**Déroulement des Oraux de Mathématiques :**

**CCINP :** un oral avec 30 minutes de préparation sur un long exercice, dit exercice « majeur ». Présentation pendant 20 minutes, puis second exercice, dit « mineur », à traiter en direct sans préparation pendant les 10 minutes restantes.

**Centrale :** deux oraux

- Maths 1 : 30 minutes de passage sur un exercice, sans préparation.
- Maths 2 (avec Python) : 30 minutes de préparation avec ordinateur sur un long exercice avec des questions pas trop difficiles dont certaines nécessitent d'utiliser Python. Cela reste un oral de Mathématiques même si on ne peut pas mettre totalement de côté les questions informatiques.

**Concours Commun Mines-Ponts :** un oral. 15 mn de préparation sur un premier exercice, puis passage durant 45mn-1h avec un second exercice sans préparation donné en cours d'oral.

**Concours Mines-Telecom :** un oral. 30 mn de passage sans préparation, avec deux exercices portant sur des parties différentes du programme.

**X-ENS-ESPCI :** un oral de 50mn à 1h, sans préparation. Pas d'oral de Mathématiques à l'ENS Paris Saclay.

**Séance 1 : Lundi 21 Mai (analyse)**

**Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel,2) :** soit $f : [0,\pi[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(t)=\dfrac{1}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$.

1) Montrer que $f$ est dérivable en 0.
2) Déterminer une équation de la tangente à $C_f$ en 0. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

**Exercice 2 (Oral IMT 23, Bastien N,2) :**

1) Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$.
2) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

**Exercice 3 (oral CCINP 23, Mailys,2) :** On définit la suite $(U_n)$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}U_n \end{cases}$

1) Montrer que $(U_n)$ est décroissante et convergente.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3/2} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que $\ln(V_n) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{a}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   En déduire la nature de $\sum \ln(V_n)$.
3) 
   a) En simplifiant, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(V_k)$, montrer qu'il existe $C>0$ tel que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{3/2}}$

   b) On pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n$. Montrer que $S$ est définie sur $[-1,1]$.
4) Montrer que $S$ est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle $2x(1-x)y'+(3-2x)y=3$.

**Exercice 4 (Oral Mines 23, Lou Anne,3) :** soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(a_n)$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \ln(n)$.

Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum \exp(-a_n)$ converge et que si $\alpha < 1$, alors $\sum \exp(-a_n)$ diverge.

**Exercice 5 (Oral Mines 23, Bastien L,4) :** convergence et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$.

**Exercice 6 (oral Centrale 1 23, Alice,3) :** soit $\alpha \in \left]0,1\right[$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

On note $a_n = \min\left(\left\{p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geq n\right\}\right)$.

1) Montrer que $a_n$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$.
2) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{p} f(k)$.
3) Déterminer un équivalent de $a_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Séance 2 : Mardi 22 Mai (algèbre)**

**Exercice 7 (oral CCINP 23, Raphaël,1) :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in S_3^+(\mathbb{R})$.

**Exercice 8 (Oral Mines 23, Liam,2) :** soit $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Démontrer $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$.

**Exercice 9 (Oral IMT 23, Bastien N,3) :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f$ canoniquement associée à $A$. Avec le moins de calculs possibles, déterminer $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$, les valeurs propres et vecteurs propres de $A$. Est-elle diagonalisable ?

**Exercice 10 (oral CCINP 23, Mathilde,2) :** on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \left\{M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

1) Soit $J = M(0,1,0)$. Calculer $J^2$ et exprimer $M(a,b,c)$ avec $J, J^2, I_3$.
2)
   a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et en trouver une base et la dimension.
   b) Montrer que le produit de deux matrices de $E$ appartient à $E$.
3) Montrer que $J$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.
4) Montrer que $M = M(a,b,c)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et exprimer ses valeurs propres à l'aide de celles de $J$.
5) Montrer que $Sp(M) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow b = c$.

**Exercice 11 (Oral Mines 23, Liam,3) :** soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que $A$ est somme de deux matrices diagonalisables.

**Exercice 12 (Centrale 1 23,Eloi, 4) :** soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1) Donner les éléments propres de $J$ .
2) Soient $(a_0,...,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

**Séance 3 : Lundi 27 Mai (analyse)**

**Exercice 13 (Oral IMT 23, Ethan,2) :** on pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$ . Trouver le développement en série entière de $f$ .

**Exercice 14 (Oral CCINP 23, Jérémy,2) :** pour $x > 0$ , on considère $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x}dt$ .

1) Montrer que $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+x}dt$ existe.
2) Etudier la continuité de $I(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3) Etudier la limite de $I(x)$ en $+\infty$.

**Exercice 15 (Oral CCINP 23, Arthur,2) :**

On considère la suite $(U_n)$ définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}$ .Pour $n \in \mathbb{N}$ , on pose $V_n = \dfrac{U_n}{n!}$ .

1) Calculer $V_0, V_1, V_2, V_3$.
2) Montrer que $(V_n)$ converge et trouver sa limite.
3) Quel est le rayon de convergence $R$ de $\sum V_n x^n$ ?
4) Pour $x \in \left]-R, R\right[$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n x^n$ . Montrer que $S$ satisfait une équation différentielle à préciser sur $\left]-R, R\right[$.
5) On pose pour $x \in \left]-1,1\right[$ : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Comparer $f$ et $S$ .

**Exercice 16 (Oral Mines 23,Eloi,3) :** On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t\left(1+t^2\right)}dt$

1) Montrer que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que $F$ est impaire.
2) Montrer que $F$ est dérivable, et exprimer $F'$ sans intégrale.
3) Exprimer $F$ sans l'intégrale. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}dt$ ?

**Exercice 17 (Oral Mines 23, Raphaël,4) :** pour $n \in \mathbb{N}$**,** on pose $I_n = \int_1^e \ln^n(t)\,dt$ **.**

1) Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $I_n$ est défini. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ?
2) Déterminer la nature de $\sum I_n$ .
3) Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{I_n}{n!}x^n$ . Calculer $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$ . En déduire $I_n$ .

**Exercice 18 (Centrale 1 23, Simon,3) ;**

On considère $f(x) = \prod\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty}\prod\limits_{n=0}^{N}\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$ .

1) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ .
2) Etudier ses variations.

**Séance 4 : Mardi 28 Mai (algèbre)**

**Exercice 19 (Oral IMT 23, Thomas,2) :** on considère $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P - (X+1)P'$

1) $\varphi$ est-elle bijective ?
2) Déterminer les valeurs propres de $\varphi$ . Est-elle diagonalisable ?

**Exercice 20 (oral CCINP 23, Liam,2) :** soit $A \in M_{5,10}(\mathbb{R})$ . Soit $B = A^T A$ .

1) Montrer que $B$ est diagonalisable.
2) Trouver une des valeurs propres de $B$ .

**Exercice 21 (Oral CCINP 23, Jérémy,3) :** Soit $(E,\langle\ \rangle)$ euclidien, avec $\dim(E) = p \geq 1$ .

Soit $u$ une isométrie vectorielle et $v = u - Id_E$ . Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k$

1) Pour $x \in \ker(v)$ , calculer $u_n(x)$ .
2)
   a) Montrer que $\ker(v) \subset (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$
   b) Montrer que $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3)
   a) Montrer que si $x \in \mathrm{Im}(v)$ , alors $\exists y \in E, u_n(x) = \frac{1}{n}\left(u^n(y) - y\right)$
   b) Pour $x \in E$ , montrer que la suite $(u_n(x))$ converge et déterminer sa limite.
4) On ne suppose plus que $u$ est une isométrie, mais que $\forall z \in E, \|u(z)\| \leq \|z\|$ . Retrouver le résultat de la question précédente. On pourra poser $z = x + ty$ , avec $x \in \ker(v)$ , $t \in \mathbb{R}$ et $y \in E$

**Exercice 22 (Oral Mines 23,Eloi,3) :** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ . Soit $\Phi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto aM + bM^T \end{array}$ .

1) Trouver les éléments propres de $\Phi$ , sa trace et son déterminant.
2) Déterminer une condition sur $a$ et $b$ pour que $\Phi$ soit bijectif et lorsque c'est le cas, déterminer $\Phi^{-1}$

**Exercice 23 (Oral Mines 23, Mailys,4) :** soient $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda A + \mu B$ est diagonalisable. Montrer que $AB = BA$.

**Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) :** soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $\Phi : E \to E$ donnée par $\forall x \in [0,1], \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$.

