{Im}(f)=\{u(y), y\in \mathrm{Im}(u)\}=\mathrm{Im}(u^2)$ et $\ker(f)=\mathrm{Im}\, u\cap \ker u$. Donc en appliquant le théorème du rang à f : $rg(u)=\dim(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u)+rg(u^2)$.
Donc $\dim(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u)=-rg(u^2)+rg(u)\geq N-2n$.
De plus, $\mathrm{Im}\, u\cap \ker u\subset \ker(u)$ donc $\dim\left(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u\right)\leq n$.
On en déduit que $n\geq N-2n$, donc $N\leq 3n$.
Mais par ailleurs, $n=\left\lfloor \frac{N}{3}\right\rfloor \leq \frac{N}{3}$, donc $N\geq 3n$. Ainsi, on a bien $\boxed{N=3n}$.

2) On cherche une base $B=(e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_{2n},e_{2n+1},...,e_{3n})$ de E dans laquelle la matrice de u est $A=\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$. On veut ainsi pour $k\in [\![1,n]\!]$: $e_{n+k}=u(e_k)$ et $e_{2n+k}=u^2(e_k)=u(e_{n+k})$.
On doit donc avoir $e_{2n+1},...,e_{3n}\in \mathrm{Im}(u^2)$

Des inégalités précédentes, on déduit que $\dim(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u)=-rg(u^2)+rg(u)\geq N-2n=n$, et par ailleurs $\mathrm{Im}\, u\cap \ker u\subset \ker(u)$ donc $\dim\left(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u\right)\leq n$.
Donc $\dim\left(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u\right)=n$, et $rg(u^2)=-\dim(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u)+rg(u)=-n+rg(u)\geq -n+2n=n$
Comme on a prouvé $rg(u^2)\leq n$ au début, on conclut $\boxed{rg(u^2)=n}$ et
$rg(u)=\dim(\mathrm{Im}\, u\cap \ker u)+rg(u^2)=2n$

On prend une base $(e_{2n+1},...,e_{3n})$ de $\mathrm{Im}(u^2)$ et on prend $e_1,...,e_n\in E$ tels que pour $k\in [\![1,n]\!]$: $e_{2n+k}=u^2(e_k)$. On pose aussi $e_{n+k}=u(e_k)$.
On prouve que $B=(u^2(e_1),...,u^2(e_n),u(e_1),...,u(e_n),e_1,...,e_n)$ est une base de E.

Tout d'abord, elle contient $N=3n$ vecteurs donc il suffit de prouver qu'elle est libre.
On considère $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n,\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que
$\alpha_1 u^2(e_1)+...+\alpha_n u^2(e_n)+\beta_1 u(e_1)+...+\beta_n u(e_n)+\lambda_1 e_1+...+\lambda_n e_n=0_E$.

On applique u^2 (avec $u^3=0$) : $\lambda_1 u^2(e_1)+...+\lambda_n u^2(e_n)=0_E$.
Or $(e_{2n+1},...,e_{3n})=(u^2(e_1),...,u^2(e_n))$ est libre, donc $\lambda_1=...=\lambda_n=0$
Puis $\beta_1=...=\beta_n=0$ et $\alpha_1=...=\alpha_n=0$
Donc $\boxed{B=(u^2(e_1),...,u^2(e_n),u(e_1),...,u(e_n),e_1,...,e_n) \text{ est une base de } E \text{ telle que } M_B(u)=A}$

Séance 12 : Jeudi 13 Juin (divers)

Exercice 67 (oral CCINP 23, Orane,3) : soit $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver D diagonale et P inversible telles que $A=PDP^{-1}$
2) Trouver $B\in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3=A$.

1) On cherche à diagonaliser A. On calcule $\chi_A=\begin{vmatrix} X+5 & -3 \\ -6 & X+2 \end{vmatrix}=X^2+7X-8=(X-1)(X+8)$.
Donc $Sp(A)=\{-8,1\}$. Comme A possède deux valeurs propres et que $A\in M_2(\mathbb{R})$, A est diagonalisable, $M_{n,1}(\mathbb{R})=\ker(A-I_2)\oplus\ker(A+8I_2)$ et $\dim\left(\ker(A-I_2)\right)=\dim\left(\ker(A+8I_2)\right)=1$ (la multiplicité de chaque racine vaut 1)

De plus, $A-I_2=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A-I_2)$.

$A+8I_2=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A+8I_2)$.

Alors comme $M_{n,1}(\mathbb{R})=\ker(A-I_2)\oplus\ker(A+8I_2)$, $C=(U,V)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}^2$, et si B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il vient par formule de changement de base pour l'endomorphisme canoniquement associé à A : $\boxed{A=PDP^{-1}\text{, avec } D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$

2) On pose $\boxed{B=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}P^{-1}}$. Alors $B^3=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}^3P^{-1}=PDP^{-1}=A$. Donc B convient.

On obtient $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}P$, donc $B=\frac{1}{3}P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}P$

On obtient $\boxed{B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \text{ qui vérifie bien } B^3=A}$

Exercice 68 (Oral IMT 23, Jérémy,2) : Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de ls suite de fonctions définie par $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}\left(x^3+x\right)n}{1+nx}$.

Il vient pour $x=0$: $f_n(0)=0\underset{n\to+\infty}{\to}0=f(0)$.

Pour $x>0$, $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}\left(x^3+x\right)n}{1+nx}\to e^{-x}\left(x^2+1\right)=f(x)$

Si la suite de fonctions (f_n) convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, sa limite serait nécessairement f (puisque la convergence simple entraîne la convergence uniforme). Comme chaque fonction f_n est continue, f le serait aussi. Or f n'est pas continue en 0, donc $\boxed{(f_n)\text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}_+}$,

Exercice 69 (Oral CCINP 23, Ethan) : sous réserve de convergence, on note $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}dy$

1) Soit $\varepsilon\in[0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$
2)
   a) Montrer que $f(0)$ existe et donner sa valeur.
   b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3)
   a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin(t))\,dt$
   b) Montrer que f est C^2 sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, x f''(x)+f'(x)+x f(x)=0$.
5) Montrer $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$

1) Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Alors $\boxed{\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \text{Arcsin}(\varepsilon)}$.

2) a) On revient à la définition d'intégrale généralisée : en cas d'existence, $f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$.

Or pour $\varepsilon \in [0,1[$, $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \text{Arcsin}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 1}{\to} \frac{\pi}{2}$.

Donc $f(0)$ existe et $\boxed{f(0) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1}$

b) On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres : pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0,1[$, on pose $g(x,y) = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}$.

Alors pour tout $y \in [0,1[$, $x \mapsto g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \le |g(x,y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = h(y)$, où h est positive et intégrable sur $[0,1[$ avec 2a) ($\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$ est convergente).

Donc $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue un changement de variable et on pose $y = \sin(t)$. Alors $dy = \cos(t)dt$

Il vient $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x\sin(t))}{|\cos t|} \cos t \, dt$ (les deux intégrales ont même nature, donc comme la première converge, l'autre aussi). Donc on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\, dt}$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose a). On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto u(x,t)$ est C^2 sur $\mathbb{R}$. De plus, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))$.
- Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u(x,t)| \le 1$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \le 1$ et $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \le 1$, où $t \mapsto 1$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\boxed{f \text{ est } C^2 \text{ sur } \mathbb{R},}$

et si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(x\sin(t))\, dt$ et $f''(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\, dt$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$x f''(x) + f'(x) + x f(x) = \frac{2}{\pi}\left(x \int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2(t)\right)\cos(x\sin(t))\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(x\sin(t))\, dt \right)$$

Donc $x\,f''(x)+f'(x)+x\,f(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big(x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))-\sin(t)\sin(x\sin(t))\Big)dt\right)$

On conclut $\boxed{x\,f''(x)+f'(x)+x\,f(x)=\dfrac{2}{\pi}\big[\cos(t)\sin(x\sin(t))\big]_0^{\pi/2}=0}$

5) Soit $x\in\mathbb{R}$. On sait que $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin(t))\,dt=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}\sin^{2n}(t)}{(2n)!}dt$.

On pose $U_n(t)=\dfrac{(-1)^n x^{2n}\sin^{2n}(t)}{(2n)!}$. Si $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $|U_n(t)|\le\dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ donc $\|U_n\|_\infty\le\dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\ge0}U_n$ converge normalement sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme de plus chaque U_n est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut échanger série et intégrale : $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!}\,dt$.

Donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, avec $a_0=f(0)=1$.

De plus, f est solution de $(E): x\,y''+y'+x\,y=0$.

Or $xf(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n$

$f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf''(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$

Donc $a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big((n+1)^2a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n=0$ et par unicité du développement en série entière,

$\begin{cases}a_1=0\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,(n+1)^2a_{n+1}+a_{n-1}=0\end{cases}$,

donc $\forall n\in\mathbb{N},a_{2n+1}=0$ et si $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=-\dfrac{a_{2(n-1)}}{4n^2}=(-1)^2\dfrac{a_{2(n-2)}}{4n^2\,4(n-1)^2}$

Par récurrence, $a_{2n}=(-1)^n\dfrac{a_0}{4^n(n!)^2}$.

