Exercices en plus 24

Mines :

Exercice 1 : (oral Mines 22,4). Soient $a_0,...,a_{n-1}$ des réels positifs avec $a_0 > 0$.

1) Montrer que $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ possède une unique racine ρ dans $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \le \rho$.

Exercice 2 : (oral Mines 22,4) :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in L(E)$ de même rang et tels que $u^2 \circ v = u$.

1) Montrer que $v \circ u \circ v = v$.
2) Montrer que $u \circ v$ est un projecteur.
3) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ et en déduire que $v^2 \circ u = v$

Exercice 3 (oral Mines 22,2) :

1) Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, x^n$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Convergence et somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, x^n e^{-nx}$.
3) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{\left(1 - xe^{-x}\right)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 4 (oral Mines 22,4) : Donner un équivalent de $I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t+t^2)^n} dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : (oral Mines 22,4). Soit $a_1 < ... < a_n$ des réels. On pose $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$

1) Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples $b_1 < ... < b_{n-1}$ telles que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$.
2) Exprimer $\frac{P'}{P}$ en fonction des a_i et $\frac{P''}{P'}$ en fonction des b_j.
3) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(a_k)}{P'(a_k)} = 0$
4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $P' + \alpha P$ admet au moins $n-1$ racines réelles.
5) En traçant le graphe de $\frac{P'}{P}$, montrer que $P' + \alpha P$ admet exactement n zéros réels distincts.

Exercice 6 (oral mines 22,4) : soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$ telle que $f \circ f$ est diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\ker(f) = \ker(f \circ f)$

Exercice 7 (Oral Mines 22,3) : Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 8 (Oral Mines 22,3) : Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, avec $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0$ Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

Exercice 9 (Oral mines 22, 4) :
On fixe un entier naturel $N \geq 1$ et un réel $p \in]0,1[$. Une suite de joueurs, numérotés par les entiers naturels, jouent comme suit : à l'instant 1, le joueur 0 joue contre le joueur 1, puis le vainqueur joue contre le joueur 2 à l'instant 2, puis le vainqueur de cette seconde partie joue contre le joueur 3 à l'instant 3, etc. On suppose que la probabilité que le joueur n gagne à l'instant n (contre le vainqueur de la partie précédente) est systématiquement égale à p. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur a gagné N parties consécutives. On note B_n l'événement ≪ le jeu ne s'est pas arrêté jusqu'à l'instant n inclus ≫.

1) Montrer que la suite $(P(B_n))$ est convergente.
2) Calculer $P(B_n)$ pour $n \leq N$
3) Montrer que la suite $(P(B_n))$ converge vers 0

Exercice 10 (oral Mines 22,5) : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\gamma_A = \gamma_B \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, Tr(A^k) = Tr(B^k)$.

Exercice 11 (Oral Mines 22,3) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.

Exercice 12 (oral Mines 22,4) :
Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on appelle distance de x à A e nombre noté $d(x, A)$ défini par $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|a - x\|$. Pour $R > 0$, on note $A(R) = \{x \in E, d(x, A) \leq R\}$. Montrer que si A est convexe alors $A(R)$ est convexe et fermé.

Exercice 13 (oral Mines 22,2) : On définit quand c'est possible $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1) Donner le domaine de définition de F.
2) Montrer que F est de classe C^1 sur son domaine de définition. Calculer sous forme simple $F'(\lambda)$ puis $F(\lambda)$.
3) Soient $a, b > 0$. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$?

Exercice 14 (oral Mines 22,5) :: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, a_1, ..., a_n$, des complexes. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$
On considère la famille $B = (P(X + a_0), P(X + a_1), ..., P(X + a_n))$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit libre.

Centrale :

Exercice 1 (Oral Centrale 22,4) : Soient $n \geq 2$, $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A
2) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 (Oral Centrale 22,3) :

1) Montrer que la suite (U_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$, converge, puis donner sa limite.
2) Montrer que la suite (V_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $V_n = \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n+k}\right)$, converge,

Exercice 3 (oral Centrale 22,4) : Soit $a \in \left]0,1\right[$. On note F le sous-espace vectoriel de $E = C\left(\left[-a,a\right],\mathbb{R}\right)$ constitué des fonctions polynomiales.