1) Montrer que $\Phi$ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $E$.
2) Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

**Séance 5 : Jeudi 30 Mai (analyse)**

**Exercice 25 (oral CCINP 23, Maxime,3) :** soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Etudier la convergence de la série $\sum 3^n \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$.
2) Calculer sa somme.

**Exercice 26 (Oral IMT 23, Thomas,2) :** déterminer un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f$ de classe $C^\infty$ sur $I$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n^2 n!$.

**Exercice 27 (oral CCINP 23, Simon,3) :**

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + 1 < b$. Soit une suite $(U_n)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1) Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right)$.
2)
   a) Prouver que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = -\infty$
   b) En déduire que $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
3) On pose $\alpha = b - a$ et $V_n = n^\alpha U_n$. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ puis montrer que $\sum \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)$ converge.
4) Montrer $\exists A > 0, U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$. En déduire la nature de $\sum U_n$.
5) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \frac{b-1}{b-a-1} U_0$. On pourra commencer par calculer la $N$-ème somme partielle de $n(U_{n+1} - U_n) + bU_{n+1} - aU_n$.

**Exercice 28 (Oral Mines 23, Hugo B,4)** : déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(2\pi e n!)}{\ln(n)}$

**Exercice 29 (Centrale 1 23, Thomas,4) ;**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $U_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + U_n^2$ .

1) Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$.
2) Soit $V_n = \dfrac{\ln(U_n)}{2^n}$. Montrer que $(V_n)$ converge vers un réel $\beta$.
3) Montrer que $|V_n - \beta| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
4) Déterminer un équivalent de $U_n$

**Exercice 30 (Oral Centrale 22, Mines 23, Bastien L,5) :** Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$ .

**Séance 6 : Vendredi 31 Mai (probabilités)**

**Exercice 31 (oral CCINP 23,Arthur,1) :** soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p$ . Pour $n \in \mathbb{N}$ , on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de $Y_n$, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la variance de $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$

**Exercice 32 (oral CCINP 23, Eva,2) :** On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, 3P(X = n+2) = 4P(x = n+1) - P(X = n)$.

1) Determiner la loi de $X$
2) Montrer $X$ est d'espérance finie et admet une variance. Les calculer.

**Exercice 33 (oral CCINP 22,2)** On considère un espace probabilisé $(\Omega, A, P)$ Soit $p \in \left]0,1\right[$

1) Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$ Expliciter la loi de $X$.
   Montrer que $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p}$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[1, +\infty[$ , $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ où les $x_k$ sont distincts. Pour $k \in \mathbb{N}$ , on note $p_k = P(X = x_k)$ et on considère $f_k : t \mapsto p_k e^{-t x_k}$. Soit $F_X : t \mapsto E\left(e^{-tX}\right)$.

2) Montrer que $F_X$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Trouver un lien entre $F_X$ et la série $\sum f_k$ .
3) Montrer que la série $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ .
4) Montrer que $f_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt$ .
5) Montrer que $F_X$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ . Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\,dt$ . Quel est le lien avec $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ ?
6) On suppose que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$. Calculer $F_X$ et retrouver le résultat de la question 1).

**Exercice 34 (Oral Mines 23, Ali,3)** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $P(\llbracket 1,n \rrbracket)$ (ensemble des sous-ensembles de $\llbracket 1,n \rrbracket$) de l'équiprobabilité. Calculer $P\left(\left\{(A,B) \in P(\llbracket 1,n \rrbracket)^2 , A \cap B = \varnothing\right\}\right)$.

**Exercice 35 (Oral Mines 23, Maxime,4) :** Une urne contient $p$ boules. On effectue des tirages successifs avec remise. On note $X_n$ le nombre de boules ayant été tirées après $n$ tirages.

1) Montrer que $P\left(X_n = p\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
2) Déterminer l'espérance de $X_n$.

**Exercice 36 (oral Centrale 1 23, Raphaël) :** Soit $(\Omega, T, P)$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $\Omega$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi.
Soit $N$ une variable aléatoire sur $\Omega$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes et d'espérance finie. On pose $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

1) Pour $t \in [0,1]$, montrer que $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) P(N = k) t^n$.
2) Montrer que $\forall t \in [0,1], G_Y(t) = G_N \circ G_{X_1}(t)$.
3) Montrer que $Y$ est d'espérance finie et exprimer l'espérance de $Y$ en fonction de celle de $X_1$ et de celle de $N$.

**Séance 7 : Jeudi 6 Juin (algèbre)**

**Exercice 37 (oral CCINP 23, Emma,1) :** On note $E$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f, g \in E$, on note $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t) dt$.

1) Montrer que c'est un produit scalaire.
2) Soit $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que si $g \in E$, alors $x \mapsto x^2 g(x)$ est élément de $H$. En déduire que $H^\perp = \{0\}$.

**Exercice 38 (Oral IMT 23, Emma,3) :** pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Phi(P) = \int_{X}^{X+1} P(t)\, dt$.

Pour $n \geq 2$, on note $\Phi_n$ la restriction de $\Phi$ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que $\Phi_2$ est un endomorphisme.
2) $\Phi_2$ est-elle diagonalisable ?
3) Mêmes questions avec $\Phi_n$.
4) Déterminer les éléments propres de $\Phi_n$.

**Exercice 39 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) :** Soient $n \geq 2$, un entier, et $A \in A_n(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

1) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^T AX \in \mathbb{R}$. Calculer $\left(X^T AX\right)^T$ et montrer que $X^T AX = 0$.
2) Montrer que la seule valeur propre réelle possible de $A$ est zéro. En déduire que $M$ et $N$ sont inversibles.
3) Montrer que $M$ et $N$ commutent, et qu'il en est de même pour $M^{-1}$ et $N^{-1}$. Montrer que $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale et n'admet pas $-1$ comme valeur propre.
4) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ qui n'admet pas $-1$ comme valeur propre. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $B \in A_n(\mathbb{R})$ telle que $U = \left(I_n + B\right)^{-1}\left(I_n - B\right)$

**Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :**
Soit $f(x)=\exp(-x^2)$. Pour $n$ entier naturel, $x$ réel, soit $P_n(x)=(-1)^n f^{(n)}(x)\exp\left(x^2\right)$.

Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, soit $\langle P,Q\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)f(t)\,dt$.

1) Montrer que $P_n$ est polynomiale, de degré $n$, et que le coefficient dominant de $P_n$ est égal à $2n$ Etudier la parité de $P_n$.
2) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Calculer $\left\langle P_n,X^p\right\rangle$ pour $n\geq p$. Montrer que la famille des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire. Calculer $\langle P_n,P_n\rangle$ pour $n\in\mathbb{N}$.

**Exercice 41 (Oral Mines 23, Hugo A,3) :** soit $E$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,dt$ converge. Pour $f,g\in E$, on note $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)dt$.

On considère $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Q_n\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j\in[\![1,n]\!],(Q_n)_{i,j}=\left\langle\varphi_i,\varphi_j\right\rangle$.

On suppose que pour $r\in\mathbb{N}^*$ fixé, $Q_r$ est inversible.

1) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
2) Montrer que la plus petite valeur propre de $Q_r$ est strictement positive.
3) Montrer que $\varphi_{r+1}\in Vect(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\Leftrightarrow Q_{r+1}$ est non inversible.

**Exercice 42 (Oral Mines 23, Alice,4) :** soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ définis par $\langle P,Q\rangle=\int\limits_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$. On admet que c'est un produit scalaire.

1) Montrer que $\exists!(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les $P_n$ soient deux à deux orthogonaux, que $\deg(P_n)=n$ et $\left\langle P_n,X^n\right\rangle=1$.
2) On note $Q_n(X)=(-1)^n P_n(-X)$. Montrer que $(Q_n)$ vérifie les trois conditions ci-dessus et en déduire que $P_n$ est de même parité que $n$.
3) Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, avec $n\geq 2$. Montrer que $\langle P_n,Q\rangle=0$.
4) Expliciter $P_0,P_1,P_2$.

**Séance 8 : Mercredi 5 Juin (analyse)**

**Exercice 43 (Oral CCINP 23,3)** : On note $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\right\}$

On définit la fonction $f$ sur $F$ par $f(x,y)=(x-y)^2-xy$.

1) Montrer que $F$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les extrema globaux de $f$ sur $F$.

**Exercice 44 (Oral IMT 23, Jérémy,2) :**

Etudier la nature de la suite définie pour $n\in\mathbb{N}$ par $U_n=\sum_{k=0}^{n}ch\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)-n$.

