Centrale Maths 2

Corrigé des exercices du 6 Juin (partie Maths) :

Corrigé Exercice 1 :

1) Soit $x>0$. La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est une série alternée. En effet, $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ est décroissante et converge vers 0. Donc d'après le théorème spécial sur les séries alternées, $\boxed{S(x) \text{ existe pour tout } x>0}$.

2) On pose pour $t\in\left]0,+\infty\right[$ et $x\in\mathbb{R}$: $f(x,t)=\frac{t^x}{1+e^t}=\frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t}$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $f(x,t)=\frac{t^x}{1+e^t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2t^{-x}}$. Or $t\mapsto\frac{1}{2t^{-x}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $x>-1$. Donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $x>-1$
- $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t\mapsto f(x,t)$ est toujours intégrable en $+\infty$. Donc $\boxed{D_I=\left]-1,+\infty\right[}$
- Pour tout $t\in\left]0,+\infty\right[$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soient $a,b\in\left]-1,+\infty\right[$, avec $a\le b$. Alors pour $t\in\left]0,+\infty\right[$ et $x\in[a,b]$, il vient :
  - Si $t\le 1$, $\ln(t)\le 0$ et $|f(x,t)|=\frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t}\le\frac{e^{a\ln(t)}}{1+e^t}\le\frac{t^a}{1+e^t}+\frac{t^b}{1+e^t}=\varphi(t)$.
  - Si $t\ge 1$, $\ln(t)\ge 0$ et $|f(x,t)|=\frac{e^{x\ln(t)}}{1+e^t}\le\frac{e^{b\ln(t)}}{1+e^t}\le\frac{t^a}{1+e^t}+\frac{t^b}{1+e^t}=\varphi(t)$

  On a donc toujours $|f(x,t)|\le\varphi(t)$

  De plus, φ est intégrable en $+\infty$ car $a,b\in\left]-1,+\infty\right[$.

  $\boxed{\text{Donc } I \text{ est continue sur tout segment de } \left]-1,+\infty\right[\text{, donc sur } \left]-1,+\infty\right[}$.

3) $S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On conjecture que $\boxed{S(1)=\ln(2)}$

4) Montrons cette conjecture. Pour $x\in[0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$.

Si on pose pour $x\in[0,1]$ $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ avec $a_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ alors avec le théorème spécial sur les séries alternées, h est définie sur $[0,1]$. De plus, pour $x\in[0,1]$, $R_N(x)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, alors avec la majoration du reste du théorème sur les séries alternées, il vient $|R_N(x)|\le\frac{x^{N+1}}{N+1}$.

Donc $0\le\|R_N\|_{\infty,[0,1]}\le\frac{1}{N+1}$ et (R_N) converge uniformément vers 0.

Donc $\sum a_n$ converge **uniformément** sur $[0,1]$ et comme chaque a_n est continue sur $[0,1]$, h l'est aussi.

Donc $\boxed{S(1)=h(1)=\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\ln(1+x)=\ln(2)}$

5) On conjecture que $\boxed{I(p)=(p!)S(p+1)}$ pour $p\in\mathbb{N}^*$.

6) En admettant la conjecture précédente, $I(p)=(p!)S(p+1)=p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}$.

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}$, avec $\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}\right|\leq\frac{1}{2^{p+1}}$,avec de nouveau la majoration du reste du théorème sur les séries alternées. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+1}}\underset{p\to+\infty}{\to}1$, et $\boxed{I(p)\underset{p\to+\infty}{\sim}p!}$

7) On note $J(p,k)=\int_0^{+\infty}t^pe^{-kt}dt$ pour $p,k\in\mathbb{N}^*$ et $g(t)=t^pe^{-kt}$

g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc g est intégrable en $+\infty$ et $J(p,k)$ existe bien.