1) On pose $f_n : x \to 1 + x + .. + x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ Montrer que (f_n) converge vers un élément de E au sens de la norme $\| \ \|_\infty$.
2) Le sous-espace F est-il fermé dans E pour $\| \ \|_\infty$?
3) Soit $f : \left[-a,a\right] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que la suite $(f^{(n)})$ soit bornée pour $\| \ \|_\infty$. Montrer que f appartient à l'adhérence de F.

Exercice 4 (Oral centrale 22,4) : Soit $n \in \mathbb{N}$. E est un espace vectoriel de dimension n et $f \in L(E)$, diagonalisable. On note $C_f = \{g \in L(E), f \circ g = g \circ f\}$.

1) Montrer que $g \in C_f$ si et seulement si les espaces propres de f sont stables par g.
2) Montrer que $\dim\left(C_f\right) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_\lambda^2$, où m_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ de f.
3) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est une base de C_f.

Exercice 5 (oral Centrale 22,3) :

1) Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice de rang 1.
2) Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ Montrer $\det\left(A + XX^T\right) = \left(1 + X^T A^{-1} X\right)\det(A)$.

Exercice 6 (oral centrale 22,5) : On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles sont les valeurs propres sont positives.

1) Montrer que pour toute matrice $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer qu'une telle matrice M est unique ; on l'appelle racine de A et on la note $\sqrt{A}$.
2) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On définit la suite (U_p) d'éléments de $M_n(\mathbb{R})$ par $\begin{cases} U_0 = I_n \\ U_{p+1} = \frac{1}{2}\left(U_p + AU_p^{-1}\right) \end{cases}$. Montrer que (U_n) est définie et qu'elle converge vers $\sqrt{A}$.

Exercice 7 (oral Centrale 22,4) : On note $E=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R}), f(0)=f(1)=0\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^2([0,1],\mathbb{R})$.
2) Déterminer les réels a pour lesquels $N_a : f \mapsto \int_0^1 |f''(t)+a\,f(t)|\,dt$ est une norme sur E.
3) Lorsque N_a est une norme sur E, est-ce que N_a et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes sur E ?

Exercice 8 (oral Centrale 22,4) : Pour $x>0$, on considère $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 9 (Oral Centrale 22,3) : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0>0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$ où a,b,c,d sont des réels strictement positifs.

1) Trouver un réel α tel que la suite $\ln(n^\alpha U_n)$ converge vers un réel x
2) On suppose que cette condition est vérifiée. Donner un équivalent de (U_n) en fonction de x
3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d pour que la série $\sum U_n$ converge.

CCINP :

Exercice 1 (oral CCINP 22) : soit E un espace vectoriel de dimension $n\geq 2$. Soit $u\in L(E)$. On note $u^2=u\circ u$. On suppose $u^2-2u+Id_E=0$ et $u\neq Id_E$.

1) Démontrer que $u\in GL(E)$ et determiner u^{-1}.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(u-Id_E)\subset\ker(u-Id_E)$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de u. u est-il diagonalisable ?
3) Soient f,g deux projecteurs. Montrer que $f\circ g=g \Leftrightarrow \mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Im}(f)$.
4) Soit $v\in L(E)$, non nul, tel que $v^2=0$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(v)$ dans E. Soit p_1 la projection sur $\mathrm{Im}(v)$ parallèlement à S. On note $q_1=p_1-v$.
   Montrer que q_1 est un projecteur et que $\mathrm{Im}(p_1)=\mathrm{Im}(q_1)$
5) Montrer qu'il existe deux projecteurs p,q tels que $u=p+q$ et $\mathrm{Im}(p)=\ker(q)$.

Exercice 2 (oral CCINP 22,2) : on étudie $f(x)=\int_0^1 t^x e^{2t}\,dt$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Etude des limites aux bornes.
   a) Montrer $\forall x>-1, 0\leq f(x)\leq \dfrac{e^2}{x+1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en -1^+.
3) Montrer que f est de classe C^1 sur D et déterminer f'. Quelle est la monotonie de f sur D ?
4) Equivalent en $+\infty$
   a) Déterminer une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.
   b) En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 3 (oral CCINP 19,22) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Énoncer le théorème spécial sur les séries alternées, avec la majoration et le signe du reste.
2) Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1+x}$. Etablir $\forall x > 0, 2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}$.
4) Montrer que $\forall x > 0, \left| f(x) - \dfrac{1}{2x} \right| \leq \dfrac{1}{2x(x+1)}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
5) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0^+.
6) Démontrer que $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t} dt$