On obtient bien $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}}$

Exercice 70 (Oral Mines 22,23, Samuel, 4) Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$

1) Montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et $X+\lambda$ aient la même loi.
2) On suppose $P(X=0)<1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour qu'il existe une variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et λX aient la même loi.

1) On suppose par l'absurde qu'il existe une variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et $X+\lambda$ aient la même loi. Soit $x\in X(\Omega)$. On suppose que $P(X=x)=c>0$. Alors $P(X=x-\lambda)=P(X+\lambda=x)=c$ puisque $X+\lambda\sim X$.

De même, $P(X=x-2\lambda)=c$ et par récurrence, pour $k\in\mathbb{N}$, $P(X=x-k\lambda)=c$.

Donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=x-k\lambda)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=x-k\lambda)$ car la réunion est disjointe puisque $\lambda\in\mathbb{C}^*$.

Donc $P\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=x-k\lambda)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c=+\infty>1$

et c'est absurde. Donc $\forall x\in X(\Omega),P(X=x)=0$.

Mais $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable car X est une variable aléatoire discrète.

Donc $X(\Omega)=\bigcup_{x\in X(\Omega)}\{x\}$ et $P(X\in X(\Omega))=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)=0$ et $1=0$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Donc il n'existe aucune variable aléatoire discrète } X \text{ telle que } X\sim X+\lambda}$.

2) On procède par analyse et synthèse. On suppose qu'il existe une variable aléatoire discrète X à valeurs complexes telle que X et λX aient la même loi.
On n'a pas $\forall x\in X(\Omega)\setminus\{0\}, P(X=x)=0$ (sinon $1-\lambda=P(X\in X(\Omega)\setminus\{0\})=\sum_{x\in X(\Omega)\setminus\{0\}}P(X=x)=0$).

On considère donc $x\in X(\Omega)\setminus\{0\}$ tel que $P(X=x)=c>0$. Alors $P(X=\frac{x}{\lambda})=P(\lambda X=x)=c$, puis par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(X=\frac{x}{\lambda^n})=c$

Si par l'absurde les $\frac{x}{\lambda^n}$ étaient tous distincts, alors on aurait $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(X=\frac{x}{\lambda^n}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c=+\infty>1$.

Donc il existe $n,q\in\mathbb{N}$, avec $n>q$ tels que $\frac{x}{\lambda^n}=\frac{x}{\lambda^q}$. Alors comme $x\neq 0$, $\lambda^q=\lambda^n$, puis $\lambda^{n-q}=1$, donc λ est une racine de l'unité ($\exists p\in\mathbb{N}^*, \lambda^p=1$).

Réciproquement, on suppose que λ est une racine de l'unité ($\exists p\in\mathbb{N}^*, \lambda^p=1$).

On pose alors $n=\min\{p\in\mathbb{N}^*, \lambda^p=1\}$ et on prend une variable X qui suit une loi uniforme sur $\{\lambda^k, k\in[\![0,n-1]\!]\}$ (les éléments de cet ensemble sont tous distincts, car si on avait $\lambda^k=\lambda^l$ pour $k,l\in[\![0,n-1]\!]$ et $k<l$, alors on aurait $\lambda^{l-k}=1$, avec $1\le l-k<n$, ce qui est exclu).

On a alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!], P(X=\lambda^k)=\frac{1}{n}$.

Donc $\forall k\in[\![0,n-1]\!], P(\lambda X=\lambda^k)=P(X=\lambda^{k-1})=\frac{1}{n}$ (avec $\lambda^{n-1}=\frac{1}{\lambda}$). Donc $\lambda X\sim X$

Donc $\boxed{\text{il existe } X \text{ telle que } X \text{ et } \lambda X \text{ aient la même loi si et seulement si } \exists p\in\mathbb{N}^*, \lambda^p=1}$

Exercice 71 (Oral Mines 23, Chloé,4) : Soit $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère E, sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que toutes les matrices de E sont diagonalisables.

1) Montrer que $\dim(E)\le\frac{n(n+1)}{2}$
2) On suppose $K=\mathbb{R}$. Quelle est la valeur maximale possible pour $\dim(E)$?
3) On suppose $K=\mathbb{C}$ et $n=2$. Quelle est la valeur maximale possible pour $\dim(E)$?

1) On considère l'espace vectoriel T des matrices triangulaires supérieures avec des termes diagonaux nuls.
Si $M\in T\cap E$, alors 0 est sa seule valeur propre et comme elle est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc $M=0$.
Dès lors, avec la formule de Grassmann, il vient $\dim(T+E)=\dim(T)+\dim(E)$.

Or $\dim(T)=\frac{n(n-1)}{2}$ (une base est $(E_{i,j})_{1\le i<j\le n}$).

De plus, $T+E\subset M_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(T+E)\le n^2$ et $\dim(E)\le n^2-\frac{n(n-1)}{2}$ et $\boxed{\dim(E)\le\frac{n(n+1)}{2}}$

2) On choisit $E=S_n(\mathbb{R})$. Alors par théorème spectral, toutes les matrices de E sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

De plus, une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $C=\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right)_{1\le i\le j\le n}$. On peut en effet montrer qu'elle est libre et génératrice de $S_n(\mathbb{R})$ (si $M\in S_n(\mathbb{R}), M=\sum_{1\le i<j\le n} M_{i,j}\left(E_{i,j}+E_{j,i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{M_{i,i}}{2}\left(E_{i,i}+E_{i,i}\right)$).

On compte le nombre d'éléments de la base : pour $j=1$, il y en a 1 ($i=1$) ; pour $j=2$, il y en a deux ($i\in\{1,2\}$), et ainsi de suite : pour $j=n$, il y en a n.

On en déduit que $\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Donc avec 1), $\boxed{\text{la valeur maximale possible de } \dim(E) \text{ est } \frac{n(n+1)}{2} \text{ lorsque } K=\mathbb{R}}$

3) On suppose $K=\mathbb{C}$ et $n=2$. On sait que si E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ tel que toutes les matrices de E sont diagonalisables, alors avec 1), $\dim(E)\le\frac{2(2+1)}{2}=3$.

Si $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est $\chi_A=X^2-Tr(A)X+\det(A)$.

Donc $\chi_A=X^2-(a+d)X+ad-bc$. Soit $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc$

Si $\Delta\ne0$, A possède deux valeurs propres complexes distinctes et est diagonalisable.

Si $\Delta=0$, A possède une valeur propre et diagonalisable si et seulement si elle est diagonale.

Donc $\boxed{A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable si et seulement si } b=c=0 \text{ ou } (a-d)^2+4bc\ne0}$.

On suppose par l'absurde que toutes les matrices de E sont diagonalisables et que $\dim(E)=3$.

On note $D=Vect\left(E_{1,1},E_{2,2}\right)$ l'espace vectoriel des matrices diagonales. On a $\dim(E)>\dim(D)$ donc il existe une matrice $N=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in E$ qui ne vérifie pas $b=c=0$. Soit α tel que $\alpha^2=-4bc$

Si par l'absurde on avait $D\subset E$, alors $N+\begin{pmatrix} \alpha-a & 0\\ 0 & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & c\\ b & 0\end{pmatrix}\in E$, donc elle serait diagonalisable.

Or $\alpha^2+4bc=0$, donc c'est absurde et on n'a pas $D\subset E$, donc $\dim\left(D\cap E\right)\le1$

De plus, si T^+ est l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{C})$, alors $\dim\left(T^+\cap E\right)=\dim\left(T^+\right)+\dim\left(E\right)-\dim\left(T^+\cap E\right)\ge3+3-4=2$.

On n'a donc pas $T^+\cap E\subset D\cap E$, donc il existe une matrice $K=\begin{pmatrix} u & w\\ 0 & v\end{pmatrix}\in T^+\cap E$, avec $w\ne0$.

Comme K est diagonalisable, on a de plus $u\ne v$.

De même, il existe $L=\begin{pmatrix} u' & 0\\ w' & v'\end{pmatrix}\in E$ telle que $w'\ne0$ en raisonnant sur les matrices triangulaires inférieures). Alors pour $\beta\in\mathbb{C}$, $L+\beta K=\begin{pmatrix} \beta u+u' & \beta w\\ w' & \beta v+v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in E$.

Or $(a-d)^2+4bc=\left(\beta(u-v)+u'-v'\right)^2+4\beta ww'=Q(\beta)$

Q est un polynôme du seconde degré car $u\ne v$. Il possède donc au moins une racine complexe notée β.

Dans ce cas, $(a-d)^2+4bc=0$ et comme $w'\ne0$, $L+\beta K$ n'est pas diagonalisable.

C'est absurde, donc $\boxed{\text{on ne peut pas avoir } \dim(E)=3}$

Or si on prend $E=D$, $\dim(E)=2$ et toutes les matrices de E sont diagonalisables car diagonales.

$\boxed{\text{La valeur maximale possible pour } \dim(E) \text{ est donc égale à 2}}$.

Exercice 72 (Oral Centrale 1 23, Mathilde,5) : soit $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien.