De plus, on pose $\begin{cases}u(t)=t^p\\ v'(t)=e^{-kt}\end{cases}$ et $\begin{cases}u'(t)=pt^{p-1}\\ v(t)=-\frac{1}{k}e^{-kt}\end{cases}$. Alors $u(t)v(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ et $u(t)v(t)\underset{t\to0}{\to}0$.

Donc par intégration par parties, $J(p,k)=\frac{p}{k}\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-kt}dt$.

On itère le procédé et il vient $\boxed{J(p,k)=\frac{p!}{k^p}\int_0^{+\infty}e^{-kt}dt=\frac{p!}{k^{p+1}}}$

8) A l'aide d'un développement en série entière,

$I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{1+e^t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^pe^{-t}}{1+e^{-t}}dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}t^pe^{-t}e^{-kt}(-1)^k\right)dt$.

Donc $I(p)=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}t^pe^{-kt}(-1)^{k+1}\right)dt$.

On admet pour le moment qu'on peut échanger série et intégrale. Alors on obtient bien :

$I(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty}t^pe^{-kt}dt=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{p!}{k^{p+1}}=p!S(p+1)$.

On justifie l'interversion : on note $h_k(t)=t^pe^{-kt}(-1)^{k+1}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$

- Chaque h_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum h_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (et sa somme $t\mapsto\frac{t^p}{1+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
- $\sum_k\int_0^{+\infty}|h_k(t)|dt$ converge car $\int_0^{+\infty}|h_k(t)|dt=\frac{p!}{k^{p+1}}$ et $p+1>1$ (avec Riemann).

Donc on a bien $\boxed{I(p)=p!S(p+1)}$

Corrigé Exercice 2 (Partie Maths) :

1) Il vient $\boxed{S_1(\Omega)=\{1\}\text{ , }P(S_1=1)=1\text{ et }E(S_1)=1}$.

De plus, $S_2(\Omega)=\{1,2\}$, $P(S_2=1)=P(X_1=X_2)=\frac{1}{n}$, donc $P(S_2=2)=1-\frac{1}{n}$

$\boxed{E(S_2)=\frac{1}{n}+2\left(1-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}}$

3) Pour $p \in [\![1,100]\!]$, on note $S_{k,p}$ le résultat obtenu pour S_k lors de la $p-ème$ expérience aléatoire. On utilise **la loi faible des grands nombres** : on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{\sum_{p=1}^{q} S_{k,p}}{q} - E(S_k)\right| \geq \varepsilon\right) \underset{q\to+\infty}{\to} 0$.

Ici, on peut considérer que $q = 100$ est grand et que la moyenne des S_k obtenue sur ces 100 itérations est une bonne estimation de $E(S_k)$.

4) On obtient que $\ln\left(1-\frac{E(S_k)}{n}\right) = k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$, donc que $E(S_k) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$.

On peut remarquer que $E(S_k) \underset{k\to+\infty}{\to} n$, ce qui est logique (au bout d'un long moment, on est presque certain d'avoir obtenu toutes les valeurs possibles dans $[\![1,n]\!]$ au moins une fois).

5) On remarque $S_k(\Omega) = [\![1,k]\!]$. On considère $j \in \mathbb{N}$.

On veut prouver que $P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n}P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n}P(S_k = j-1)$.

Tout d'abord, c'est vrai si $j > k+1$ et si $j = 0$. On prend $j \in [\![1,k+1]\!]$

On applique la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(S_k = j)_{1\leq j\leq k}$.

Il vient $P(S_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^{k} P(S_{k+1} = j, S_k = i)$.

Si $i < j-1$, $P(S_{k+1} = j, S_k = i) = 0$ (en effet, en ajoutant $X_{k+1}(\omega)$, on augmente au maximum de 1 le nombre d'éléments distincts dans $\{X_1(\omega),...,X_k(\omega)\}$).

De plus, si $i > j$, $P(S_{k+1} = j, S_k = i) = 0$ (ce même nombre ne peut que croître quand on ajoute un nouvel élément dans l'ensemble).