Exercice 4 (oral CCINP 22,2) : soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in E \setminus \{0_E\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On pose $f : \begin{cases} E \to E \\ x \to x + \alpha \langle x, u \rangle u \end{cases}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) On se place dans $E = \mathbb{R}^2$, avec $\alpha = 2$ et $u = (1,2)$.
   a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
   b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
3) On revient au cas général. On pose $D = Vect(u)$.
   a) Montrer que si x est un vecteur propre de f, alors $x \in D$ ou $x \in D^{\perp}$.
   b) En déduire que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
   c) A quelles conditions sur α et u l'application f est-elle bijective ?
   d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme orthogonal.

Exercice 5 (oral CCINP 22) : Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \dfrac{\sin^2(n\theta)}{n!} z^n$.
2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$ lorsque $x \in]-R, R[$.

Exercice 6 (oral CCINP,1) : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 1$, on pose $f_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{nt}\right)$.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]1, +\infty[$.
2) Etudier la limite de $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 7 (Oral CCINP 22,2) : Soient $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, on pose : $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{in\varphi}}$.

1) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} - \dfrac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
2) On suppose que θ et φ sont des multiples de π. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 8 (oral CCINP 23,3) : soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.

1) M est-elle inversible ?
2) M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
3) Montrer que n est pair. Calculer $Tr(M)$ et $\det(M)$.

<u>IMT :</u>

Exercice 1 (oral IMT 23,2) : pour $n \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $h_n(t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$.

1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, alors h_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2) Etudier la convergence et la limite de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{+\infty} h_n(t)dt$

Exercice 2 (oral IMT 23,2): Soit U le vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

On considère $\varphi : \begin{array}{l} (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \to M_n(\mathbb{R}) \\ (X,Y) \mapsto XU^T + UY^T \end{array}$.

1) Donner les dimensions de $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et de $M_n(\mathbb{R})$ et montrer que φ est linéaire.
2) Déterminer $rg(\varphi)$

Exercice 3 (oral IMT 23,4) : Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 4 (oral IMT 22,3) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AMA = 0\}$ et $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AMA = A\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2) Pour quel réels λ a-t-on $\lambda A \in E$?
3) Déterminer les éléments de E.

Exercice 5 (oral IMT 22,4) : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.
On suppose que H est un hyperplan de $M_n(K)$ ne contenant aucune matrice inversible.

1) Déterminer un supplémentaire simple de H.
2) Montrer que toutes les matrices nilpotentes sont dans H.
3) En conclure qu'un tel H n'existe pas.

Exercice 6 (oral IMT 22,3) : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

Montrer que $Y = \dfrac{1}{2X+1}$ est d'espérance finie et calculer $E(Y)$.

Indications :

Oraux Mines :

Exercice 1 : (oral Mines 22,3).

1) Ecrire $P(x)=x^n h(x)$ et étudier les valeurs d'annulation de h.
2) Montrer $P(|z|)\leq 0$ et conclure.

Exercice 2 : (oral Mines 22,4) :

1) Montrer d'abord $\ker(v)=\ker(u)$ et remarquer que $u\circ(u\circ v-Id_E)=0$
2) Immédiat.
3) Montrer que $\ker(u\circ v)=\ker(v)$, puis que $\mathrm{Im}(u\circ v)=\mathrm{Im}(u)$ et utiliser la projection $u\circ v$. Utiliser de nouveau $\ker(v)=\ker(u)$ pour déduire $v^2\circ u=v$

Exercice 3 (oral Mines 22,2) :

1) Avec les series entières usuelles, en mettant x en facteur.
2) Etudier la fonction $x\mapsto xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et utiliser 1).
3) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme, puis un changement de variable pour calculer les différentes intégrales.

Exercice 4 (oral Mines 22,4) : Poser $t=\dfrac{u}{n}$ puis utiliser le théorème de convergence dominée. Minorer $\left(1+\dfrac{u}{n}+\dfrac{u^2}{n^2}\right)^n$ à l'aide du binôme de Newton. On trouve $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^3}$.

Exercice 5 : (oral Mines 22,4).