Soient $B=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|\le 1\right\}$ et $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1\right\}$

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, de classe C^2. On définit le Laplacien par $\Delta f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

1) Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur B.
   Montrer que f admet un minimum m' et un maximum M' sur S.
2) On suppose $\forall x\in B, \Delta f(x)>0$. Montrer que $M=M'$

1) Dans un espace vectoriel de dimension finie, les sphères et les boules fermées sont des fermés. Donc B et S sont des fermés. De plus, si $x\in B$, alors $\|x\|\le 1$, donc B est bornée, et de même, S est bornée.
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}^n$, on peut utiliser **le théorème des bornes atteintes**.
   $\boxed{f \text{ admet un minimum } m \text{ et un maximum } M \text{ sur } B \text{ et un minimum } m' \text{ et un maximum } M' \text{ sur } S}$.

2) On suppose par l'absurde que M est atteint en un point $a\in U=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|<1\right\}$.
   f admet donc un maximum local atteint en a (il est même global sur B). Comme U est ouvert (c'est une boule ouverte), et que f de classe C^2, donc C^1, a est un point critique et on sait que la matrice Hessienne $H_f(a)$ vérifie $Sp\left(H_f(a)\right)\subset\mathbb{R}_-$.
   Or $Tr\left(H_f(a)\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)=\Delta f(a)>0$, donc c'est absurde.
   Donc M est atteint en $x_M\in S=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1\right\}$. On a alors $M=f(x_M)\le M'$.
   Mais par ailleurs, on a clairement $M'\le M$ (si on prend $x_{M'}\in S$ tel que $f(x_{M'})=M'$, alors $x_{M'}\in B$, donc $M'=f(x_{M'})\le M$), donc finalement $\boxed{M=M'}$

Séance 13 : Vendredi 14 Juin (divers)

Exercice 73 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :

1) Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=0$. Montrer que si M est diagonalisable, alors $M=0$.
2) Soit $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $M=\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable ?

1) Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=0$. Alors X^p est un polynôme annulateur de M donc les valeurs propres de M sont parmi les racines de X^p et $Sp(M)\subset\{0\}$.
   Dès lors, si M est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice nulle, donc $\boxed{M=0}$
2) On remarque que $j^3=1$, donc que $j^4=j$. De plus, $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0$ (c'est aussi la somme des racines troisièmes de 1).
   Donc on calcule $M^2=\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}=(0)$ et avec $p=2$, par contraposée de la question 1) , on conclut que comme M n'est pas nulle, $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Exercice 74 (oral CCINP 23, Liam) : soit $f : \begin{array}{l} [-1,1]\times\mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto x^2-\sqrt{1-x^2}\cos y \end{array}$.

On admettra que f est continue et qu'elle est C^2 sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

2)
   a) Trouver les points critiques sur $]-1,1[\times[0,\pi]$.
   b) Montrer que $\forall(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}, f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)\leq x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}$.
   c) Montrer que f admet un maximum global en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$. On pourra poser $u=\sqrt{1-x^2}$.

3) Déterminer la matrice Hessienne en $(0,\pi)$. f admet-elle un maximum local en $(0,\pi)$?

4) f admet-elle un minimum global en $(0,0)$?

5) Soit $y_0\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. $f(1,y_0)$ est-il un extremum local ?

1) On calcule pour $(x,y)\in]-1,1[\times\mathbb{R}$: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\left(2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos y\right)}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{1-x^2}\sin y}$

2) a) On cherche les $(x,y)\in]-1,1[\times[0,\pi]$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

Ceci s'écrit $\begin{cases} x\left(2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(y)\right)=0 \\ y\in\{0,\pi\} \end{cases}$. On résout $2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(1-x^2)=\frac{1}{4}$ (en effet, ces deux quantités sont positives). Puis $(1-x^2)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}$.

Donc $\boxed{\text{les points critiques sont les } A(0,0),\ B(0,\pi),\ C(\tfrac{\sqrt{3}}{2},\pi) \text{ et } D(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\pi)}$

b) Soit $(x,y)\in]-1,1[\times\mathbb{R}$. Alors $f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)=x^2-\sqrt{1-x^2}\cos y-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\leq x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}$

On a donc bien $\boxed{f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)\leq x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}}$

c) Si on pose $u=\sqrt{1-x^2}$, il vient $x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}=1-u^2+u-\frac{5}{4}=-\left(u^2-u+\frac{1}{4}\right)=-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$.

Donc $\boxed{f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)\leq 0 \text{ et } f \text{ admet un maximum global en } \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)}$

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\left(2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos y\right)$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\pi)=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)=\cos\pi=-1$.

Donc $H_f(0,\pi)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $Sp\left(H_f(0,\pi)\right)\not\subset\mathbb{R}_+$, $Sp\left(H_f(0,\pi)\right)\not\subset\mathbb{R}_-$

$\boxed{f \text{ ne possède pas d'extremum local en } (0,\pi)}$.

4) $f(0,0)=-1$. Pour $(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-\sqrt{1-x^2}\cos y \geq (-\cos y)\sqrt{1-x^2}$.

Or $\left|(-\cos y)\sqrt{1-x^2}\right|\leq 1$, donc $f(x,y)\geq(-\cos y)\sqrt{1-x^2}\geq -1$

$\boxed{f \text{ possède un minimum global en } (0,0)}$

5) Soit $y_0\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. $f(1,y_0)=1$. On calcule $f(x,y)-1=-\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\cos y\right)$

Si $y_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, alors pour $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x,y)-f(1,y_0)\leq 0$

$\boxed{\text{Donc si } y_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(1,y_0) \text{ est un maximum local}}$.

Si $y_0\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, alors $\cos y_0<0$ et pour x assez proche de 1 et y assez proche de y_0, on a

$\cos y\leq\frac{1}{2}\cos y_0$ et $\sqrt{1-x^2}\leq-\frac{1}{2}\cos y_0$, donc $f(x,y)-1=-\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\cos y\right)\geq 0$

$\boxed{\text{Donc si } y_0\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f(1,y_0) \text{ est un minimum local}}$

Exercice 75 (Oral IMT 23, Orane,2) : pour $n\in\mathbb{N}$, on considère $f_n : x\mapsto \arctan\left(e^{-nx}\right)$.

En cas de convergence, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Montrer que f est continue et monotone sur D.

1) On procède par disjonction de cas.
   - Si $x=0$, $f_n(0)=\frac{\pi}{4}$ et $\sum f_n(0)$ diverge.
   - Si $x<0$, $f_n(x)=\arctan\left(e^{-nx}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$ et $\sum f_n(x)$
   - Si $x>0$, $e^{-nx}\underset{n\to+\infty}{\to}0$, donc $\arctan\left(e^{-nx}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-nx}$. Or $0\leq e^{-x}<1$, donc $\sum\left(e^{-x}\right)^n$ converge et

     comme e^{-nx} est de signe fixe, $\sum f_n(x)$ converge aussi.

   Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } D=\mathbb{R}_+^*}$

2) On utilise le théorème de dérivation des séries de fonctions.
   - Chaque f_n est C^1 sur D.
   - $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge simplement sur D avec 1).
   - Pour $n\in\mathbb{N}$, et $x\in D$, $(f_n)'(x)=-\frac{ne^{-nx}}{1+e^{-2nx}}$. Soit $a>0$.

Alors si $x \geq a$, $\left|(f_n)'(x)\right| \leq \dfrac{ne^{-na}}{1}$. Comme $\|(f_n)'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ est le plus petit des majorants de $(f_n)'$ sur $[a,+\infty[$, on peut écrire que $0 \leq \|(f_n)'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{n}{e^{na}}$, donc $0 \leq n^2 \|(f_n)'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{n^3}{e^{na}}$.

Donc par encadrement, $\|(f_n)'\|_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc comme $\dfrac{1}{n^2}$ est de signe fixe, $\sum(f_n)'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Donc f est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), donc f est de classe C^1 sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{ne^{-nx}}{1+e^{-2nx}}$ et $\boxed{f \text{ est continue et décroissante sur } D = \mathbb{R}_+^*.}$

Exercice 76 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) : soit $A \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} Tr(A^n) = 0$. Montrer que le module des valeurs propres de A est strictement inférieur à 1.

On sait que A est trigonalisable que $\mathbb{C}$ et qu'il existe une matrice $T \in M_p(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et une matrice $P \in GL_p(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Alors par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$

On note $\lambda_1,...,\lambda_k$ les valeurs propres complexes distinctes de A , et $\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Si $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$, alors $T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \ddots & (*) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$, donc deux matrices semblables ayant même trace, on obtient $tr(A^n) = tr(T^n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n$. Alors pour $0 \leq j \leq k-1$, $tr(A^{n+j}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n \lambda_i^j$.

Donc si on note $V = V_k(\lambda_1,...,\lambda_k) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & & & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & & & \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \cdots & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_k\lambda_k^n \end{pmatrix}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} tr(A^n) \\ \vdots \\ \vdots \\ tr(A^{n+k-1}) \end{pmatrix}$

alors on a directement $V^T X_n = Y_n$. Mais $\lambda_1,...,\lambda_k$ sont distinctes, donc la matrice de Vandermonde V est inversible et V^T aussi. Ainsi, $X_n = (V^T)^{-1} Y_n$. Or $Y_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (coordonnée par coordonnée).