Donc $P(S_{k+1} = j) = P(S_{k+1} = j, S_k = j-1) + P(S_{k+1} = j, S_k = j)$.

Donc $P(S_{k+1} = j) = P(S_{k+1} = j / S_k = j-1)P(S_k = j-1) + P(S_{k+1} = j / S_k = j)P(S_k = j)$.

Pour avoir $S_{k+1} = j$ sachant $S_k = j$, il faut et il suffit que $X_{k+1}(\omega)$ soit élément de $\{X_1(\omega),...,X_k(\omega)\}$.

La probabilité est $\frac{j}{n}$. Donc $\boxed{P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n}P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n}P(S_k = j-1)}$

6) On calcule l'espérance :

$$E(S_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} jP(S_{k+1} = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j^2P(S_k = j) + \sum_{j=1}^{k+1} jP(S_k = j-1) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j(j-1)P(S_k = j-1).$$

Donc $E(S_{k+1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k+1} j^2P(S_k = j) + \sum_{j=0}^{k}(j+1)P(S_k = j) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k} j(j+1)P(S_k = j)$

Comme $P(S_k = k+1) = 0$, $E(S_{k+1}) = E(S_k) + 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} jP(S_k = j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)E(S_k) + 1$.

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On résout $x = \left(1-\frac{1}{n}\right)x + 1 \Leftrightarrow x = n$ et $E(S_k) - n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \left(E(S_0) - n\right)$.

On a donc bien $\boxed{E(S_k) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)}$

Corrigé Exercice 3 :

1) On trouve $D_n = Vect\left(\left(E_{i,j}\right)_{i\neq j}\right)$, donc $\dim(D_n) = n^2 - n$

2) Il vient $T_n = Ker(Tr)$, donc T_n est le noyau d'une forme linéaire non nulle et $\dim(T_n) = n^2 - 1$.

De plus, les $\left(\left(E_{i,i}-E_{1,1}\right)_{2\le i\le n},(E_{i,j})_{i\neq j}\right)$ forment une famille libre de n^2-1 éléments de T_n .

Donc $\boxed{\left(\left(E_{i,i}-E_{1,1}\right)_{2\le i\le n},(E_{i,j})_{i\neq j}\right) \text{ est une base de } T_n}$.

3) Lorsque A est une matrice diagonale et B une matrice quelconque avec leurs coefficients dans [0,1], on remarque que tous les coefficients diagonaux de $AB-BA$ sont nuls.

4) Si A est diagonale et que $B\in M_n(\mathbb{R})$, alors pour $i\in[\![1,n]\!]$, il vient $(AB)_{i,i}=(BA)_{i,i}=A_{i,i}B_{i,i}$, donc $(AB-BA)_{i,i}=0$. Donc $\boxed{\text{si } A \text{ est une matrice diagonale, alors } AB-BA\in D_n}$.

5) On sait que $Tr(AB)=Tr(BA)$. Donc $\boxed{\text{si } Tr(M)\neq 0,\ S_M=\varnothing}$

De plus, $\boxed{S_M \text{ n'est jamais de cardinal } 1}$: si $(A,B)\in S_M$, alors $AB-BA=M$ et $\left(2A,\frac{1}{2}B\right)\in S_M$.

6) On considère $A=\begin{pmatrix}\alpha & \mu\\ \lambda & \beta\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$.

On calcule $AB=\begin{pmatrix}a\alpha+b\mu & c\alpha+d\mu\\ a\lambda+b\beta & c\lambda+d\beta\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}a\alpha+c\lambda & a\mu+c\beta\\ b\alpha+d\lambda & b\mu+d\beta\end{pmatrix}$.

Donc $AB-BA=\begin{pmatrix}b\mu-c\lambda & c(\alpha-\beta)+\mu(d-a)\\ (a-d)\lambda+b(\beta-\alpha) & c\lambda-b\mu\end{pmatrix}$.