1) Utiliser le théorème de Rolle.
2) Exprimer P' à l'aide d'une somme de produits, puis simplifier le quotient obtenu.
3) Utiliser les relations précédentes et échanger les deux sommes.
4) Soit $Q=P'+\alpha P$. Etudier le signe de $Q(a_j)$ et le théorème des valeurs intermédiaires.
5) Etudier les limites de $\dfrac{P'}{P}(x)$ en $+\infty,-\infty$, a_1,a_n.

Exercice 6 (oral mines 22,4) : procéder par double implication. Si f est diagonalisable, utiliser les matrices. Dans l'autre sens, utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples qui annule $f\circ f$ et en déduire un autre polynôme annulateur scindé à racines simples qui annule f à l'aide de $\ker(f)=\ker(f\circ f)$.

Exercice 7 (Oral Mines 22,3) : Ecrire $S_n=n!\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n(n-1)}+...+\dfrac{1}{n!}\right)$ et majorer $\dfrac{1}{n(n-1)}+...+\dfrac{1}{n!}$.

Exercice 8 (Oral Mines 22,3) : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour f et montrer qu'elle prend la valeur $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ lorsque g n'est pas la fonction nulle.

Exercice 9 (Oral mines 22, 4) :

1) Etudier la monotonie de $\left(P(B_n)\right)$.
2) Séparer les cas $n<N$ et $n=N$.
3) Supposer par l'absurde que $P(B_n)\underset{N\to+\infty}{\to} a>0$. Utiliser les événements $J_k\cap B_{k-1}$, avec J_k :" le joueur k remporte le jeu ».

Exercice 10 (oral Mines 22,5) : Par double implication.
$\Rightarrow$ Trigonaliser.
$\Leftarrow$ Distinguer les valeurs propres distinctes communes à A et B et les autres, avec leurs multiplicités. Traduire l'égalité des traces et en déduire une relation valable pour tout polynôme P. Utiliser cette relation pour des polynômes bien choisis.

Exercice 11 (Oral Mines 22,3) : On peut poser $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et résoudre habilement le système obtenu.

On trouve 4 solutions $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (oral Mines 22,3) :
Pour prouver que $A(R)$ est fermé, on peut montrer que $x\mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne, donc continue. On peut aussi établir que si $x_n\in A(R)$ et $x_n\to x$, on ne peut pas avoir $d(x,A)>R$, en prenant $\varepsilon>0$ tel que $d(x,A)>R+\varepsilon$ et en utilisant la définition de limite.
Pour montrer que $A(R)$ est convexe, prendre $x,y\in A(R)$,fixer $n\in\mathbb{N}^*$ et utiliser $x_n,y_n\in A$ tels que $\|x_n-x\|\le R+\dfrac{1}{n}$ et $\|y_n-y\|\le R+\dfrac{1}{n}$ pour montrer que si $\lambda\in[0,1]$, alors $d(\lambda x+(1-\lambda)y,A)\le R+\dfrac{1}{n}$

Exercice 13 (oral Mines 22,2) :

1) On trouve $D_F=\mathbb{R}_+^*$ en étudiant le comportement aux bornes.
2) Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
3) Utiliser F pour montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln(b)-\ln(a)$

Exercice 14 (oral Mines 22,5) :
Montrer que la condition nécessaire et suffisante est ($p=\deg(P)\ge n$ et $a_0,a_1,...,a_n$ sont deux à deux distincts).

Pour prouver qu'elle est suffisante, supposer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k P\left(X+a_k\right)=0$ et développer cette relation.

Traduire que le polynôme est nul au travers de ses coefficients puis conclure avec Vandermonde.

Oraux Centrale :

Exercice 1 (Oral Centrale 22) :

1) On trouve en développant par rapport à la première colonne et en itérant le procédé que $\gamma_A(\lambda) = \lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\right)\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}P(\lambda)$, avec $P(\lambda) = \lambda^2 - a_n\lambda - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\right)$
2) Séparer différents cas :
   - $a_1 = ... = a_{n-1} = 0$
   - $(a_1,...,a_{n-1}) \neq (0,..,0)$ et $a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 = 0$
   - P admet deux racines distinctes non nulles.
   - P admet une racine double non nulle (montrer alors $rg(\lambda I_n - A) \geq n-1$ pour $\lambda \neq 0$)

On trouve que A diagonalisable si et seulement si $a_1 = ... = a_{n-1} = 0$ ou $\begin{cases} a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 \neq 0 \\ 4a_1^2 + ... + 4a_{n-1}^2 + a_n^2 \neq 0 \end{cases}$.