Donc comme $Y \mapsto (V^T)^{-1} Y$ est continue (car linéaire en dimension finie), avec la caractérisation séquentielle, on peut affirmer que $X_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Avec la convergence coordonnée par coordonnée, puisque $\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, on conclut que $\forall i \in [\![1,k]\!], \lambda_i^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc $\boxed{\text{le module des valeurs propres de } A \text{ est strictement inférieur à 1}}$.

Exercice 77 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

Soit σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On définit $P_\sigma \in S_n$ par $\forall i,j \in [\![1,n]\!], (P_\sigma)_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.

1) Montrer que si $\sigma, s \in S_n$, alors $P_\sigma P_s = P_{s\circ\sigma}$. Montrer que P_σ est orthogonale.
2) Montrer que $\exists l \in \mathbb{N}^*, P_\sigma^l = I_n$.
3) P_σ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

1) Soient $\sigma, s \in S_n$. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$. $\left(P_\sigma P_s\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(P_\sigma\right)_{i,k} \left(P_s\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma(i),k} \delta_{s(k),j} = \delta_{s\circ\sigma(k),j}$.

On a donc bien $\boxed{P_\sigma P_s = P_{s\circ\sigma}}$

On a donc $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = I_n$. Or $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \left(P_{\sigma^{-1}}\right)_{i,j} = \delta_{\sigma^{-1}(i),j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ car $\sigma^{-1}(j) = i \Leftrightarrow \sigma(i) = j$

Donc $\forall i, j \in [\![1,n]\!], \left(P_{\sigma^{-1}}\right)_{i,j} = \left(P_\sigma\right)_{j,i}$ et $P_{\sigma^{-1}} = \left(P_\sigma\right)^T$, donc $P_\sigma \left(P_\sigma\right)^T = I_n$.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est orthogonale}}$.

2) Avec 1), on sait que $\left(P_\sigma\right)^2 = P_{\sigma\circ\sigma}$, donc si on note σ^k l'application σ composée k fois, alors pour $k \in \mathbb{N}$, $\left(P_\sigma\right)^k = P_{\sigma^k}$.

Or $\left\{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\right\} \subset S_n$ est un ensemble fini et donc il existe $p, k \in \mathbb{N}$ tels que $p < k$ et $\sigma^p = \sigma^k$.

Alors $\sigma^p = \sigma^{k-p}\sigma^p$ et comme σ^p est bijective, $\sigma^{k-p} = Id_{[\![1,n]\!]}$.

On pose $l = k - p \in \mathbb{N}^*$, donc $\boxed{\exists l \in \mathbb{N}^*, P_\sigma^l = I_n}$

3) $X^l - 1 = \prod_{k=0}^{l-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ est un polynôme annulateur de P_σ, scindé à racines simples.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

De plus, si P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors ses valeurs propres sont parmi les racines réelles de $X^l - 1$, donc $Sp\left(P_\sigma\right) \subset \{-1,1\}$. Dès lors, P_σ est semblable à D diagonale dont tous les coefficients sont dans $\{-1,1\}$. Il existe Q inversible telle que $P_\sigma = QDQ^{-1}$ et $\left(P_\sigma\right)^2 = QD^2Q^{-1} = I_n$, donc $P_{\sigma\circ\sigma} = I_n$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \left(P_{\sigma\circ\sigma}\right)_{i,i} = 1 = \delta_{\sigma\circ\sigma(i),i}$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \sigma\circ\sigma(i) = i$ et $\sigma\circ\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$.

Réciproquement, si $\sigma\circ\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$, alors $\left(P_\sigma\right)^2 = P_{\sigma\circ\sigma} = I_n$.

Donc comme P_σ est orthogonale., il vient $P_\sigma = \left(P_\sigma\right)^T$, donc $P_\sigma \in S_n\left(\mathbb{R}\right)$ et P_σ est diagonalisable.

Donc $\boxed{P_\sigma \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \sigma\circ\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}}$

Deux exercices très astucieux pour finir :

Exercice 78 (Oral Mines 23, Chloé,5) : soient deux réels a,b tels que $a < b$.Soient deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\frac{f}{g}$ admet un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.

2) Montrer que $\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}\left(\int_a^b fg\right)^2$

1) $\frac{f}{g}$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc par théorème des bornes atteintes, elle possède un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.

2) On a donc pour tout $x \in [a,b]$: $0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$. Donc $\left(M\, g(x) - f(x)\right)\left(f(x) - m\, g(x)\right) \geq 0$. Donc en développant : $\left(M + m\right) g(x) f(x) \geq f^2(x) + Mm\, g^2(x)$.

Donc en intégrant : $\left(M + m\right) \int_a^b g(x) f(x) dx \geq \int_a^b f^2(x) dx + Mm \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$.

Donc en mettant au carré $\left(M + m\right)^2 \left(\int_a^b fg\right)^2 \geq \left(\int_a^b f^2 + Mm \int_a^b g^2\right)^2$.

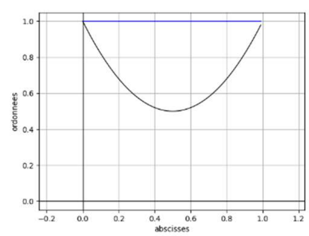
Or si $u, v \in \mathbb{R}, (u+v)^2 \geq 4uv$ (car $(u-v)^2 \geq 0$).

Donc $\left(M + m\right)^2 \left(\int_a^b fg\right)^2 \geq 4Mm \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$. On a bien $\boxed{\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}\left(\int_a^b fg\right)^2}$

Exercice 79 (Oral Mines 23, Ali,5) : Soit $E = \left\{ f \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}\right), f(0) = f(1) = 1 \right\}$. Déterminer

$$\inf_{f \in E} \left(\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2 \right) dt \right)$$

Montrer tout d'abord $I(f) = \int_0^1 \left(f(t) + f'(t) \right)^2 dt$, puis minorer $I(f)$ en utilisant la dérivée de la fonction $t \mapsto f(t)e^t$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prouver qu'il existe une fonction de E qui vérifie le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.



On note $I = \inf_{f \in E} \left(\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2 \right) dt \right)$.

On peut noter que E ne contient pas la fonction nulle, donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $C^1([0,1], \mathbb{R})$. Dès lors, il ne s'agit pas d'un problème de distance à un sous-espace vectoriel.

Pour $f \in E$, on note $I(f) = \int_0^1 \left(f(t) \right)^2 dt + \int_0^1 \left(f'(t) \right)^2 dt$.

On remarque que $2\int_0^1 f(t) f'(t) dt = f^2(1) - f^2(0) = 0$. Donc en fait, $I(f) = \int_0^1 \left(f(t) + f'(t) \right)^2 dt$.

On pose alors $g(t) = f(t)e^t$. Alors $g'(t) = \left(f(t) + f'(t) \right) e^t$.

Il vient d'après Cauchy-Schwarz : $\left(\int_0^1 g'(t) dt \right)^2 = \left(\int_0^1 \left(f(t) + f'(t) \right) e^t dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \left(f(t) + f'(t) \right)^2 dt \right) \int_0^1 e^{2t} dt$.

Donc $(e-1)^2 \leq I(f) \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right)$. Donc $\boxed{\frac{2(e-1)}{e+1} \leq I(f)}$

On cherche à montrer que $\frac{2(e-1)}{e+1}$ est le minimum de $I(f)$, donc qu'on peut avoir égalité.

On a égalité dans Cauchy-Schwarz lorsque $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], f(t)+f'(t)=a\,e^t$.

On résout l'équation. On note $(E_a): y'+y=a\,e^t$ et $(H): y'+y=0$.

$S_H=\{t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. On cherche une solution particulière h de (E) vérifiant $\forall t \in [0,1], h(t)=\lambda(t)e^{-t}$, avec λ dérivable variation de la constante). Il suffit d'avoir pour tout $t \in [0,1]$ $\lambda'(t)e^{-t}=a\,e^t$, soit $\lambda(t)=\frac{a}{2}e^{2t}$, et $h(t)=\frac{a}{2}e^t$. Donc les solutions de (E_a) sont les $f: t \mapsto \lambda e^{-t}+\frac{a}{2}e^t$

Il reste à vérifier qu'une de ces fonctions est bien élément de E.

On résout donc $f(0)=f(1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}=1-\lambda \\ \lambda e^{-1}+(1-\lambda)e^1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}=1-\lambda \\ \lambda=\frac{e}{e+1} \end{cases}$.

On trouve $f: t \mapsto \frac{e}{e+1}e^{-t}+\frac{1}{e+1}e^t=\frac{\sqrt{e}}{e+1}\left(e^{t-\frac{1}{2}}+e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{2\sqrt{e}}{e+1}ch(t-\frac{1}{2})$

Pour cette fonction f, on a bien $f \in E$ et le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.