- Pour $M=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on prend $\lambda=\mu=0=a=d$, $\alpha=0,\beta=1$, $c=-4$ et $b=1$, et on trouve

  $\boxed{A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ telles que } AB-BA=M}$.

- Pour $M'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, on peut prendre $b=\mu=1$, $\alpha=\beta=0$, $a=c=0$, $d=3$, $\lambda=-\frac{1}{3}$. On trouve

  $\boxed{A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1/3 & 0\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix} \text{ telles que } AB-BA=M}$.

7) Soit $N\in M_n(\mathbb{R})$. Alors $N\in\ker(h)\Leftrightarrow ND=DN$

Ceci équivaut à $\forall i,j\in[\![1,n]\!],\sum_{k=1}^{n}N_{ik}D_{kj}=\sum_{k=1}^{n}D_{ik}N_{kj}$, puis à $\forall i,j\in[\![1,n]\!],N_{ij}D_{jj}=D_{ii}N_{ij}$.

Donc si $N\in\ker(h)$, alors pour $i\neq j$, comme $D_{jj}\neq D_{ii}$, $N_{ij}=0$.

Donc N est diagonale et réciproquement, si N est diagonale, alors $ND=DN$.

Donc $\ker(h)$ est l'ensemble des matrices diagonales et une base de $\ker(h)$ est $\left(E_{i,i}\right)_{1\le i\le n}$.

Donc $\boxed{\dim(\ker(h))=n}$

8) On reprend les notations de la question précédente.
Par théorème du rang, il vient $\dim\mathrm{Im}(h)=n^2-n=\dim(D_n)$.

De plus, avec 4), comme D est diagonale, il vient $\forall N\in M_n(\mathbb{R}),ND-DN\in D_n$.

Donc $\mathrm{Im}(h)\subset D_n$. Avec l'égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}(h)=D_n}$

$\boxed{\text{Dès lors, si } M \text{ est à diagonale nulle, alors } M\in\mathrm{Im}(h) \text{ et il existe } D \text{ diagonale et } N\in E_n \text{ telles que}}$
$\boxed{ND-DN=M}$

Corrigé info M. Fortier :
https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/fortierq/notebooks/master/centrale/centrale_math_info_24_1.ipy

Corrigé des exercices du 11 Juin (partie Maths) :

Corrigé Exercice 4 :

1) f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (si $x<y$, $f_n(x)<f_n(y)$). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+)=[-1,+\infty[$.
   Comme $0\in[-1,+\infty[$, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que } f_n(x_n)=0}$.

2) On trace avec Python.

3) Tout d'abord, comme $f_n(0)=-1$, on sait que pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $x_n\in\mathbb{R}_+^*$

   Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, il vient $f_{n+1}(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}-1=f_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n+1}>f_n(x)$.

   Donc si $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)>f_n(x_n)$. Or $f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})$, donc $f_{n+1}(x_n)>f_{n+1}(x_{n+1})$.
   Donc par stricte croissance de f_{n+1}, $x_n>x_{n+1}$ et $\boxed{(x_n)\text{ est strictement décroissante.}}$

   Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel l.
   On trouve avec Python que $l\simeq 0,63$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a nécessairement $\forall n\geq 2, x_n\leq x_2$.
   Or $\dfrac{x_2^2}{2}+x_2-1=0$, donc comme $x_2>0$, $x_2=\sqrt{3}-1\in[0,1[$. On pose $\boxed{\alpha=x_2=\sqrt{3}-1\in[0,1[}$.
   Alors $\forall n\geq 2, x_n\leq\alpha$

5) On pose $x\in[0,1[$. Alors $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-1\underset{n\to+\infty}{\to}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}-1=-\ln(1-x)-1$ (on sait que la série converge bien avec les développements en série entière usuels).
   On note donc $\boxed{f(x)=-\ln(1-x)-1}$ et on a bien $f\in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$ et $\forall x\in[0,1[, f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}f(x)$.