Exercice 2 (Oral Centrale 22,3) :

1) Utiliser les sommes de Riemann. On trouve $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ln 2$
2) Montrer $\forall u \in \mathbb{R}_+, |\text{Arctan}(u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$, puis utiliser $V_n = U_n + V_n - U_n$.

Exercice 3 (oral Centrale 22,4) :

1) Poser $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ au sens de la norme $\| \ \|_\infty$.
2) Utiliser la question précédente et montrer que f n'est pas polynomiale. On pourra procéder par l'absurde avec l'unicité du développement en série entière.
3) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 4 (Oral centrale 22,4) :

1) Pour le sens retour, utiliser $E = \underset{\lambda\in Sp(f)}{\oplus} E_\lambda(f)$.
2) On peut étudier les matrices des éléments de C_f avec des matrices par blocs, ou bien considérer $\Phi : \begin{array}{l} C_f \to L(E_1(f)) \times ... \times L(E_p(f)) \\ g \to \left(g_{E_1(f)}, ..., g_{E_p(f)}\right) \end{array}$ et montrer qu'elle est bijective.
3) Montrer que $(Id_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est une famille libre en prenant une combinaison linéaire nulle. Se placer dans une base de diagonalisation de f et obtenir un système, puis utiliser la matrice de Vandermonde.

Exercice 5 (oral Centrale 22) :

1) Utiliser que si $rg(B) = 1$, alors χ_B est un multiple de X^{n-1}.
2) Remarquer que $\det(A + XX^T) = \det(I_n + A^{-1}XX^T)\det(A)$, et appliquer 1) pour $B = A^{-1}XX^T$.

   Justifier que si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, alors $Tr(MN) = Tr(NM)$.

Exercice 6 (oral centrale 22) :

1) Pour l'unicité, on prend m canoniquement associée à M et a à A. Montrer que les sous-espaces propres de a sont stables par m. Justifier que $m_{E_\lambda(a)} = \sqrt{\lambda} Id_{E_\lambda(a)}$ après avoir prouvé qu'elle était diagonalisable.
2) Etudier le cas où A est diagonale, en se ramenant à l'étude de la suite récurrente donnée par $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a}{b_n}\right)$, avec $a \geq 0$. Puis étudier le cas général en diagonalisant.

Exercice 7 (oral Centrale 22) :

1) Revenir à la définition.
2) Seul le caractère défini pose problème. Résoudre $f''(t) + a f(t) = 0$ en distinguant les cas suivant les valeurs de a. On a une norme si et seulement si $a \notin \{\pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$.
3) Considérer $f(x) = x^n - x$ et montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 8 (oral Centrale 22) :

1) Poser $b(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} dt$, et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
2) Etudier la limite de $x f(x)$ à l'aide du théorème de convergence dominée.
3) Montrer $f(x) = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u^2+x^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u^2+x^2} du$.

   Pour la première intégrale, écrire $\int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u^2+x^2} du = \int_0^1 \frac{u}{u^2+x^2} du + \int_0^1 \frac{1-e^{-u}-u}{u^2+x^2} du$ (avec l'idée que $1-e^{-u} \underset{u\to 0}{\sim} u$), puis calculer la première intégrale et majorer la seconde. Conclure que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 9 (Oral Centrale 22,2) :

1) Utiliser le lien suite-série. Montrer que $\ln\left((n+1)^\alpha U_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha U_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}(\alpha + a + b - c - d) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2) Utiliser que si $W_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \neq 0$, alors $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a$.

Oraux CCINP :

Exercice 1 (oral CCINP 22,3) :

1) Trouver v telle que $u \circ v = Id_E$.
2) Utiliser un polynôme annulateur et procéder par l'absurde pour prouver que 1 est la seule valeur propre de u.
3) Procéder par double implication et utiliser que si $a \in \operatorname{Im}(f)$, alors $f(a) = a$.
4) Calculer $q_1 \circ q_1$ et étudier les différents termes. Montrer $\operatorname{Im}(p_1) = \operatorname{Im}(q_1)$ par double inclusion.
5) Poser $v = u - Id_E$ et reprendre les notations précédentes. Vérifier que $u = p_1 + Id_E - q_1$.