Donc $\boxed{I=\frac{2(e-1)}{e+1}}$

Séance 14 : Lundi 17 Juin (corrections suivant la demande)

Oraux ENS-X-ESPCI :

Exercice 80 (Oral ENS 23, Eloi,5) : Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit A un sous-ensemble de $[\![1,N]\!]$ de cardinal n. Soit σ une permutation de $[\![1,N]\!]$. On note σ_i le i-ème élément de la permutation σ. Déterminer la probabilité que les $\sigma_1,...,\sigma_n$ forment A.
2) Soit F un ensemble de sous-ensembles de $[\![1,N]\!]$ telle que si A et B sont des éléments distincts de F, on a $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Montrer que le nombre d'éléments de F est majoré par $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor}$

1) On note S_N l'ensemble des permutations de $[\![1,N]\!]$ (ce sont les bijections de $[\![1,N]\!]$ dans $[\![1,N]\!]$). Soit σ une permutation de $[\![1,N]\!]$. Comme σ est une bijection de $[\![1,N]\!]$ dans $[\![1,N]\!]$, $\{\sigma_1,...,\sigma_n\}$ est un ensemble à n éléments dans un ensemble à N éléments. Il y a au total $\binom{N}{n}$ ensembles à n éléments dans $[\![1,N]\!]$. La probabilité d'obtenir A est donc $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. $\boxed{\text{La probabilité que les } \sigma_1,...,\sigma_n \text{ forment } A \text{ est } \frac{1}{\binom{N}{n}}}$

2) Si A un sous-ensemble de $[\![1,N]\!]$, on note $E_A=\{\sigma \in S_N, \{\sigma_1,..,\sigma_{card(A)}\}=A\}$. Alors on étudie $P\left(\bigcup_{A \in F} E_A\right)$. Si $A,B \in F$, avec $card(A) \le card(B)$, alors si $\sigma \in E_A \cap E_B$, on sait que $\{\sigma_1,..,\sigma_{card(A)}\}=A \subset \{\sigma_1,..,\sigma_{card(A)},..,\sigma_{card(B)}\}=B$, ce qui est exclu. On a donc $E_A \cap E_B=\varnothing$. On a le même résultat si $card(A) \ge card(B)$, donc $\bigcup_{A \in F} E_A$ est une réunion disjointe.

Donc $P\left(\bigcup_{A\in F} E_A\right)=\sum_{A\in F} P(E_A)=\sum_{A\in F}\frac{1}{\binom{N}{card(A)}}$

On note $k=card(A)\in[\![0,N]\!]$. On pose $p=\left\lfloor \frac{N}{2}\right\rfloor$ et on prend $k\le p$.

$\binom{N}{k}=\frac{N(N-1)....(N-k+1)}{k(k-1)....1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{(N-i+1)}{i}$ et $\binom{N}{p}=\prod_{i=1}^{p}\frac{(N-i+1)}{i}=\prod_{i=1}^{k}\frac{(N-i+1)}{i}\prod_{i=k+1}^{p}\frac{(N-i+1)}{i}$.

Or pour $i\le p$, on a $i\le\frac{N}{2}$ donc $N-i+1\ge\frac{N}{2}\ge i$ donc $\binom{N}{p}\ge\binom{N}{k}\prod_{i=k+1}^{p}1\ge\binom{N}{k}$.

De plus, si $k>p=\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$, alors $k\ge\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor+1\ge\frac{N}{2}-1+1$, donc $N-k\le\frac{N}{2}$ et comme $N-k\in\mathbb{N}$, $N-k\le p$.

Dès lors, $\binom{N}{k}=\binom{N}{N-k}\le\binom{N}{p}$ et ainsi $\boxed{\forall k\in[\![0,N]\!],\binom{N}{k}\le\binom{N}{\lfloor N/2\rfloor}}$

Donc $1\ge P\left(\bigcup_{A\in F}E_A\right)\ge\sum_{A\in F}\frac{1}{\binom{N}{\lfloor N/2\rfloor}}\ge card(F)*\frac{1}{\binom{N}{\lfloor N/2\rfloor}}$.

On a donc bien $\boxed{card(F)\le\binom{N}{\lfloor N/2\rfloor}}$

Exercice 81 (Oral ENS 23, Ali,5) : soit $U_n=\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)^{1/n}$.

1) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $\ln(U_n)$.
2) Déterminer un équivalent de U_n lorsque n tend vers l'infini.

1) On calcule pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(U_n)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\ln(k)\right)$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\ln(k)$ et pour $t\ge1$:

   $f(t)=t\ln(t)$.

   On effectue une comparaison somme-intégrale. f est croissante sur $[1,+\infty[$.

   Pour $k\ge1$, $f(k)\le\int_k^{k+1}f(t)dt$, donc $S_n=f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\le n\ln(n)+\int_1^n f(t)dt$.

   De plus, $S_n=\sum_{k=2}^{n}f(k)\ge\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}f(t)dt\ge\int_1^n f(t)dt$.

   On a donc $\int_1^n f(t)dt\le S_n\le n\ln(n)+\int_1^n f(t)dt$.

   On calcule avec une intégration par parties : $\int_1^n f(t)dt=\frac{1}{2}n^2\ln(n)-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{t^2}{t}dt=\frac{1}{2}n^2\ln(n)-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{4}$

   Donc $\frac{1}{4}\le S_n-\frac{1}{2}n^2\ln(n)+\frac{n^2}{4}\le n\ln(n)+\frac{1}{4}$, donc par encadrement, $\frac{1}{n^2}\left(S_n-\frac{1}{2}n^2\ln(n)+\frac{n^2}{4}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}0$

   Donc $S_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2}n^2\ln(n)-\frac{n^2}{4}+o(n^2)$ et $\boxed{\ln(U_n)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2}n\ln(n)-\frac{n}{4}+o(n)}$

2) Pour pouvoir ensuite prendre l'exponentielle et aboutir à un équivalent de U_n, on a besoin d'un développement asymptotique du $\ln(U_n)$ à l'ordre $o(1)$, donc d'un développement de S_n à l'ordre $o(n)$

On pose $W_n = S_n - \frac{1}{2}n^2\ln(n) + \frac{n^2}{4}$.

On cherche un équivalent de $W_n - W_{n-1} = n\ln(n) - \frac{1}{2}n^2\ln(n) + \frac{1}{2}(n-1)^2\ln(n-1) + \frac{1}{4}\left(n^2-(n-1)^2\right)$

On calcule $(n-1)^2\ln(n-1) = \left(n^2-2n+1\right)\left(\ln(n)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$.

Donc $(n-1)^2\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \left(n^2-2n+1\right)\left(\ln(n)-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Donc $\frac{1}{2}(n-1)^2\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\ln(n) - n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + o(1)$

Donc $W_n - W_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2} + o(1)$.

On pose alors pour $n \geq 2$: $Y_n = W_n - W_{n-1} - \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}$. Alors $Y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$

On admet provisoirement que dans ce cas, $\sum_{k=2}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

On calcule $\sum_{k=2}^{n} Y_k = W_n - W_1 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$.

On fait de nouveau une comparaison avec une intégrale pour estimer $\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$:

$\int_1^n \ln(t)dt \leq \sum_{k=2}^{n}\ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(t)dt$, où $\int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n + 1$.

Donc $\sum_{k=2}^{n}\ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + o(n)$. Donc comme $W_n = W_1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{k=2}^{n} Y_k$, on déduit que $W_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n\ln(n) + o(n)$. Or $W_n = S_n - \frac{1}{2}n^2\ln(n) + \frac{n^2}{4}$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}n^2\ln(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{2}n\ln(n) + o(n)$.

Donc $\ln(U_n) = \frac{1}{n}\left(S_n\right) = \frac{1}{2}n\ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}\ln(n) + o(1)$.

Donc $U_n = \exp\left(\frac{1}{2}n\ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}\ln(n)\right).\exp\left(o(1)\right)$ et

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(\frac{1}{2}n\ln(n) - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}\ln(n)\right) = \sqrt{n}\exp\left(\frac{1}{2}n\ln(n) - \frac{n}{4}\right)}$$

Il reste à justifier que si $Y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, alors $\sum_{k=2}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Alors soit $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|Y_n\right| \leq \varepsilon$.

Il vient $\left|\sum_{k=2}^{n} Y_k\right| \leq \left|\sum_{k=2}^{N} Y_k\right| + \sum_{k=N+1}^{n}\left|Y_k\right|$, donc $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{n} Y_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{N} Y_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon$.

Donc $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{n} Y_k\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{N} Y_k\right| + \varepsilon$. On utilise la « double détente » : comme $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{N} Y_k\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{N} Y_k\right| \leq \varepsilon$. Donc pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, il vient $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{n} Y_k\right| \leq 2\varepsilon$.

On a donc $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et on a bien $\sum_{k=2}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, ce qui achève la preuve.

Exercice 82 (Oral ENS 23, Ali) : Déterminer la forme d'une matrice triangulaire et orthogonale dans $M_n(\mathbb{R})$.