   Il vient alors $0=f_n(x_n)=f(x_n)+f_n(x_n)-f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   Comme f est continue en l, on sait que $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to}f(l)$.

   De plus, $f_n(x_n)-f(x_n)=-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k}$, et $|f_n(x_n)-f(x_n)|=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x_n^k}{k}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k}$ car $\forall n\geq 2, x_n\leq\alpha$.

   Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ (c'est le reste d'une série convergente).

   Donc $f_n(x_n)-f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et en passant à la limite, il vient $0=f(l)$, donc $\boxed{l=\dfrac{e-1}{e}}$

6) On utilise le théorème des accroissements finis.
   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[l,x_n]$, dérivable sur $]l,x_n[$, donc il existe $c_n\in]l,x_n[$ tel que $f_n(x_n)-f_n(l)=f_n'(c_n)(x_n-l)$.
   Comme $f_n(x_n)=0$, on conclut $\boxed{-f_n(l)=f_n'(c_n)(x_n-l)}$

7) On sait que pour $x\in[0,1[$, $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-1$. Donc $f_n'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$.

   Donc $f_n'(c_n)=\dfrac{1-c_n^n}{1-c_n}$. Or $l\leq c_n\leq x_n$, et par encadrement, $c_n\underset{n\to+\infty}{\to}l$, avec $l<1$.

   Donc $c_n^n=\exp(n\ln(c_n))\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et $f_n'(c_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\dfrac{1}{1-l}$ et $\boxed{f_n'(c_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{1-l}}$

Comme $c_n \le x_n \le \alpha < 1$, il vient $f_n'(c_n) \neq 0$ Avec le résultat du 6), $\boxed{x_n - l = -\frac{f_n(l)}{f_n'(c_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} (l-1)f_n(l)}$.

8) En outre, $f_n(l) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l^k}{k} - 1$, avec $f(l) = -\ln(1-l) - 1 = 0$, donc $f_n(l) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l^k}{k} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{l^k}{k}$.

On pose alors $V_k(t) = \frac{t^k}{k}$ pour $k \ge n+1$ et $t \in [0,l]$. On a alors $V_k'(t) = t^{k-1}$.

On utilise le théorème de dérivation de la somme des séries de fonctions.

- Chaque V_k est C^1 sur $[0,l]$
- $\sum_{k\ge n+1} V_k$ converge simplement sur $[0,l]$.
- $\|V_k'\|_\infty = l^{k-1}$, donc $\sum_{k\ge n+1} V_k'$ converge normalement donc uniformément sur $[0,l]$.

Donc $\forall t \in [0,l]$, $f_n'(t) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^{k-1} = -\frac{t^n}{1-t}$.

On a donc bien $\boxed{f_n(l) = f_n(0) - \int_0^l \frac{t^n}{1-t}dt = \int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt}$

9) En intégrant par parties : $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(t-1)}\right]_0^l + \frac{1}{n+1}\int_0^l \frac{t^{n+1}}{(t-1)^2}dt$.

Donc $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt = \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)} + \frac{1}{n+1}J_n$, avec $J_n = \int_0^l \frac{t^{n+1}}{(t-1)^2}dt$.

Or $|J_n| \le \frac{1}{(1-l)^2}\int_0^l t^{n+1}dt$, donc $|J_n| \le \frac{l^{n+2}}{(n+2)(1-l)^2}$ et $\frac{1}{n+1}|J_n| \le \frac{l^{n+1}}{(n+1)^2(1-l)^2}$

Donc $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)} + o\left(\frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)}\right)$ et $\int_0^l \frac{t^n}{t-1}dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l^{n+1}}{(n+1)(l-1)}$

Donc en reprenant 6), $x_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} (l-1)f_n(l)$, donc $\boxed{x_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l^{n+1}}{(n+1)}}$

Corrigé Exercice 5 :

1) On utilise la norme infinie. On a immédiatement V_n borné.
Si $M, N \in V_n$, $\lambda \in [0,1]$, $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \lambda M_{i,j} + (1-\lambda)N_{i,j} \in [0,1]$, donc $\lambda M + (1-\lambda)N \in V_n$ et V_n est convexe.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ une valeur propre complexe de M .Alors pour $|x_i| = \max_{1\le j\le n}|x_j|$,

$|\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}|M_{i,j}||x_j| \le n|x_i|$. Or $X \neq 0$ donc $\boxed{|\lambda| \le n}$.