**Exercice 45 (oral CCINP 23, Orane, Raphaël,3) :** soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, développable en série entière sur l'intervalle $\left]-r,r\right[$, avec $r>0$. Soit $\alpha>0$. On étudie $(E)$ : $y'+\dfrac{\alpha}{x}y=\dfrac{f(x)}{x}$, avec $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x\in\left]0,r\right[$, on pose $T_\alpha f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}f(u)\,du$

1) Résoudre l'équation homogène $y'+\dfrac{\alpha}{x}y=0$ sur $\left]0,r\right[$
2) Soit $x\in\left]0,r\right[$.
   a) Montrer qu'il existe $M_x>0$ tel que $\forall t\in[0,x],|f(t)|\le M_x$
   b) Montrer que $u\mapsto u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable sur $\left]0,x\right]$.
3) Montrer que $T_\alpha f$ est solution de $(E)$ sur $\left]0,r\right[$ et résoudre $(E)$ sur $\left]0,r\right[$.
4) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)$ telle que $\forall x\in\left]0,r\right[,T_\alpha f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+\alpha}x^n$
5) Montrer qu'il existe une unique solution de $(E)$ sur $\left]0,r\right[$ telle que $f$ possède une limite finie en 0.

**Exercice 46 (Oral Mines 23, Samuel,4) :**

1) Soit $x>0$ . Montrer qu'il existe un unique $t_x>0$ tel que $sh(x)=x+\dfrac{x^3}{6}sh(x\,t_x)$
2) Montrer que $sh(x\,t_x)>1$
3) Etudier les limites de $t_x$ lorsque $x$ tend vers 0 ou vers $+\infty$.

**Exercice 47 (Oral Centrale 1 23, Bastien L,4) :**

1) Dessiner le graphe de $x\mapsto\arcsin(\sin(x))$.
2) Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2(2n+1)}\sin^{2n+1}(x)\right)dx$.
3) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

**Exercice 48 (Oral Mines 23, Paul B,5)** : soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Etudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $F_{\alpha,\beta}$ définie par $F_{\alpha,\beta}(x)=x^\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\{x\}^{\lfloor x\rfloor^\beta}\right)$, où $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$

**Séance 9 : Lundi 10 Juin (algèbre)**

**Exercice 49 (oral CCINP 23, Simon,3) :** soit $M\in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $M+M^T$ nilpotente.

1) Montrer que $M\in A_n(\mathbb{R})$.
2) Le résultat reste-t-il toujours vrai si on suppose $M\in M_n(\mathbb{C})$ ?

**Exercice 50 (oral CCINP 23, Samuel,3) :** pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.

Soit $\| \ \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

1) Donner une matrice non nulle admettant uniquement 0 comme valeur propre. Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ n'est pas une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
2)
   a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle. Montrer que $XX^T \in M_n(\mathbb{C})$ et calculer ses coefficients diagonaux.
   b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$. On pourra montrer que pour $\lambda \in Sp(A), \exists X \neq 0, AXX^T = \lambda XX^T$
3) On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$. On admet que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.
4) Soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall i, j \in [\![1, n]\!], S_{i,j} = \dfrac{1}{2}$ si $|i-j| = 1$ et $S_{i,j} = 0$ sinon.
   Montrer que si $\lambda$ est valeur propre complexe de $S$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\exists \theta \in [0, \pi], \lambda = \cos\theta$.
5) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$. Calculer $SX_k$ et en déduire les valeurs propres de $S$.

**Exercice 51 (Oral IMT 23, Orane,4) :** Par l'absurde, on considère $A \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1}$ est de rang 1.

1) Montrer qu'il existe un vecteur propre de $A^2$, et que $-1$ est valeur propre de $A^2$.
2) Déterminer les valeurs propres complexes de $A$
3) Conclure.

**Exercice 52 (Oral Mines 23, Lou Anne,4) :** soit $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$.

1) On suppose $n$ pair. Montrer que si $\alpha$ est racine de $P_n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^{2^k}$ est aussi racine de ce même polynôme.
2) Qu'en est-il pour $n$ impair ?

**Exercice 53 (Oral Mines 23, Maxime,4) :** soit $M \in M_d(\mathbb{C})$. On s'intéresse à la série entière $\sum \|M^n\| z^n$.

1) Montrer que le rayon de convergence ne dépend pas de la norme choisie.
2) Déterminer ce rayon pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$.
3) La précédente matrice est-elle semblable à sa transposée ?

**Exercice 54 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :**
Soit $\varphi \in L(\mathbb{R}[X])$ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X], (\varphi(P))' = \varphi(P')$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $\varphi(X^n) = X^n + R_n$, avec $\deg(R_n) < n$.
2) En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\varphi$. A quelles conditions la restriction de $\varphi$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?
3) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Quel est son spectre ?

**Séance 10 : Lundi 10 Juin (analyse)**

**Exercice 55 (Oral IMT 23, Emma,2) :** pour $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n^2 + t^2}$

1) Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$
2) Montrer que $f$ est continue sur $D$.
3) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
4) $f$ est-elle dérivable sur $D$ ?

**Exercice 56 (Oral IMT 23, Paul C,3) :**
Soit $(U_n)$ une suite définie par $U_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1) Nature de la suite $(U_n)$ ?
2) Nature de la série de terme général $2 - U_n$ ?

**Exercice 57 (oral CCINP 23, Emma,4) :** Soit $n \geq 2$, avec $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}$

1) Déterminer le domaine de définition de $f_n$.
2) Etudier ses variations et ses limites aux bornes.
3) Est-ce que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ?
4) Déterminer le domaine de définition $D$ de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n$. Etudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur $D$.
5) Etudier la continuité de $S$ sur $D$.
6) Etudier les limites de $S$ en $1$ et en $+\infty$

**Exercice 58 (Oral Mines 23, Mailys,5) :** Convergence et calcul de $\sum (-1)^n I_n$, avec $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t)}{1 + \cos^2 t} dt$

**Exercice 59 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) :** on considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$

1) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer l'existence et calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

**Exercice 60 (oral X, Mines 23, Liam, 4) :** soit $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}, f^2(x) + (1 + f'(x))^2 \leq 1$.

1) Montrer que $f$ est décroissante.
2) Montrer que $f$ est la fonction nulle.

**Séance 11 : Mardi 11 Juin (algèbre)**

**Exercice 61 (oral CCINP 23, Paul,3) :**

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -256$
2) Soit $P = X^4 + \alpha X^3 + \beta X + 16$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Trouver $\alpha, \beta$ tels que $P$ admette une racine triple.

**Exercice 62 (oral CCINP 23, Paul C,4) :** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $W$ l'ensemble des fonctions $w$ telles que $w(t) = a\,t + b$, avec $a$ et $b$ des réels quelconques.
Soit $G$ l'ensemble des fonctions $g$ $C^2$ telles que $g(0) = g(1) = 0$ et $g'(0) = g'(1) = 0$
Soit $H = \{g'', g \in G\}$ On considère sur $E$ le produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

1) Justifier que $W$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension 2.
2) Soit $g \in G$. Montrer que $g'' \in W^{\perp}$.
3)
   a) En admettant que $E = W \oplus H$, établir que $W^{\perp} \subset H$.
   b) Déterminer entièrement $W^{\perp}$.
4) Soit $f \in E$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, tels que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$. Justifier que

   $a$ et $b$ sont solutions du système : $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \\ \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{2} = \displaystyle\int_0^1 F(t)\,dt \end{cases}$
5) Conclure.

**Exercice 63 (Oral IMT 23, Paul C,4) :** soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$

Soit $\omega$ un complexe tel que $\omega^n = 1$. Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $U$ est un vecteur propre de $A$ associé à une valeur propre $\lambda$ que l'on explicitera en fonction de $P$.
2) A quelle condition $\lim\limits_{N \to +\infty} A^N$ existe-t-elle ?

**Exercice 64 (Oral Mines 23, Ali,3)** : Déterminer les solutions dans $M_2(\mathbb{C})$ de l'équation $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

**Exercice 65 (Oral Mines 23, Mathilde,4)** : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^T = Tr(X)A$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{R})$.
On pourra distinguer les cas $Tr(A) = 2$ et $Tr(A) \neq 2$

**Exercice 66 (Oral Centrale 18, Mines 23, Paul B et Yanis,4)** : soit $E$ un espace vectoriel de dimension $N$. Soit $n=\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$. Soit $u \in L(E)$ tel que $rg(u) \geq N-n$ et $u^3=0$.