On procède par analyse et synthèse.
Si $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}\in O_n(\mathbb{R})$, alors ses colonnes forment une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Si A est triangulaire supérieure, et sa premier colonne est $C_1=\begin{pmatrix}a_{1,1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, avec $a_{1,1}\in\{-1,1\}$ car on doit avoir $\|C_1\|=1$. Dès lors, $C_1=\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\\0\\\vdots\end{pmatrix}$, et comme $\langle C_1,C_2\rangle=0$, $a_{1,2}=0$, donc comme $\|C_2\|=1$, on constate que $a_{2,2}\in\{-1,1\}$.

On procède alors par récurrence forte pour prouver que pour $j\in[\![1,n]\!]$, $a_{j,j}\in\{-1,1\}$ et $\forall i\neq j, a_{i,j}=0$. Donc A est nécessairement diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à 1 ou à -1.
Réciproquement, ces matrices sont bien orthogonales.
On procède de même pour les matrices triangulaires inférieures.

Les matrices orthogonales et triangulaires sont les matrices diagonales, avec des coefficients diagonaux égaux à 1 ou à -1.

Exercice 83 (Oral ENS 23, Ali,2) : Que dire de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque (a_n) est périodique ?

On suppose que (a_n) n'est pas la suite nulle (dans ce cas, $\sum a_n z^n$ converge toujours).

Si (a_n) est périodique, on considère $N\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+N}=a_n$.
Alors $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}=\{a_n, n\in[\![0,N-1]\!]\}$. Cet ensemble est fini donc borné et ainsi, $(a_n 1^n)$ est bornée, et si on note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors $R\ge 1$.

De plus, si (a_n) n'est pas la suite nulle, alors il existe n_0 tel que $a_{n_0}\neq 0$.
Alors $\left(a_{n_0+kN}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de (a_n) et ne tend pas vers 0 ($\forall k\in\mathbb{N}, a_{n_0+kN}=a_{n_0}$).
Donc $(a_n 1^n)$ ne converge pas vers 0 et $R\le 1$. Donc finalement $R=1$.

Donc si (a_n) est périodique mais n'est pas la suite nulle, alors $R\left(\sum a_n z^n\right)=1$.

Exercice 84 (Oral ENS 23, Maxime,5) : soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\ \|$.
Soit $f\in L(E)$. On suppose $\forall x\in E, \|f(x)\|\le\|x\|$. On pose $S_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k$.
Etudier la convergence et la limite de (S_n).
Indication : étudier S_n sur $\mathrm{Im}(Id_E-f)$ et $\ker(Id_E-f)$.

On a tout d'abord pour $x\in\ker(Id_E-f)$: $f(x)=x$ donc par récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}, f^k(x)=x$.
Donc $S_n(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x = x \underset{n\to+\infty}{\to} x$.

Soit par ailleurs $y \in \mathrm{Im}(Id_E - f)$: $\exists x \in E, f(x) - x = y$. Soit un tel x.

Alors $S_n(y) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(y) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(f^k(x) - f^{k+1}(x)\right)$.

La somme est télescopique et $S_n(y) = \dfrac{1}{n+1}\left(x - f^{n+1}(x)\right)$, donc

$\|S_n(y)\| = \dfrac{1}{n+1}\left\|x - f^{n+1}(x)\right\| \leq \dfrac{1}{n+1}\left(\|x\| + \left\|f^{n+1}(x)\right\|\right)$.

Comme $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$, on obtient par récurrence $\left\|f^{n+1}(x)\right\| \leq \|x\|$.

Donc $\|S_n(y)\| = \dfrac{1}{n+1}\left\|x - f^{n+1}(x)\right\| \leq \dfrac{1}{n+1}\left(\|x\| + \left\|f^{n+1}(x)\right\|\right)$ et $S_n(y) \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$.

On prouve alors $\mathrm{Im}(Id_E - f) \oplus \ker(Id_E - f) = E$.

Par théorème du rang, on a déjà $\dim\left(\mathrm{Im}(Id_E - f)\right) + \dim\left(\ker(Id_E - f)\right) = \dim(E)$.

De plus, si $x \in \mathrm{Im}(Id_E - f) \cap \ker(Id_E - f)$, alors avec ce qui précède, $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$.

Donc par unicité de la limite, $x = 0_E$ et on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(Id_E - f) \oplus \ker(Id_E - f) = E}$

Ainsi, si $x \in E$, on l'écrit $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Im}(Id_E - f)$ et $b \in \ker(Id_E - f)$.

Alors $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} b = p(x)$, où p est la projection sur $\ker(Id_E - f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(Id_E - f)$

Il reste à étudier la limite de la suite d'applications linéaires (S_n). On définit pour cela une norme sur $L(E)$ (elles sont toues équivalentes). On prend une base $(e_1,..,e_r)$ de $\ker(Id_E - f)$ et une base $(e_{r+1},..,e_q)$ de $\mathrm{Im}(Id_E - f)$. Alors $B = (e_1,..,e_q)$ est une base de E ,avec $q = \dim(E)$. On pose $N(f) = \sum_{k=1}^{q}\|f(e_k)\|$. C'est une norme sur E (en particulier, si $N(f) = 0$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!], f(e_k) = 0_E$ et f s'annule sur une base donc $f = 0_{L(E)}$).

On calcule $N(S_n - p) = \sum_{k=1}^{q}\|S_n(e_k) - p(e_k)\| \underset{q\to+\infty}{\to} 0$ par somme.

Donc $\boxed{(S_n) \text{ converge dans } L(E) \text{ vers la projection sur } \ker(Id_E - f) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(Id_E - f)}$.

Exercice 85 (Oral ENS 23, Maxime,5) : soient $n \geq 3$ points $M_1,...,M_n$ dans le plan. Pour chaque couple de points, on lance une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in \left]0,1\right[$. Si on obtient Pile, on trace une arête entre les deux points et si on obtient Face, on ne fait rien. On note T_n la nombre de triangles ainsi formés.
Pour $i \neq j$, on pose $X_{i,j} = 1$ si les points M_i et M_j sont reliés, et $X_{i,j} = 0$ sinon.

On pose $a_n = \dbinom{n}{3}p^3$.

1) Déterminer l'espérance de T_n.
2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\dfrac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

1) On pose $F = \left\{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, 1 \leq i < j < k \leq n\right\}$. Pour $(i,j,k) \in F$, on pose $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$.
   Ainsi, il y a un triangle entre les points M_i, M_j, M_k si et seulement si $Y_{i,j,k} = 1$.
   De plus, $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$, donc $Y_{i,j,k}(\Omega) = \{0,1\}$ et
   $P\left(Y_{i,j,k} = 1\right) = P\left(\left(X_{i,j} = 1\right) \cap \left(X_{i,k} = 1\right) \cap \left(X_{j,k} = 1\right)\right) = p^3$ et $Y_{i,j,k} \sim B(p^3)$

On a alors $T_n = \sum_{(i,j,k)\in F} Y_{i,j,k}$

Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = \sum_{(i,j,k)\in F} E(Y_{i,j,k}) = card(F).p^3$

Or $card(F) = \binom{n}{3}$ (choisir un élément de F revient à choisir un triplet d'éléments de $[\![1,n]\!]$).

Donc $\boxed{E(T_n) = a_n = \binom{n}{3} p^3}$

2) Soit $\varepsilon > 0$. $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = P(|T_n - a_n| > \varepsilon a_n)$ (les deux événements sont égaux donc ont même probabilité).

Donc par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2 a_n^2}$

On cherche à majorer $V(T_n) = V\left(\sum_{(i,j,k)\in F} Y_{i,j,k}\right)$.

$$V(T_n) = E\left(\left(\sum_{(i,j,k)\in F} Y_{i,j,k}\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_{(i,j,k)\in F} Y_{i,j,k}\right)\right)^2 = \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{(i',j',k')\in F} \left(E\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) - E\left(Y_{i,j,k}\right)E\left(Y_{i',j',k'}\right)\right)$$

Donc $V(T_n) = \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{(i',j',k')\in F} \operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right)$.

Or pour $(i,j,k)\in F$ et $(i',j',k')\in F$, $Y_{i,j,k} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$ et $Y_{i',j',k'} = X_{i',j'}X_{i',k'}X_{j',k'}$ sont indépendantes lorsque $i',j',k' \notin \{i,j,k\}$ d'après le lemme des coalitions. Dans ce cas, $\operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) = 0$.

De plus, dans tous les cas, comme $Y_{i,j,k}(\Omega) = Y_{i',j',k'}(\Omega) = \{0,1\}$,

$\operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) = E\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) - E\left(Y_{i,j,k}\right)E\left(Y_{i',j',k'}\right) \le E(1) = 1$

On majore donc tous les termes de la somme qui ne sont pas nuls par 1.

$$V(T_n) = \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{(i',j',k')\in F} \operatorname{cov}\left(Y_{i,j,k}Y_{i',j',k'}\right) \le \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{\substack{(i',j',k')\in F\\ i=i'}} 1 + \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{\substack{(i',j',k')\in F\\ j=j'}} 1 + \sum_{(i,j,k)\in F} \sum_{\substack{(i',j',k')\in F\\ k=k'}} 1$$

Donc $V(T_n) \le 3\sum_{(i,j,k)\in F} n^2$ car on a moins de n choix possibles pour j' et k' lorsque $i = i'$.