3) U_n est une ensemble fini donc $M \mapsto \det(M)$ possède un maximum sur U_n, et $\det$ est continue sur le fermé borné V_n, donc possède un maximum sur V_n par théorème des bornes atteintes.

5) On développe par rapport à la i_0 ème ligne : il existe des coefficients $\lambda_1,...,\lambda_n$, qui ne dépendent pas de x, tels que $\det(M_{i_0,j_0}(x))=\sum_{i\neq i_0} M_{i,j_0}\lambda_i + x\lambda_{i_0}$. On obtient le résultat suivant le signe de λ_{i_0} : si $\lambda_{i_0}\geq 0$, il vient $\det(M_{i_0,j_0}(x))\leq \det(M_{i_0,j_0}(1))$ et si $\lambda_{i_0}<0$, on a $\boxed{\det(M_{i_0,j_0}(x))\leq \det(M_{i_0,j_0}(0))}$

6) $\boxed{\text{On prouve } u_n=v_n}$. Comme $U_n\subset V_n$, on sait que $u_n\leq v_n$. De plus, soit $M\in V_n$ telle que $v_n=\det(M)$ On utilise 5) et on travaille coefficient par coefficient pour le remplacer par 1 ou 0 en obtenant une matrice de déterminant plus grand. Pour $i_0=j_0=1$, il vient $\det(M)\leq \max\left(\det(M_{1,1}(0)),\det(M_{1,1}(1))\right)$ et on note $N(1,1)$ la matrice choisie parmi $M_{1,1}(0)$ et $M_{1,1}(1)$ dont le déterminant est le plus grand. On applique ensuite ce procédé à $N(1,1)$ pour $i_0=1$ et $j_0=2$ et on construit ainsi une matrice $N\in V_n$ telle que $v_n=\det(M)\leq\det(N)\leq u_n$. $\boxed{\text{On a donc bien par double inégalité } u_n=v_n}$.

8) Pour $i\in[\![1,n]\!], X_i=X_i^2$. Donc $P\left(tr(M)\leq 1\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\leq 1\right)$. Si on pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, on sait que $S_n\sim B(n,p)$. Donc $P\left(tr(M)\leq 1\right)=P\left(S_n\leq 1\right)=P\left(S_n=0\right)+P\left(S_n=1\right)=(1-p)^{n-1}\left(np+1-p\right)$

Corrigé Exercice 6 :

1) Si $a>0$, $\dfrac{a}{n^2+a^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{a}{n^2}$ et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{D_S=\mathbb{R}_+^*}$.

2) On sait que pour $a\in D, n\geq 2$, $S(a)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a}{k^2+a^2}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{a}{k^2+a^2}$. Avec une comparaison série-intégrale, il vient après justifications $\int_{n+1}^{+\infty}\dfrac{a}{t^2+a^2}dt\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{a}{n^2+a^2}\leq\int_{n}^{+\infty}\dfrac{a}{t^2+a^2}dt$.

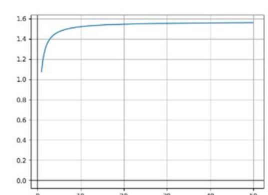
Donc $0\leq\dfrac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\dfrac{n+1}{a}\right)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{a}{n^2+a^2}\leq\dfrac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\dfrac{n}{a}\right)$.