1) Que peut-on dire de $rg(u^2)$ ? Montrer que $N=3n$.
2) Montrer que $A=\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ est la matrice de $u$ dans une certaine base.

**Séance 12 : Jeudi 13 Juin (divers)**

**Exercice 67 (oral CCINP 23, Orane,3) :** soit $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver $D$ diagonale et $P$ inversible telles que $A=PDP^{-1}$
2) Trouver $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3=A$.

**Exercice 68 (Oral IMT 23, Jérémy,2) :** Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de ls suite de fonctions définie par $f_n(x)=\dfrac{e^{-x}\left(x^3+x\right)n}{1+nx}$.

**Exercice 69 (Oral CCINP 23, Ethan,3) :** sous réserve de convergence, on note $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}dy$

1) Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$
2)
   a) Montrer que $f(0)$ existe et donner sa valeur.
   b) Montrer que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3)
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,dt$
   b) Montrer que $f$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x f''(x)+f'(x)+x f(x)=0$.
5) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$

**Exercice 70 (Oral Mines 22,23, Samuel, 4)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$

1) Montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire discrète $X$ à valeurs complexes telle que $X$ et $X+\lambda$ aient la même loi.
2) On suppose $P(X=0)<1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\lambda$ pour qu'il existe une variable aléatoire discrète $X$ à valeurs complexes telle que $X$ et $\lambda X$ aient la même loi.

**Exercice 71 (Oral Mines 23, Chloé,4) :** Soit $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $E$, sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que toutes les matrices de $E$ sont diagonalisables.

1) Montrer que $\dim(E) \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$
2) On suppose $K=\mathbb{R}$. Quelle est la valeur maximale possible pour $\dim(E)$ ?
3) On suppose $K=\mathbb{C}$ et $n=2$. Quelle est la valeur maximale possible pour $\dim(E)$ ?

**Exercice 72 (Oral Centrale 1 23, Mathilde,5)** : soit $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien.
Soient $B=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|\leq 1\right\}$ et $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1\right\}$

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, de classe $C^2$. On définit le Laplacien par $\Delta f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

1) Montrer que $f$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur $B$.
   Montrer que $f$ admet un minimum $m'$ et un maximum $M'$ sur $S$.
2) On suppose $\forall x\in B, \Delta f(x)>0$. Montrer que $M=M'$

**Séance 13 : Vendredi 14 Juin (divers)**

**Exercice 73 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :**

1) Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $M^p=0$. Montrer que si $M$ est diagonalisable, alors $M=0$.
2) Soit $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $M=\begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}$. $M$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 74 (oral CCINP 23, Liam) :** soit $f:\begin{array}{l}[-1,1]\times\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto x^2-\sqrt{1-x^2}\cos y\end{array}$.

On admettra que $f$ est continue et qu'elle est $C^2$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.
2)
   a) Trouver les points critiques sur $]-1,1[\times[0,\pi]$.
   b) Montrer que $\forall(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}, f(x,y)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)\leq x^2+\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{4}$.
   c) Montrer que $f$ admet un maximum global en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right)$. On pourra poser $u=\sqrt{1-x^2}$.
3) Déterminer la matrice Hessienne en $(0,\pi)$. $f$ admet-elle un maximum local en $(0,\pi)$ ?
4) $f$ admet-elle un minimum global en $(0,0)$ ?
5) Soit $y_0\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. $f(1,y_0)$ est-il un extremum local ?

**Exercice 75 (Oral IMT 23, Orane,2) :** pour $n\in\mathbb{N}$, on considère $f_n:x\mapsto\arctan\left(e^{-nx}\right)$.

En cas de convergence, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$

1) Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.
2) Montrer que $f$ est continue et monotone sur $D$.

**Exercice 76 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) :** soit $A\in M_p(\mathbb{C})$. On suppose $\lim_{n\to+\infty}Tr(A^n)=0$. Montrer que le module des valeurs propres de $A$ est strictement inférieur à 1.

**Exercice 77 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.
Soit $\sigma$ une permutation de $[\![1,n]\!]$. On définit $P_\sigma \in S_n$ par $\forall i,j \in [\![1,n]\!], (P_\sigma)_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.

1) Montrer que si $\sigma, s \in S_n$, alors $P_\sigma P_s = P_{s\circ\sigma}$. Montrer que $P_\sigma$ est orthogonale.
2) Montrer que $\exists l \in \mathbb{N}^*, P_\sigma^l = I_n$.
3) $P_\sigma$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ? Sur $\mathbb{R}$ ?

Deux exercices très astucieux pour finir :

**Exercice 78 (Oral Mines 23, Chloé,5) :** soient deux réels $a,b$ tels que $a<b$. Soient deux fonctions $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\frac{f}{g}$ admet un minimum $m$ et un maximum $M$ sur $[a,b]$.
2) Montrer que $\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}\left(\int_a^b fg\right)^2$

**Exercice 79 (Oral Mines 23, Ali,5)** : Soit $E = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = f(1) = 1 \right\}$. Déterminer

$$\inf_{f\in E}\left(\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)dt\right)$$

**Séance 14 : Lundi 17 Juin (corrections suivant la demande)**

**Exercices en plus :**

**Oraux ENS-X-ESPCI :**

**Exercice 80 (Oral ENS 23, Eloi,5) :** Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $A$ un sous-ensemble de $[\![1,N]\!]$ de cardinal $n$. Soit $\sigma$ une permutation de $[\![1,N]\!]$. On note $\sigma_i$ le i-ème élément de la permutation $\sigma$. Déterminer la probabilité que les $\sigma_1,...,\sigma_n$ forment $A$.
2) Soit $F$ un ensemble de sous-ensembles de $[\![1,N]\!]$ telle que si $A$ et $B$ sont des éléments distincts de $F$, on a $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Montrer que le nombre d'éléments de $F$ est majoré par $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor}$

**Exercice 81 (Oral ENS 23, Ali,5) :** soit $U_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{1/n}$.

1) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $\ln(U_n)$.
2) Déterminer un équivalent de $U_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 82 (Oral ENS 23, Ali) :** Déterminer la forme d'une matrice triangulaire et orthogonale dans $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 83 (Oral ENS 23, Ali,2) :** Que dire de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque $(a_n)$ est périodique ?

**Exercice 84 (Oral ENS 23, Maxime,5) :** soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\| \ \|$.

Soit $f \in L(E)$. On suppose $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$. On pose $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k$.

Etudier la convergence et la limite de $(S_n)$.
Indication : étudier $S_n$ sur $\mathrm{Im}(Id_E - f)$ et $\ker(Id_E - f)$.

**Exercice 85 (Oral ENS 23, Maxime,5) :** soient $n \geq 3$ points $M_1,...,M_n$ dans le plan. Pour chaque couple de points, on lance une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in \left]0,1\right[$. Si on obtient Pile, on trace une arête entre les deux points et si on obtient Face, on ne fait rien. On note $T_n$ la nombre de triangles ainsi formés.
Pour $i \neq j$, on pose $X_{i,j} = 1$ si les points $M_i$ et $M_j$ sont reliés, et $X_{i,j} = 0$ sinon.

On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

1) Déterminer l'espérance de $T_n$.
2) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

**Exercice 86 (Oral X 23, Ali,5) :** déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + ... + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$

Pour $m \in [\![2, n]\!]$, on pourra poser $a_{m,n} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + (m+1)\sqrt{1 + ... + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$ et considérer, pour $n$ fixé, $W_m = a_{m,n} - (m+1)$.

**Exercice 87 (Oral X 23, Ali,5) :**

1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?
2) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non constante, 1-périodique et $\sqrt{2}$ périodique ?

**Exercice 88 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime,3)** : soient $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues et strictement positives. On suppose $\forall x \in [0,1], f(x) = \int_0^1 K(x,z)g(z)\,dz$ et $\forall x \in [0,1], g(x) = \int_0^1 K(x,z)f(z)\,dz$.

Démontrer que $f = g$.

On pourra considérer la fonction $h = g - M f$, où $M$ est le maximum de $\frac{f}{g}$ sur $[0,1]$.

**Exercice 89 (Oral ESPCI Bastien L,5) :** Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $U_n = n\left(a(n!) - \lfloor a\,n! \rfloor\right)$.
Montrer que $(U_n)$ converge si et seulement si $a \in \mathbb{Q} + e\mathbb{N}$.