Donc $V(T_n) \le 3n^2 a_n$ et $P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{3n^2}{\varepsilon^2 a_n}$. Or $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{6}$.

On a donc bien $\boxed{\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

Exercice 86 (Oral X 23, Ali,5) : déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$

Pour $m \in [\![2,n]\!]$, on pourra poser $a_{m,n} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + (m+1)\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$ et considérer, pour n fixé, $W_m = a_{m,n} - (m+1)$.

On note $U_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\sqrt{1+n}}}} = a_{2,n}$

On remarque tout d'abord que $a_{m,n}^2 = 1 + m\, a_{m+1,n}$, donc $a_{m+1,n} = \frac{a_{m,n}^2 - 1}{m}$

Donc $W_{m+1} = a_{m+1,n} - (m+2) = \dfrac{a_{m,n}^2 - 1 - m^2 - 2m}{m} = \dfrac{a_{m,n}^2 - (m+1)^2}{m} = W_m \left(\dfrac{a_{m,n} + (m+1)}{m} \right)$.

Donc en itérant le procédé, par récurrence, $W_n = W_2 \displaystyle\prod_{m=2}^{n-1} \left(\dfrac{a_{m,n} + (m+1)}{m} \right)$.

Or $W_2 = a_{2,n} - 3 = U_n - 3$ et $W_n = a_{n,n} - (n+1) = \sqrt{1+n} - n - 1$.

Donc $3 - U_n = \left((n+1) - \sqrt{n+1}\right) \displaystyle\prod_{m=2}^{n-1} \left(\dfrac{m}{a_{m,n} + (m+1)} \right)$.

De plus, $a_{m,n} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + (m+1)\sqrt{1 + ... + (n-1)\sqrt{1+n}}}} \geq 1$, donc $\displaystyle\prod_{m=2}^{n-1} \left(\dfrac{m}{a_{m,n} + (m+1)} \right) \leq \prod_{m=2}^{n-1} \left(\dfrac{m}{m+2} \right) = \dfrac{6}{n(n+1)}$

Donc $|3 - U_n| \leq \dfrac{6(n+1)}{n(n+1)}$ et par encadrement, $\boxed{U_n \underset{n \to +\infty}{\to} 3}$

Exercice 87 (Oral X 23, Ali,5) :

1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?
2) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?

1) Si *f* existe, alors pour $x \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x+p) = f(x+p+n\sqrt{2})$

   On considère alors $\boxed{A = \left\{p + \sqrt{2}\,q, p, q \in \mathbb{Z}\right\}}$ On définit f sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f = 1_A}$ ($f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ sinon).

   Alors si $x \in A$, $x = p + \sqrt{2}\,q, p, q \in \mathbb{Z}$ donc $f(x+1) = f(x) = 1$ car $x + 1 = p + 1 + \sqrt{2}\,q \in A$. De même, $f(x + \sqrt{2}) = f(x) = 1$.

   De plus, si $x \notin A$, alors $x + 1 \notin A$ (on aurait sinon $x + 1 = p + \sqrt{2}\,q, p, q \in \mathbb{Z}$, et $x = p - 1 + \sqrt{2}\,q \in A$).

   On a alors $f(x+1) = f(x) = 0$ et de même, $f(x + \sqrt{2}) = f(x) = 0$.

   Enfin, f est non constante car $0 \in A$ (donc $f(0) = 1$) et $\dfrac{1}{2} \notin A$ (en effet, si par l'absurde il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{1}{2} = p + \sqrt{2}\,q$, alors $q \neq 0$ et $\sqrt{2} = \dfrac{1-2p}{2q} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde), donc $f(\dfrac{1}{2}) = 0$.

2) On procède par l'absurde et on suppose qu'une telle fonction f existe.

   Alors $\forall p, q \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + p + q\sqrt{2})$.

   On note $A = \left\{p + q\sqrt{2}, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$. On remarque que si $x = p + q\sqrt{2} \in A$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, alors $x^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2} \in A$. Donc en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, (\sqrt{2} - 1)^n \in A$, avec $(\sqrt{2} - 1)^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

   Comme f n'est pas constante, on considère $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ (le cas $f(x) > f(y)$ se traite de même). On a $\forall n, p \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x + p\left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right)$.

   On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\left(f(y) - f(x)\right) > 0$. La continuité de f en y assure que si $|y - u| \leq \alpha$, alors $|f(u) - f(y)| \leq \varepsilon$, donc que $f(u) \geq f(y) - \varepsilon > f(x)$

   On a $(\sqrt{2} - 1)^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, donc on peut choisir et fixer n tel que $0 < (\sqrt{2} - 1)^n < \alpha$

On prend $p \in \mathbb{N}$ tel que $x+p\left(\sqrt{2}-1\right)^n \leq y \leq x+(p+1)\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ (c'est possible en choisissant $p=\left\lfloor \dfrac{y-x}{\left(\sqrt{2}-1\right)^n} \right\rfloor$). On pose alors $u=x+p\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ et on a bien $|y-u| \leq \alpha$, donc $f(u)>f(x)$.

Ceci est absurde car $f(x)=f(u)=f\left(x+p\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right)$.

$\boxed{\text{Donc il n'existe pas } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ continue, non constante, 1-périodique et } \sqrt{2} \text{ périodique}}$.

Exercice 88 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime,3) : soient $K:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, continues et strictement positives. On suppose $\forall x \in [0,1], f(x)=\int_0^1 K(x,z)g(z)\,dz$ et $\forall x \in [0,1], g(x)=\int_0^1 K(x,z)f(z)\,dz$.

Démontrer que $f=g$.

On pourra considérer la fonction $h=g-M\,f$, où M est le maximum de $\dfrac{f}{g}$ sur $[0,1]$.

On sait que $\dfrac{f}{g}$ est continue et strictement positive sur le segment $[0,1]$. Par théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum $M>0$ sur ce segment. Il est en particulier atteint en $x_0 \in [0,1]$.

On a ainsi $\forall x \in [0,1], f(x)-Mg(x) \leq 0$ et $f(x_0)-Mg(x_0)=0$

On considère la fonction $h=g-M\,f$.

Par différence, il vient $\forall x \in [0,1], h(x)=g(x)-Mf(x)=\int_0^1 K(x,z)\left(f(z)-Mg(z)\right)dz \leq 0$.

Dès lors, $0=f(x_0)-Mg(x_0)=\int_0^1 K(x_0,z)\left(g(z)-Mf(z)\right)dz=\int_0^1 K(x_0,z)\left(h(z)\right)dz$.

Donc $\int_0^1 -K(x_0,z)\left(h(z)\right)dz=0$

Or $z \mapsto -K(x_0,z)\left(h(z)\right)$ est continue, positive et l'intégrale est nulle, donc $\forall z \in [0,1], K(x_0,z)\left(h(z)\right)=0$.

Comme K est strictement positive, il vient $\forall z \in [0,1], h(z)=0$, donc $\forall x \in [0,1], g(x)=M\,f(x)$.

En particulier, $g(x_0)=M\,f(x_0)=M^2g(x_0)$. Comme $g(x_0)>0$, on conclut $M^2=1$, donc comme $M>0$, on a nécessairement $M=1$. On déduit bien que $\boxed{f=g}$

Exercice 89 (Oral ESPCI Bastien L,5) : Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $U_n=n\left(a(n!)-\lfloor a\,n! \rfloor\right)$.

Montrer que (U_n) converge si et seulement si $a \in \mathbb{Q}+e\mathbb{N}$.

Indications : commencer par le sens retour.

Pour le sens direct, écrire $U_n=n\left(a\left(n(n-1)!\right)-\lfloor a\,n! \rfloor\right)$ en fonction de U_{n-1}

On remarque tout d'abord que si $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$.

En effet, par définition $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + a \leq x+a < \lfloor x \rfloor + 1 + a$

Or $\lfloor x+a \rfloor$ est l'unique entier relatif b tel que $b \leq x+a < b+1$.

On a donc bien $\lfloor x+a \rfloor = \lfloor x \rfloor + a$.

$\boxed{\text{On suppose alors } a \in \mathbb{Q}+e\mathbb{N}}$. Soient donc $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}$, $a = \dfrac{p}{q} + ec$.

On prend $n \geq q$. Alors $an! = p\dfrac{n!}{q} + ecn!$, avec $p\dfrac{n!}{q} \in \mathbb{Z}$. Donc $\lfloor an! \rfloor = p\dfrac{n!}{q} + \lfloor ecn! \rfloor$ et $U_n = n\left(ecn! - \lfloor ecn! \rfloor\right)$.

Or $e = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}$, donc $ecn! = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{cn!}{p!} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!}$.

De nouveau, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{cn!}{p!} \in \mathbb{Z}$, donc $U_n = n\left(\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} - \left\lfloor \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} \right\rfloor\right)$.

On étudie donc $W_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} = \frac{c}{n+1} + \frac{c}{(n+1)(n+2)} + \frac{c}{n+1} \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!}$.