Or si $x>0$, $\dfrac{\pi}{2}-\text{Arctan}(\dfrac{1}{x})=\text{Arctan}(x)\leq x$ en étudiant la fonction $x\mapsto x-\text{Arctan}(x)$

Donc $\boxed{\left|S(a)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a}{k^2+a^2}\right|\leq\text{Arctan}(\dfrac{a}{n})\leq\dfrac{a}{n}}$.

3) On trouve environ $S(1)\simeq 1.07$ et $S(5)\simeq 1.45$

4) Il semble que $\lim_{a\to+\infty}S(a)=\dfrac{\pi}{2}$.



5) Par comparaison série-intégrale, il vient $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{a}{t^2+a^2}dt\leq S(a)\leq\int_{0}^{+\infty}\dfrac{a}{t^2+a^2}dt$.

Donc $\dfrac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{a}\right)\leq S(a)\leq\dfrac{\pi}{2}$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{a\to+\infty}S(a)=\dfrac{\pi}{2}}$.

6) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ car si $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{n^2-x^2}{\left(x^2+n^2\right)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$. $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

7) On pose $U_n(a) = \dfrac{a}{n^2 + a^2}$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque U_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. $U_n'(a) = \dfrac{n^2 - a^2}{\left(n^2 + a^2\right)^2} = f_n(a)$ et $\left|U_n'(a)\right| \leq \dfrac{n^2 + a^2}{\left(n^2 + a^2\right)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\left\|U_n'\right\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \left(U_n\right)'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par théorème de dérivation des séries de fonctions, on a bien $\boxed{\forall a \in D, f(a) = S'(a)}$

Le corrigé Python proposé par M. Fortier est disponible sur :

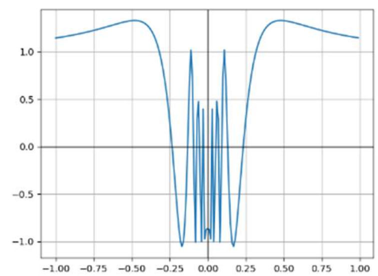
- Séance 2 :
https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/fortierq/notebooks/master/centrale/centrale_math_info_24_2.ipynb

Exercices facultatifs

Corrigé Exercice 7 :

1) Avec la limite du taux d'accroissement : pour $x \neq 0$, $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$ et f est dérivable, donc continue en 0 et $f'(0)=0$

2) f' ne semble pas continue en 0, donc f ne semble pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

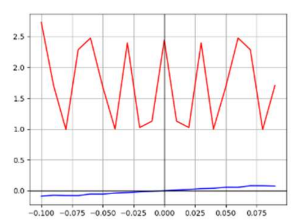


Pour $x \neq 0$ $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On calcule $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -1$ et $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\right) = 1$. Donc par caractérisation séquentielle, f' n'a pas de limite en 0 et f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

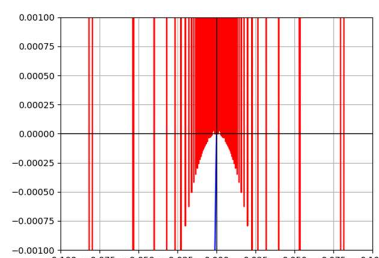
3) g est dérivable par somme et $g'(0) = f'(0)+2 = 2$ Comme $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 2$, avec la définition de limite, il existe $\eta > 0$ $\forall x \in \left]0,\eta\right[, g(x) > g(0)$.

4)



Soit $x \in [-0.1, 0.1]$. Pour $x \neq 0$, $g'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2 - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 1 + 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0{,}8$ car $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \leq 0.1$ et g est croissante au voisinage de 0

5) $h'(0) = f'(0)+1 = 1$



On trace ici h' et on voit qu'elle prend des valeurs négatives. h ne semble pas croissante au voisinage de 0.