Indications : commencer par le sens retour.
Pour le sens direct, écrire $U_n = n\left(a\left(n(n-1)!\right) - \lfloor a\,n! \rfloor\right)$ en fonction de $U_{n-1}$

**Exercice 90 (Oral ESPCI 23, Hugo B,4)** : soit $(f_n)$ une suite de fonctions $C^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f_n^{(3)}(x)\right| \leq C$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f_n(x)\right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Montrer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f_n^{(i)}(x)\right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

**Exercice 91 (Oral ESPCI 23, Samuel,5)** : soit $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \exists c \in \left]x, x+n\right[, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) = f^{(n)}(c)$

**Indications pour les exercices :**

**Séance 1 : Lundi 21 Mai (analyse)**

**Exercice 1 (oral CCINP 23, Samuel,2) :**

1) Chercher la limite du taux d'accroissement.
2) Chercher le signe de la différence entre $f(t)$ et l'équation de la tangente en 0 pour $t$ proche de 0 à l'aide de développements limités.

**Exercice 2 (Oral IMT 23, Bastien N,2) :** Utiliser le théorème d'intégration terme à terme, puis calculer $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ en séparant les termes d'indice pair et impair.

**Exercice 3 (oral CCINP 23, Mailys,2) :**

1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.
2) Faire un développement limité en écrivant $\ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) = \ln(2n+2) - \ln(2n+5)$ puis en mettant le terme dominant en facteur dans chaque expression.
3) a) Reconnaître des sommes télescopiques et étudier $\ln(n^{3/2}U_n)$.
   b) Utiliser un critère de majoration pour les séries numériques.
4) Dériver terme à terme avec soin, et utiliser la relation qui définit $U_n$.

**Exercice 4 (Oral Mines 23, Lou Anne,3) :** utiliser la définition de limite pour $\frac{a_n}{\ln(n)}$.

**Exercice 5 (Oral Mines 23, Bastien L,4) :** pour le calcul, décomposer en éléments simples puis exprimer les différentes termes à l'aide de $H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$. Conclure à l'aide des sommes de Riemann ou d'un développement asymptotique de $H_N$.

**Exercice 6 (oral Centrale 1 23, Alice,3) :**

1) Utiliser la nature de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ et majorer $\sum_{k=1}^{p} f(k)$ pour $p < n$
2) Comparer avec une intégrale.
3) Trouver de deux manières différentes un équivalent de $\sum_{k=1}^{a_n} f(k)$ en utilisant la question précédente et que $\sum_{k=1}^{a_n} f(k) \geq n \geq \sum_{k=1}^{a_n - 1} f(k)$.

**Séance 2 : Mardi 22 Mai (algèbre)**

**Exercice 7 (oral CCINP 23, Raphaël,1) :** chercher les valeurs propres de $A$ ou calculer $X^T AX$ lorsque $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

**Exercice 8 (Oral Mines 23, Liam,2) :** montrer $\mathrm{Im}(A+B) \subset \mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)$.

**Exercice 9 (Oral IMT 23, Bastien N,3) :** déterminer le rang avec les colonnes, puis une base du noyau. Observer les colonnes pour lesquelles tous les coefficients non diagonaux sont nuls. Utiliser la trace pour trouver la dernière valeur propre complexe $\alpha$ et déterminer un vecteur propre associé.

**Exercice 10 (oral CCINP 23, Mathilde,2) :**

2) a) Montrer $E = Vect\left(I_3, J, J^2\right)$ et en déduire que c'est un espace vectoriel.

   b) Utiliser la première question et calculer $J^3$.
3) Calculer le polynôme caractéristique.
4) Utiliser 1) et la diagonalisation de $J$ effectuée au 3).
5) Calculer $1+j+j^2$ et procéder avec soin par double implication.

**Exercice 11 (Oral Mines 23, Liam,3) :** Ecrire $A$ comme somme de deux matrices triangulaires, avec des coefficients tous distincts sur la diagonale.

**Exercice 12 (Centrale 1 23, Eloi, 4) :**

1) Déterminer les valeurs de $\lambda$ telles que $JX = \lambda X$ admet au moins une solution $X \neq 0$ ou bien calculer le polynôme caractéristique de $J$ puis chercher les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres.
2) Etablir que $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i J^i$.

**Séance 3 : Lundi 27 Mai (analyse)**

**Exercice 13 (Oral IMT 23, Ethan,2) :** Utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-u)^2}$

**Exercice 14 (Oral CCINP 23, Jérémy,2) :**

1) Utiliser un équivalent en $0$ et un $o$ en $+\infty$.
2) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
3) Utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

**Exercice 15 (Oral CCINP 23, Arthur,2) :**

2) Trouver une relation entre $V_n$ et $V_{n+1}$ et exprimer $V_n$ en fonction de $n$.
3) Utiliser la suite $(V_n 1^n)$.
4) Dériver terme à terme et obtenir une équation en faisant apparaître $S$ et $S'$.
5) Montrer que $f$ et $S$ sont solutions d'un même problème de Cauchy.

**Exercice 16 (Oral Mines 23,Eloi,3) :**

1) Etudier l'intégrabilité de $t \mapsto g(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{t\left(1+t^2\right)}$ en 0 et en $+\infty$.
2) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres puis décomposer en éléments simples en séparant les cas particuliers. Montrer que F'
3) Effectuer une intégration par parties.

**Exercice 17 (Oral Mines 23, Raphaël,4) :**

1) Utiliser le théorème de convergence dominée pour trouver la limite (par exemple).
2) Faire le changement de variable $u = \ln(t)$ et en déduire un équivalent de $I_n$ en intégrant par parties.
3) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment puis les développements en séries entières usuels.

**Exercice 18 (Centrale 1 23, Simon,3) ;**

1) Utiliser la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \ln\left(1+e^{-n(1+x^2)}\right)$ et relier sa somme à $f$.
2) Dériver la somme de la série de fonctions précédente, ou raisonner directement en prenant $0 \leq x \leq y$.

**Séance 4 : Mardi 28 Mai (algèbre)**

**Exercice 19 (Oral IMT 23, Thomas,2) :** Ecrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (ou dans une autre base mieux choisie).

**Exercice 20 (oral CCINP 23, Liam,2) :**

1) Calculer $B^T$.
2) Montrer que $B$ n'est pas inversible.

**Exercice 21 (Oral CCINP 23, Jérémy,3) :**

2) a) Utiliser que $u \in O(E)$.
   b) Penser au théorème du rang.
3) a) Reconnaître une somme télescopique.
   b) Montrer que $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$ en majorant $\|u_n(x)\|$.
4) Montrer que $\langle x, u(y) - y \rangle = 0$ en utilisant l'indication et en s'intéressant au polynôme en $t$ obtenu.

**Exercice 22 (Oral Mines 23,Eloi,3) :**

1) Ecrire la matrice de $\Phi$ dans une base adaptée à la décomposition $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.
2) Utiliser la matrice précédente et exprimer $\Phi^{-1}$ sur $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ ou résoudre l'équation $\Phi(M) = N$.

**Exercice 23 (Oral Mines 23, Mailys,4) :** Commencer par trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ soit diagonalisable. Si $f$ et $g$ sont canoniquement associés à $A$ et à $B$, prendre une base dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale et traduire que la matrice de $\lambda f + g$ doit toujours être diagonalisable.

**Exercice 24 (Oral Centrale 1 23, Mailys,4) :**

1) Bien penser à montrer que $\Phi$ est linéaire et que si $f \in E$, alors $\Phi(f)$ est continue (par exemple avec Chasles).
2) Montrer que si $f \in E$, alors $\Phi(f)$ est de classe $C^2$ sur $[0,1]$ et calculer $\Phi(f)''$. Utiliser une analyse-synthèse pour trouver $\operatorname{Im}(\Phi)$.

**Séance 5 : Jeudi 30 Mai (analyse)**

**Exercice 25 (oral CCINP 23, Maxime,3) :**

1) Prendre un équivalent.
2) Linéariser $\sin^3 \alpha$ puis calculer la somme partielle de la série à l'aide d'une somme télescopique.

**Exercice 26 (Oral IMT 23, Thomas,2) :** Chercher une fonction développable en série entière.

**Exercice 27 (oral CCINP 23, Simon,3) :**

1) Utiliser un développement limité.
2) a) Montrer que la série diverge, puis que la suite des sommes partielles est décroissante.
   b) Utiliser la question précédente et une somme télescopique.
3) Utiliser les développements limités et $\ln\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right) = \ln\left(n(1+\dfrac{a}{n})\right) - \ln\left(n(1+\dfrac{b}{n})\right)$.
4) Calculer les sommes partielles de la série précédente et simplifier.