Exercice 2 (oral CCINP 22) :

1) Ecrire $t^x = \frac{1}{t^{-x}}$.
2) Encadrer la fonction sous l'intégrale. Pour la limite en -1^+, utiliser $t^x e^{2t} \geq t^x$ si $t \in \left]0,1\right]$.
3) Ecrire $t^x = e^{x\ln(t)}$ et utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la domination, se placer sur $\left[a,+\infty\right[$ avec $a > -1$, et considérer $-a < \lambda < 1$ pour prouver l'intégrabilité.
4) Utiliser une intégration par parties pour exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$. Utiliser la limite de $f(x)$ en $+\infty$ pour conclure.

Exercice 3 (oral CCINP 19,22) :

2) Utiliser la majoration du reste pour montrer la convergence uniforme.
3) Effectuer un changement d'indice.
4) Majorer de nouveau avec le théorème sur les séries alternées, puis étudier $|2xf(x)-1|$.
5) Isoler le premier terme et prouver $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
6) Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas. Revenir à la somme partielle et utiliser la convergence dominée.

Exercice 4 (oral CCINP 22) :

1) Prouver la linéarité et que si $x \in E$, alors $f(x) \in E$
2) Calculer l'image des vecteurs de base. Déterminer les valeurs propres.
3) Prendre une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^{\perp}$ et écrire la matrice de f ans cette base. Cela permet de répondre à toutes les questions.

Exercice 5 (oral CCINP 22) :

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} z^n$ est toujours convergente.
2) Linéariser et utiliser qu'en cas de convergence, la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles.

Exercice 6 (oral CCINP) : Utiliser le théorème de convergence dominée avec $\ln(1+u) \leq u$.

Exercice 7 (Oral CCINP 22,2) :

1) Avec $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+O(u^2)$, en mettant $\sqrt{n}$ en facteur au dénominateur.
2) Si $\theta = 2p\pi$ ou $\varphi = 2k\pi$, distinguer suivant la parité de p,k et utiliser le théorème sur les séries alternées.

Exercice 8 (oral CCINP 23) :

1) Utiliser un polynôme annulateur pour trouver les valeurs propres possibles de M.
2) Utiliser le même polynôme.
3) Si $a \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M avec multiplicité k, que dire de $\overline{a}$?

Oraux IMT :

Exercice 1 :

1) Utiliser une majoration.
2) Utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 2 :

1) Utiliser $\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F)$.
2) Chercher $\ker(\varphi)$ en déterminant explicitement les couples (X,Y) vérifiant $\varphi(X,Y)=0$.

Exercice 3 (oral IMT 23) : Utiliser le développement en série entière de $u\mapsto \dfrac{1}{1-u}$ et le théorème d'intégration terme à terme mais il faut majorer avec finesse. Ecrire $\int_0^{+\infty}|\sin(t)|e^{-(n+1)t}dt=\int_0^{\pi/2}\sin(t)e^{-(n+1)t}dt+\int_{\pi/2}^{+\infty}|\sin(t)|e^{-(n+1)t}dt$ et calculer $\int_0^{\pi/2}e^{it}e^{-(n+1)t}dt$ et $\int_0^{+\infty}e^{it}e^{-(n+1)t}dt$.

Exercice 4 :

1) Montrer que $F=\left\{M\in M_n(\mathbb{R}),\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}=0\right\}$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2) Calculer A^2 et A^3.
3) Montrer que $E=\left\{\frac{1}{n^2}A+M, M\in F\right\}$.

Exercice 5 :

1) Vérifier que $H\oplus Vect(I_n)=M_n(K)$.
2) Si N est nilpotente, écrire $N=M+\lambda I_n$, avec $M\in H$. Calculer N^p avec le binôme. En déduire que si $\lambda\neq 0$, alors M est inversible.
3) Trouver deux matrices nilpotentes dont la somme est inversible.

Exercice 6 : Utiliser le théorème de transfert et les développements en série entière de $a\mapsto \ln(1+a)$ et de $a\mapsto \ln(1-a)$.