6) Si $x \neq 0$, $h'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

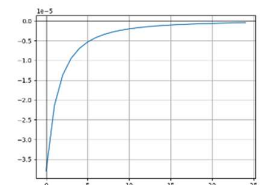
$$h'\left(\frac{1}{U_n}\right) = \frac{2}{2n\pi + \frac{\alpha}{n}}\sin\left(2n\pi + \frac{\alpha}{n}\right) + 1 - \cos\left(2n\pi + \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2n\pi}}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) + 1 - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right).$$

Avec des développements limités : si $\alpha + \alpha^2 \neq 0$, $h'\left(\frac{1}{U_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2}\right)$

On prend $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{2} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} < 0$ et pour n assez grand, $h'\left(\frac{1}{U_n}\right) < 0$.

Donc h n'est pas croissante au voisinage de 0.

7) Il vient $h'\left(\frac{1}{U_{30+10n}}\right) < 0$:



8) La fonction f est lipschitzienne sur $[0,1]$ car $\|f'\|_{\infty,[0,1]} \leq 3$. Donc avec l'inégalité des accroissements finis, si $a,b \in [0,1]$, $|f(b) - f(a)| \leq 3|b-a|$.

Si on prend $a(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $a(x) = x^{3/2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, a est dérivable sur $[0,1]$, mais pas lipschitzienne. En effet, si elle l'était, on aurait pour $x \neq y$ $\frac{|a(y) - a(x)|}{|y-x|} \leq M$, donc en passant l'inégalité à la limite quand y tend vers x $|a'(x)| \leq M$.

Pourtant, $a'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée en prenant $a'(\frac{1}{2n\pi}) = \sqrt{2n\pi}$).

9) On note $V_n(x) = \frac{1}{n^2}f(x - \frac{1}{n})$. Chaque V_n est dérivable sur $[0,1]$ et $V_n'(x) = \frac{1}{n^2}f'(x - \frac{1}{n})$

Avec $\|f'\|_{\infty,[0,1]} \leq 3$, il vient $\|V_n'\|_{\infty,[0,1]} \leq 3$ donc on a convergence normale de $\sum V_n'$ et $\|f\|_{\infty,[0,1]} \leq 1$ et on a donc convergence normale, donc simple de $\sum V_n$.

On conclut par théorème de dérivation des séries de fonctions

Corrigé Exercice 8 :

1) On trouve $D_2(a,b) = a^2 - 2b$ et $D_3(a,b) = a^3 - 3ab$.
2) On développe par rapport à la dernière ligne et on trouve $D_{n+2}(a,b) = aD_{n+1}(a,b) - b\,D_n(a,b)$.
3) Voir par ailleurs.
4) Par récurrence double, on prouve que $a \mapsto D_n(a,b)$ est de degré n.
5) $a \mapsto D_n(a,b)$ semble posséder n racines distinctes.
6) On remarque que $D_n(a,b) = \det\left(aI_n - A_n(b)\right)$. Donc si $a \mapsto D_n(a,b)$ possède n racines distinctes, alors $A_n(b)$ possède n valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

7) On montre que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ par récurrence double (polynômes de Tchebyvhev).

8) On résout $T_n(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$.

Les $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ sont des racines de T_n. Par bijectivité de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, elles sont distinctes, donc comme $\deg(T_n) = n$, ce sont les seules racines et elles sont simples.

9) On sépare le cas $b = 0$: $D_n(a,b) = a^n$ et 0 est la seule racine.

Si $b \neq 0$, on prouve par récurrence double que $D_n(a,b) = 2\left(\sqrt{b}\right)^n T_n\left(\dfrac{a}{2\sqrt{b}}\right)$ et les racines sont les

$2\sqrt{b}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]$.

Les corrigés Python proposés par M. Fortier disponibles sur :

- Exercices en plus :
https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/fortierq/notebooks/master/centrale/centrale_math_info_24_en_plus.ipynb

Rappels séances précédentes :

- Séance 1 :
https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/fortierq/notebooks/master/centrale/centrale_math_info_24_1.ipynb
- Séance 2 :
https://notebook.basthon.fr/?from=https://raw.githubusercontent.com/fortierq/notebooks/master/centrale/centrale_math_info_24_2.ipynb