5) Montrer que la somme suggérée est nulle d'une part, et la calculer d'une autre manière en séparant les différentes termes.

**Exercice 28 (Oral Mines 23, Hugo B,4)** : développer $e$ en série entière et déterminer un équivalent de $U_n = \dfrac{\sin(2\pi e n!)}{\ln(n)}$. Montrer avec soin que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$

**Exercice 29 (Centrale 1 23, Thomas,4) ;**

1) Montrer que $(U_n)$ est monotone mais ne converge pas.
2) Calculer $V_{n+1} - V_n$ et utiliser le lien suite-série.
3) Considérer $\displaystyle\sum_{k=n}^{N}(V_{k+1} - V_k)$ à $n$ fixé et étudier la limite quand $N$ tend vers l'infini.
4) Ecrire $U_n$ en fonction de $V_n$ et conclure.

**Exercice 30 (Oral Centrale 22, Mines 23, Bastien L,5) :** Effectuer un changement de variable et poser $t = e^{-u}$ . Utiliser un développement en série entière puis le théorème d'intégration terme à terme. Choisir une écriture telle que la somme des valeurs absolues des intégrales converge bien.

**Séance 6 : Vendredi 31 Mai (probabilités)**

**Exercice 31 (oral CCINP 23,Arthur,1) :**

1) Calculer $P(Y_n = 1)$.
2) Calculer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ pour $j > i+1$ et $j = i+1$.

**Exercice 32 (oral CCINP 23, Eva,2) :**

1) Reconnaître une suite récurrence linéaire d'ordre 2 et utiliser $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
2) Lorsque $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in \left]-1,1\right[$, calculer $f'$ et $f''$.

**Exercice 33 (oral CCINP 22,2)**

1) Utiliser le théorème de transfert et les séries entières usuelles.
2) Utiliser la convergence de $\displaystyle\sum_k p_k$ .
3) Montrer $0 \le \|f_k\|_\infty \le p_k$ .
4) Reconnaître une fonction usuelle.
5) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
6) Calculer $F_X$ avec le théorème de transfert puis poser $u = e^{-t}$ dans l'intégrale.

**Exercice 34 (Oral Mines 23, Ali,3)** : Poser $F_k = \left\{ (A,B) \in P(\llbracket 1,n \rrbracket)^2, A \cap B = \varnothing, card(A) = k \right\}$ et calculer $card(F_k)$.

**Exercice 35 (Oral Mines 23, Maxime,4) :**

1) Utiliser $E_{n,k}$ : « la $k-ème$ boule a été prise au moins une fois lors des $n$ premiers tirages » et écrire l'événement $X_n = p$ à l'aide des $E_{n,k}$ , puis utiliser l'événement contraire.
2) Utiliser les $1_{E_{n,k}}$ et la linéarité de l'espérance.

**Exercice 36 (oral Centrale 1 23, Raphaël) :**

1) Utiliser la définition de fonction génératrice et le système complet d'événements $(N=k)_{k\in\mathbb{N}}$.
2) Si on note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, exprimer $G_{S_k}$ en fonction de $G_{X_1}$.
3) Exploiter le lien entre la dérivée de la fonction génératrice et l'espérance.

**Séance 7 : Jeudi 6 Juin (algèbre)**

**Exercice 37 (oral CCINP 23, Emma,1) :**

1) Montrer avec soin que $\langle , \rangle$ est défini positif.
2) Montrer d'abord $\forall t \in [-1,1]\setminus\{0\}, g(t)=0$.

**Exercice 38 (Oral IMT 23, Emma,3) :**

1) Montrer la linéarité et que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2) Ecrire la matrice de $\Phi_2$ dans la base canonique.
3) Procéder de même : écrire un polynôme sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et calculer $\Phi(P)$.
4) Remarquer que 1 est la seule valeur propre de $\Phi_n$. En utilisant l'image d'une base et le rang, montrer que $\dim\left(E_1\left(\Phi_n\right)\right)=1$.

**Exercice 39 (oral CCINP 22,23,3, Hugo A,4) :**

1) Regarder la taille de la matrice $X^T AX$ et calculer sa transposée de deux manières.
2) Prendre une valeur propre et un vecteur propre non nul associé.
3) Relier $M^T$ avec $N$, puis exprimer $\Omega^T\Omega$ en fonction de $M$. Pour montrer que $-1$ n'est pas valeur propre de $\Omega$, exprimer $M$ en fonction de $N$ et $I_n$.
4) Procéder par analyse et synthèse. Une fois $B$ trouvée, montrer que $(I_n+U)B = -(I_n+U)B^T$.

**Exercice 40 (oral Centrale 1 2023, Samuel,3) :**

1) Procéder par récurrence et montrer que $P_n$ est de même parité que $n$.
2) Pour calculer $\langle P_n, X^p \rangle$, utiliser des intégrations par parties. Pour calculer $\langle P_n, P_k \rangle$ avec $k \le n$, écrire $P_k$ dans la base canonique.

**Exercice 41 (Oral Mines 23, Hugo A,3) :**

2) Calculer $X^T Q_r X$ pour $X \in M_{r,1}(\mathbb{R})$.
3) Procéder par double implication. Dans le sens direct, montrer que les colonnes de $Q_{r+1}$ forment une famille liée. Dans le sens retour, montrer que $(\varphi_1,...,\varphi_{r+1})$ est liée et que $(\varphi_1,...,\varphi_r)$ est libre en utilisant les colonnes de $Q_{r+1}$ et de $Q_r$.

**Exercice 42 (Oral Mines 23, Alice,4) :**

1) Construire une suite qui convient par récurrence : si $(P_0,P_1,...,P_n)$ ont été construits, déterminer $P_{n+1}$ à l'aide de Gram-Schmidt. Puis montrer l'unicité en supposant qu'il existe une autre suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convient, et en utilisant que $B_{n+1} \in F_n^{\perp}$, où $F_n^{\perp}$ est l'orthogonal de $F_n = \mathbb{R}_n[X]$ dans $F_{n+1}$.
2) Utiliser l'unicité de la question précédente.
3) Montrer que $(P_0,P_1,...,P_{n-1})$ est une base de $F_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Séance 8 : Mercredi 5 Juin (analyse)**

**Exercice 43 (Oral CCINP 23,3)** :

1) Utiliser la caractérisation séquentielle.
2) Utiliser le théorème des bornes atteintes et étudier la fonction sur la frontière de $F$, puis à l'intérieur en recherchant les points critiques.

**Exercice 44 (Oral IMT 23, Jérémy,2) :** Utiliser le lien suite-série et un développement limité.

**Exercice 45 (oral CCINP 23, Orane, Raphaël,3) :**

2) a) penser au théorème des bornes atteintes.
   b) Utiliser une majoration et la question précédente.
3) Dériver l'expression de $T_\alpha f$
4) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque à partir de l'expression initiale de $T_\alpha f$ .
5) Montrer que $T_\alpha f$ possède une limite finie en 0 à l'aide du théorème de la double limite.

**Exercice 46 (Oral Mines 23, Samuel,4) :**

1) Chercher le nombre de solutions de l'équation $sh(xu) = y$, où $y$ est fixé,
2) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
3) Déduire une minoration de $t_x$ de la question précédente, et utiliser un développement limité en 0.

**Exercice 47 (Oral Centrale 1 23, Bastien L,4) :**

1) Utiliser l'imparité et la périodicité.
2) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment et la formule de Stirling pour montrer la convergence normale. Calculer les intégrales de Wallis qui se présentent.
3) Utiliser 1) et un développement en série entière de Arcsin . Relier $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en séparant les termes pairs et les termes impairs.

**Exercice 48 (Oral Mines 23, Paul B,5)** : indiquer la valeur de $F_{\alpha,\beta}$ sur $]0,1[$ et sur $[n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ suivant les valeurs de $\beta$ . Faire l'étude en 0 et séparant le cas $\beta = 0$ .

Pour l'étude en $+\infty$ , encadrer $J_n = \int_n^{n+1} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ à l'aide de la relation $\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} F_{\alpha,\beta}(x)dx$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} J_n$ converge.