Or $0 \leq \dfrac{n!}{p!} = \dfrac{n!}{p(p-1)(p-2)!} \leq \dfrac{1}{p(p-1)}$, où $\displaystyle\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p(p-1)}$ converge.

Donc $0 \leq \displaystyle\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \leq \sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)}$ et comme $\displaystyle\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (c'est le reste d'une série convergente), il vient $\displaystyle\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc par somme, $W_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0^+$ et pour n assez grand $\left\lfloor \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{cn!}{p!} \right\rfloor = 0$

On a donc pour n assez grand $U_n = nW_n = \dfrac{cn}{n+1} + \dfrac{cn}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{cn}{n+1} \displaystyle\sum_{p=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \underset{n\to+\infty}{\to} c$ et $\boxed{(U_n) \text{ converge}}$

$\boxed{\text{Etudions la réciproque : on suppose que } (U_n) \text{ converge vers } c \in \mathbb{R}}$. $U_n = n\left(a\left(n(n-1)!\right) - \lfloor a\,n! \rfloor\right)$.

Alors pour $n \geq 1$, $U_{n-1} = (n-1)\left(a\left((n-1)!\right) - \lfloor a\,(n-1)! \rfloor\right)$ donc $a\left((n-1)!\right) = \dfrac{U_{n-1}}{n-1} + \lfloor a\,(n-1)! \rfloor$.

Donc $U_n = n\left(n\dfrac{U_{n-1}}{n-1} + n\lfloor a\,(n-1)! \rfloor - \lfloor a\,n! \rfloor\right)$, et $\dfrac{U_n}{n} = \left(n\dfrac{U_{n-1}}{n-1} + n\lfloor a\,(n-1)! \rfloor - \lfloor a\,n! \rfloor\right)$.

On pose $V_n = n\lfloor a\,(n-1)! \rfloor - \lfloor a\,n! \rfloor \in \mathbb{Z}$. Alors $V_n = \dfrac{U_n}{n} - n\dfrac{U_{n-1}}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} -c$

Par définition de la limite, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, -c - \dfrac{1}{4} \leq V_n \leq -c + \dfrac{1}{4}$. Or l'intervalle $\left[-c - \dfrac{1}{4}, -c + \dfrac{1}{4}\right]$ contient au plus un entier relatif (il est de taille égale à $\dfrac{1}{2}$).

Donc $\forall n \geq N, V_n = V_N$.

On pose alors pour $n \geq N$: $p_n = \lfloor a\,n! \rfloor$. Alors $np_{n-1} - p_n = V_N$, donc $np_{n-1} - V_N = p_n$

On itère le procédé : $p_n = np_{n-1} - V_N = n\left((n-1)p_{n-2} - V_N\right) - V_N = n(n-1)p_{n-2} - V_N(1+n)$.

Puis $p_n = n(n-1)(n-2)p_{n-3} - V_N\left(1+n+n(n-1)\right)$.

Puis $p_n = n(n-1)...(n-(n-N)+1)p_{n-(n-N)} - V_N\left(1+n+n(n-1)+...+n(n-1)...(n-(n-N)+2)\right)$

Donc par récurrence, $p_n = \dfrac{n!}{N!}p_N - V_N \displaystyle\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{N!}p_N - V_N \sum_{k=N+1}^{n} \frac{n!}{k!}$.

Donc $\dfrac{p_n}{n!} = \dfrac{1}{N!}p_N - V_N\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\right)$.

Or $p_n = \lfloor a\,n! \rfloor$, donc $p_n = \lfloor a\,n! \rfloor \leq an! \leq p_n + 1$ et $a(n!) - 1 \leq p_n \leq an!$ et $a - \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{p_n}{n!} \leq a$.

Donc $\dfrac{p_n}{n!} = \dfrac{1}{N!}p_N - V_N\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{N!}p_N - V_N\left(e - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\right)$ et $\dfrac{p_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\to} a$.

Donc par unicité de la limite, $a = \frac{1}{N!} p_N - V_N \left(e - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \right) = -V_N e + \frac{1}{N!} p_N + V_N \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$.

De plus, $V_n = n\lfloor a(n-1)! \rfloor - \lfloor a\, n! \rfloor = np_{n-1} - p_n \in \mathbb{Z}$, avec $a(n!) - 1 < p_n \le an!$ et $p_{n-1} \le a(n-1)!$, donc $np_{n-1} \le an!$, puis $p_n - np_{n-1} > a(n!) - 1 - a(n!)$, donc $V_n = np_{n-1} - p_n < 1$ et comme $V_n \in \mathbb{Z}$, $V_n \le 0$.
En particulier, $-V_N \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{On a donc bien } a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}}$.

Exercice 90 (Oral ESPCI 23, Hugo B,4) : soit (f_n) une suite de fonctions C^3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(3)}(x) \right| \le C$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n(x) \right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Montrer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_n^{(i)}(x) \right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h > 0$. On écrit l'inégalité de Taylor Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$:

$f_n(x+h) = f_n(x) + hf_n'(x) + \frac{1}{2}h^2 f_n''(x) + R_n(x,h)$, avec $|R_n(x,h)| \le C\frac{h^3}{6}$ (1)

$f_n(x-h) = f_n(x) - hf_n'(x) + \frac{1}{2}h^2 f_n''(x) + S_n(x,h)$, avec $|S_n(x,h)| \le C\frac{h^3}{6}$. (2)

On somme les deux : $f_n(x+h) + f_n(x-h) = 2f_n(x) + h^2 f_n''(x) + R_n(x,h) + S_n(x,h)$.

Donc $f_n''(x) = \frac{1}{h^2}\big(f_n(x-h) + f_n(x-h) - 2f_n(x) \big) - \big(R_n(x,h) + S_n(x,h) \big)$

Donc $|f_n''(x)| \le \frac{4}{h^2}\|f_n\|_\infty + \frac{Ch}{3}$ et $\|f_n''\|_\infty \le \frac{4}{h^2}\|f_n\|_\infty + \frac{Ch}{3}$.

Si f_n est la fonction constante nulle, le résultat est immédiat car $\|f_n''\|_\infty = 0$

Sinon, $\|f_n\|_\infty > 0$ et on pose $h = \left(\|f_n\|_\infty \right)^{1/3} > 0$

Ainsi, $0 \le \|f_n''\|_\infty \le 4\left(\|f_n\|_\infty \right)^{1/3} + \frac{C\left(\|f_n\|_\infty \right)^{1/3}}{3}$. , donc par encadrement, $\boxed{\|f_n''\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0}$

De même, en soustrayant (1) et (2), il vient $f_n(x+h) - f_n(x-h) = 2hf_n'(x) + R_n(x,h) - S_n(x,h)$.

Donc $\|f_n'\|_\infty \le \frac{1}{2h}\left(2\|f_n\|_\infty + \frac{Ch^3}{3} \right)$ et $\|f_n'\|_\infty \le \frac{\|f_n\|_\infty}{h} + \frac{Ch^2}{6}$.

On conclut de la même manière en posant $h = \sqrt{\|f_n\|_\infty}$ si $\|f_n\|_\infty > 0$.

On conclut $\boxed{\|f_n'\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0}$

Exercice 91 (Oral ESPCI 23, Samuel,5) : soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \exists c \in \,]x, x+n[\,, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) = f^{(n)}(c)$

On procède par récurrence sur $n \ge 1$ pour montrer $H(n)$: « si h est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$\forall x > 0, \exists c \in \,]x, x+n[\,, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h(x+k) = h^{(n)}(c)$ ».

- Pour $n=1$, on suppose que h est C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ en on prend $x>0$.
  On veut montrer $\exists c \in \left]x,x+1\right[, f(x+1)-f(x)=f'(c)$. On utilise **le théorème des accroissements finis** entre x et $x+1$: comme f est continue sur $\left[x,x+1\right]$, dérivable sur $\left]x,x+1\right[$, alors
  $\exists c \in \left]x,x+1\right[, \dfrac{f(x+1)-f(x)}{1}=f'(c)$ et $H(1)$ est vraie.
- Soit $n\geq 1$ tel que $H(n)$ est vraie.
  On pose pour $x>0$: $T(f)(x)=f(x+1)$. $T\in L(E)$ et $(T-Id_E)^n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)$ en utilisant le binôme de Newton car T et Id_E commutent.
  De même, $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+k)=(T-Id_E)^{n+1}(f)(x)=(T-Id_E)^n(f)(x+1)-(T-Id_E)^n(f)(x))$.
  On note alors $g=(T-Id_E)^n(f)=x\mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)$
  Il vient $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+k)=g(x+1)-g(x)$. Avec le théorème des accroissements finis,
  $\exists c \in \left]x,x+1\right[, g(x+1)-g(x)=g'(c)$ avec $g'(c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f'(c+k)$.
  f' est C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ .donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence en c : il existe
  $\exists d \in \left]c,c+n\right[\subset \left]x,x+n+1\right[,\ g'(c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f'(c+k)=\left(f'\right)^{(n)}(d)$
  Donc $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+k)=g'(c)=f^{(n+1)}(d)$ et $H(n+1)$ est vraie.