**Séance 9 : Lundi 10 Juin (algèbre)**

**Exercice 49 (oral CCINP 23, Simon,3) :**

1) Montrer que $M + M^T$ est diagonalisable et étudier ses valeurs propres.
2) Considérer $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 50 (oral CCINP 23, Samuel,3) :**

1) Prendre une matrice triangulaire.
2) a) Effectuer le produit matriciel.
   b) Utiliser la définition de valeur propre et $\left\| AXX^T \right\|$.
3) Majorer la double somme obtenue en échangeant les deux sommes.
4) Utiliser 2b) et le théorème spectral.
5) Déterminer une expression de $\sin(a) + \sin(b)$ et montrer que les valeurs propres obtenues sont bien distinctes.

**Exercice 51 (Oral IMT 23, Orane,4) :**

1) Considérer un élément de $\ker\left(A+A^{-1}\right)$.
2) Trigonaliser $A$ sur $\mathbb{C}$ et calculer $A^2$.
3) Montrer que $A^2+I_2=0$

**Exercice 52 (Oral Mines 23, Lou Anne,4) :**

1) Déterminer les racines de $P_n$ à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique.

   Résoudre ensuite $\alpha^{2^k}=1$ à l'aide d'une décomposition en produit de facteurs premiers.
2) Calculer $P_n(-1)$.

**Exercice 53 (Oral Mines 23, Maxime,4) :**

1) Utiliser l'équivalence des normes et la définition du rayon de convergence.
2) Calculer $M^2$, puis $M^n$ puis conclure.
3) Traduire ce que l'on veut en termes d'endomorphisme. Traiter séparément les cas $\alpha=0$ et $\alpha\neq 0$. Ecrire les conditions qui doivent être satisfaites et vérifier en priorité les plus contraignantes.

**Exercice 54 (Oral Centrale 1 23, Emma,3) :**

1) Procéder par récurrence.
2) Ecrire la matrice de la restriction $\varphi_n$ de $\varphi$ à $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Montrer d'abord l'injectivité en prenant $P\in\ker(\varphi)$ et en considérant $n\geq\deg(P)$.

   Montrer ensuite la surjectivité en prenant $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $n\geq\deg(Q)$.

**Séance 10 : Lundi 10 Juin (analyse)**

**Exercice 55 (Oral IMT 23, Emma,2) :**

1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.
2) Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. On peut se placer sur des segments.
3) Utiliser le théorème de la double limite.
4) Montrer que $t\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}$ est dérivable sur $D$.

**Exercice 56 (Oral IMT 23, Paul C,3) :**

1) Poser $f(x)=\sqrt{2+x}$ et étudier le signe et les valeurs d'annulation de $g(x)=f(x)-x$ sur $\mathbb{R}_+$. Faire un dessin et séparer deux cas.
2) Poser $V_n=2-U_n$ et montrer $\left|V_{n+1}\right|\leq\frac{1}{2}\left|V_n\right|$.

**Exercice 57 (oral CCINP 23, Emma,4) :**

1) Distinguer deux cas suivant la parité de $n$.
2) Distinguer de nouveau deux cas et faire attention au comportement en $-1$ pour $n$ impair.
3) Séparer les cas $x=1$, $|x|<1$ et $|x|>1$.
4) Utiliser un équivalent pour $|x|>1$.
5) Utiliser le théorème de continuité de la somme des séries de fonctions. Se placer sur des segments inclus dans $D$.
6) Etudier la limite en $+\infty$ avec le théorème de la double limite. Pour la limite en $1$, considérer la somme partielle $\sum_{n=2}^{N} f_n(x)$ pour $x>1$.

**Exercice 58 (Oral Mines 23, Mailys,5) :** je n'ai trouvé qu'une manière difficile et astucieuse de faire cet exercice, mais peut-être existe-t-il une autre possibilité.

Etudier $S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k I_k$ en calculant $\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \sin\big((2k+1)t\big)$.

Justifier que $I_n = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{1+\cos^2 t} dt$. Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue vu en début d'année et calculer

$K_N = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2N+1)u\big)}{\sin u} du$ pour $N \in \mathbb{N}$.

**Exercice 59 (oral Centrale 1 2023, Ali,4) :**

1) Utiliser le théorème de continuité puis le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Se placer sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ pour la dérivation.
2) Montrer que $I$ existe et que $I = f(0)$ en intégrant par parties. Puis expliciter $f'', f'$ et enfin $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Exploiter les limites en $+\infty$ pour trouver les constantes d'intégration.

**Exercice 60 (oral X, Mines 23, Liam, 4) :** Procéder <u>par l'absurde et supposer par exemple</u> $f(a) < 0$, puis étudier ce qui se passe pour $x \geq a$.

**Séance 11 : Mardi 11 Juin (algèbre)**

**Exercice 61 (oral CCINP 23, Paul,3) :**

1) Ecrire $-256 = 4^4 e^{i\pi}$
2) Procéder par analyse et synthèse et utiliser la caractérisation des racines multiples d'un polynôme avec les dérivées.

**Exercice 62 (oral CCINP 23, Paul C,4) :**

1) Montrer que si $u : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto t$, alors $W = Vect\big(u, v\big)$.
2) Utiliser deux intégrations par parties pour calculer le produit scalaire.
3) Prendre $u \in W^{\perp}$ et écrire $u = w + h$, avec $w \in W$ et $h \in H$. Montrer que $\langle w, w\rangle = 0$.
4) Montrer que $\langle h, u\rangle = \langle h, v\rangle = 0$.
5) Montrer $\forall f \in E, \exists !(w,h) \in W \times H, f = w + h$ à l'aide d'une analyse-synthèse. Achever l'analyse faite au 4). Pour la synthèse, poser $g(x) = \int_0^x \left(\int_0^u h(t)dt\right) du$ et montrer que $g \in G$.

**Exercice 63 (Oral IMT 23, Paul C,4) :**

1) Calculer $AU$ en utilisant $\omega^n = 1$.
2) Poser $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et pour $p \in [\![0, n-1]\!]$ : $U_p = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^p \\ \vdots \\ \omega^{p(n-1)} \end{pmatrix}$. Calculer $AU_p$ et montrer que $C = \big(U_0, \ldots, U_{n-1}\big)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ puis écrire la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ dans cette base.

**Exercice 64 (Oral Mines 23, Ali,3)** :

procéder par analyse et synthèse et montrer que si $A$ convient et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $AT = TA$

**Exercice 65 (Oral Mines 23, Mathilde,4)** : procéder par analyse et synthèse et prendre la trace dans l'équation. Utiliser $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 66 (Oral Centrale 18, Mines 23, Paul B et Yanis,4)** :

1) Montrer que $rg(u^2) \leq n$. Utiliser le théorème du rang pour $f : \begin{array}{l} \mathrm{Im}(u) \to E \\ x \mapsto u(x) \end{array}$ et procéder par double inégalité pour montrer que $N = 3n$.
2) Chercher une base dans laquelle la matrice est $A$. Montrer que $rg(u^2) = n$.

**Séance 12 : Jeudi 13 Juin (divers)**

**Exercice 67 (oral CCINP 23, Orane,3) :**

1) Déterminer les valeurs propres et un base de vecteurs propres de $A$. Conclure avec la formule de changement de base.
2) Utiliser l'expression précédente pour deviner une solution (on ne les demande pas toutes). On peut expliciter une telle matrice $B$.

**Exercice 68 (Oral IMT 23, Jérémy,2) :** étudier d'abord la convergence simple en traitant à part le cas $x = 0$.

**Exercice 69 (Oral CCINP 23, Ethan) :**

1) Utiliser une primitive.
2) a) Utiliser l'expression précédente et passer à la limite.
   b) Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
3) a) faire le changement de variable $y = \sin(t)$
   b) Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour l'expression précédente.
4) Calculer $x\, f''(x) + f'(x) + x\, f(x)$ et reconnaître la dérivée d'une fonction sous l'intégrale.
5) Montrer que $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et chercher les coefficients à l'aide de l'équation différentielle.

**Exercice 70 (Oral Mines 22,23, Samuel, 4)**

1) Montrer qu'il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) = c > 0$. Calculer $P(X = x - k\lambda) = c$ si $k \in \mathbb{N}$ )
2) Procéder par analyse et synthèse. Montrer qu'il existe $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que $P(X = x) = c > 0$. Montrer si $X$ et $\lambda X$ ont la même loi, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = \frac{x}{\lambda^n}) = c$. Trouver une condition que doit satisfaire $\lambda$ puis étudier la réciproque.

**Exercice 71 (Oral Mines 23, Chloé,4) :**

1) Considérer l'espace vectoriel $T$ des matrices triangulaires supérieures avec des termes diagonaux nuls. Etudier $T \cap E$.
2) Prendre $E = S_n(\mathbb{R})$
3) Commencer par trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in M_2(\mathbb{C})$ soit diagonalisable. Montrer par l'absurde qu'on ne peut pas avoir $\dim(E) = 3$. Pour cela, on peut montrer qu'il existe une matrice de $E$ qui est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux distincts, et une autre du même type qui est triangulaire inférieure, puis les combiner.

**Exercice 72 (Oral Centrale 1 23, Mathilde,5)** :

1) Utiliser le théorème des bornes atteintes.
2) Montrer que $f$ ne peut pas admettre de maximum local atteint en un point $a \in U = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$. Utiliser pour cela la trace de la matrice Hessienne.

**Séance 13 : Vendredi 14 Juin (divers)**

**Exercice 73 (Oral CCINP 23, Ethan,1) :**

1) Utiliser un polynôme annulateur.
2) Calculer $j^3$, $1+j+j^2$ et $M^2$.

**Exercice 74 (oral CCINP 23, Liam) :**

2a) Chercher les points d'annulation du gradient en résolvant un système.
2c) Reconnaître une identité remarquable.
3) Utiliser les valeurs propres de cette matrice hessienne.
4) Majorer $\left|(-\cos y)\sqrt{1-x^2}\right|$
5) Séparer les cas $y_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $y_0 \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Mettre $\sqrt{1-x^2}$ en facteur.

**Exercice 75 (Oral IMT 23, Orane,2) :**

1) Procéder par disjonction de cas suivant les valeurs de $x$.
2) Utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions. Se placer sur un intervalle $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

**Exercice 76 (Oral Centrale 1 23, Bastien N,5) :** trigonaliser $A$ et calculer $tr\left(A^{n+j}\right)$ pour $0 \leq j \leq k-1$. Ecrire matriciellement le système obtenu et montrer que la matrice qui intervient est inversible, puis étudier la limite.

**Exercice 77 (oral Centrale 1 2023, Paul,4) :**

1) Faire le calcul puis montrer $P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^T$ en revenant aux coefficients.
2) Justifier que $\left\{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\right\}$ est un ensemble fini.
3) Utiliser un polynôme sur $\mathbb{C}$ et remarquer que si $P_\sigma$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors $(P_\sigma)^2 = I_n$

**Exercice 78 (Oral Mines 23, Chloé,5) :**

2) Considérer $\big(M\,g(x)-f(x)\big)\big(f(x)-m\,g(x)\big)$ pour $x \in [a,b]$, puis intégrer.

**Exercice 79 (Oral Mines 23, Ali,5)** : Pour $f \in E$, on pose $I(f) = \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) dt$.

Montrer tout d'abord $I(f) = \int_0^1 \left(f(t)+f'(t)\right)^2 dt$, puis minorer $I(f)$ en utilisant la dérivée de la fonction $t \mapsto f(t)e^t$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prouver qu'il existe une fonction de $E$ qui vérifie le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz.

**Séance 14 : Lundi 17 Juin (corrections suivant la demande)**

**Exercices en plus :**

**Oraux ENS-X-ESPCI :**

**Exercice 80 (Oral ENS 23, Eloi,5) :**

1) Utiliser le dénombrement et s'intéresser à l'ensemble $\{\sigma_1,...,\sigma_n\}$.
2) Si on note $S_N$ l'ensemble des permutations de $[\![1,N]\!]$ et $A$ un sous-ensemble de $[\![1,N]\!]$, poser $E_A=\{\sigma\in S_N,\{\sigma_1,..,\sigma_{card(A)}\}=A\}$ et montrer que $E_A\cap E_B=\varnothing$ si $B$ est un autre sous-ensemble de $[\![1,N]\!]$. Minorer et majorer $P\left(\bigcup_{A\in F}E_A\right)$ en utilisant $\forall k\in[\![0,N]\!],\binom{N}{k}\le\binom{N}{\lfloor N/2\rfloor}$ après l'avoir justifié.

**Exercice 81 (Oral ENS 23, Ali,5) :**

1) Utiliser une comparaison avec une intégrale.
2) Si $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\ln(k)\underset{n\to+\infty}{=}a_n+b_n+o(b_n)$, alors poser $W_n=S_n-a_n+b_n$ et faire un développement de $W_n-W_{n-1}$ à l'ordre $o(1)$. Puis montrer que si $Y_n\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$, alors $\sum_{k=2}^{n}Y_k\underset{n\to+\infty}{=}o(n)$ et conclure.

**Exercice 82 (Oral ENS 23, Ali) :** procéder par analyse et synthèse. Si une matrice est triangulaire supérieure et orthogonale, étudier sa première colonne, puis la seconde et ainsi de suite.

**Exercice 83 (Oral ENS 23, Ali,2) :** Montrer que si $(a_n)$ n'est pas la suite nulle, alors elle est bornée et ne tend pas vers 0. Etudier alors le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$.

**Exercice 84 (Oral ENS 23, Maxime,5) :** Après avoir étudié $S_n$ sur $\mathrm{Im}(Id_E-f)$ et $\ker(Id_E-f)$, montrer $\mathrm{Im}(Id_E-f)\oplus\ker(Id_E-f)=E$, puis que $(S_n)$ converge dans $L(E)$ vers la projection sur $\ker(Id_E-f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(Id_E-f)$.

**Exercice 85 (Oral ENS 23, Maxime,5) :**

1) Poser pour $1\le i<j<k\le n$ $Y_{i,j,k}=X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k}$ et utiliser la linéarité de l'espérance.
2) Majorer à l'aide de la variance de $T_n$. Expliciter cette dernière, et remarquer que de nombreux termes sont nuls, et que les autres sont majorés par $1$. En déduire une majoration de $V(T_n)$.

**Exercice 86 (Oral X 23, Ali,5) :**

Exprimer $W_{m+1}$ à l'aide de $W_m$, puis établir une relation entre $W_2$ et $W_n$ faisant intervenir les $a_{m,n}$ et $m$ avec $2\le m\le n-1$. Faire le lien avec $U_n$ et conclure à l'aide d'une minoration de $a_{m,n}$.

**Exercice 87 (Oral X 23, Ali,5) :**

1) Considérer $A=\{p+\sqrt{2}\,q,p,q\in\mathbb{Z}\}$ et $f=1_A$, la fonction indicatrice de $A$.
2) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N},(\sqrt{2}-1)^n\in A$. En déduire $\forall n,p\in\mathbb{N},f(x)=f\left(x+p\left(\sqrt{2}-1\right)^n\right)$ et aboutir à une absurdité en supposant $x<y$ et $f(x)<f(y)$ et en mettant en défaut la définition de la continuité en $y$.

**Exercice 88 (Oral X 23, Eloi, ESPCI 23, Maxime,3)** : montrer $\forall x\in[0,1],h(x)\le 0$, puis étudier $f(x_0)-Mg(x_0)$.

**Exercice 89 (Oral ESPCI Bastien L,5) :**

Dans le sens retour, écrire $a=\frac{p}{q}+ec$, avec $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $c\in\mathbb{N}$. Ecrire $e$ comme somme d'une série et séparer les termes d'indice inférieur ou égal à $n$ des autres. Montrer $\sum_{p=n+2}^{+\infty}\frac{n!}{p!}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Pour le sens direct, écrire $U_n=n\left(a\left(n(n-1)!\right)-\lfloor a\,n!\rfloor\right)$ en fonction de $U_{n-1}$, puis poser $V_n=n\lfloor a(n-1)!\rfloor-\lfloor a\,n!\rfloor$ et montrer que $(V_n)$ est convergente, puis qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang $N$. Exprimer $p_n=\lfloor a\,n!\rfloor$ en fonction de $n$ et $N$ et étudier la limite de $(p_n)$.

**Exercice 90 (Oral ESPCI 23, Hugo B,4)** : écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x$ et $x+h$ et entre $x$ et $x-h$ puis sommer ou soustraire les expressions obtenues. Choisir ensuite judicieusement la valeur de $h$.

**Exercice 91 (Oral ESPCI 23, Samuel,5)** :
Procéder par récurrence et utiliser le théorème des accroissements finis pour l'initialisation.
Pour l'hérédité, considérer $T(f):x\mapsto f(x+1)$ et calculer $(T-Id_E)^n(f)$. Remarquer ensuite que $(T-Id_E)^{n+1}(f)=(T-Id_E)^n(T(f))-(T-Id_E)^n(f)$.