**Centrale Maths 2**

**Séance du 6 Juin**

**Exercice 1 (oral Centrale 2 2023, Raphaël) :**

Une fonction Python permettant de calculer  est donnée

On pose  et 

1. Montrer que  existe pour tout .
2. Déterminer l’intervalle de définition de et montrer que est continue sur cet intervalle.
3. Ecrire un programme Python permettant de calculer la valeur de  pour . On considèrera que l’on obtient la somme infinie en ajoutant les 100000 premiers termes. Evaluer et émettre une hypothèse sur la valeur de 
4. Démontrer la conjecture précédente.
5. Evaluer le rapport  pour  et conjecturer sur  pour .
6. En déduire un équivalent de quand tend vers .
7. Existence et valeur de pour .
8. Démontrer alors la conjecture de la question 5.

**Exercice 2 (oral Centrale 2 2023, Samuel) :** On fixe . Soit une suite  de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme sur . Pour , on dispose d’une commande Python calculant aléatoirement lespour ).

Pour  et , on pose . On pose aussi .

1. Déterminer les lois de et préciser leurs espérances.
2. On fixe . Pour donné, écrire une fonction en Python qui calcule les valeurs prises par pour 100 simulations de l’expérience, et renvoie la moyenne des obtenue sur ces 100 itérations.
3. Justifier que l’on peut considérer que cette fonction renvoie approximativement .
4. Tracer à l’aide de python  pour . Conjecturer alors une expression de .
5. Démontrer que pour tout et pour tout , .
6. Démontrer l’expression de conjecturée au 4).

**Exercice 3 (Oral Centrale 2022) :** Soit . est l’ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls. est l’ensemble des matrices de trace nulle.

Pour , .

1. Montrez que  est un sous espace vectoriel de et déterminer sa dimension et une base.
2. Même question avec .
3. Ecrire une fonctionqui retourne une matrice diagonale aléatoire de taille  avec les coefficients compris dans .
4. Ecrire une fonction qui pour deux matrices  et  carrées de même taille retourne .
5. Essayer la fonction avec  une matrice diagonale et  une matrice quelconque avec leurs coefficients dans [0,1]. Que pouvez-vous supposer ?
6. Montrez l’hypothèse précédente.
7. Existe-t-il  tel que  soit vide ? Existe-t-il  tel que  soit de cardinal 1 ?
8. Trouver des couples  qui conviennent pour les matrices suivantes :  et 
9. Soit une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont distincts. On considère l’application . Déterminer la dimension de .
10. Montrer que si est à diagonale nulle, alors il existe  telles que et est une matrice diagonale.

**Séance du 11 Juin**

**Exercice 4 (oral Centrale 2 2023, Eloi) :**

Soit . Pour , on pose 

On dispose d’une fonction **x(n)** renvoie le terme d’indice  de où  est un entier strictement positif.

1. Montrer qu’il existe un unique tel que .

On considère la suite .

1. Tracer les termes pour  allant jusqu’à 50.
2. Montrer que est strictement monotone. Proposer une valeur approchée de sa limite .
3. Montrer .
4. Montrer qu’il existe . Donner l’expression explicite de . En déduire la valeur de .
5. Montrer qu’on peut construire une suite  telle que  et 
6. En déduire .
7. Démontrer .
8. En déduire un équivalent de  lorsque tend vers l’infini.

**Exercice 5 (Oral Centrale 22) :** soit . On note l’ensemble des éléments de  dont les coefficients sont dans  et l’ensemble des éléments de  dont les coefficients sont dans .

1. Montrer que  est convexe et borné. On admet qu’il est fermé.
2. Soit  et une valeur propre complexe de . Montrer que .
3. Montrer que possède un maximum sur , noté et un maximum sur , noté .
4. Ecrire une fonction qui génère 1000 matrices de  et renvoie le maximum des déterminants de ces matrices. Ecrire de même une fonction .

Observer les valeurs renvoyées pour compris entre 0 et 10 et émettre une conjecture.

1. Soit . Soit . On note la matrice dont les coefficients sont les mêmes que ceux de , sauf celui situé à la ème ligne et ème colonne qui a été remplacé par .

Montrer que .

1. Montrer le résultat conjecturé en .
2. Soit . Soient des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre . On pose . Ecrire une fonction qui permet de renvoyer une matrice .
3. Calculer la probabilité de l’événement .

**Exercice 6 (Oral Centrale 22) :** pour , on pose 

1. Étudier la convergence de la somme et déterminer le domaine de définition de .
2. Montrer que .
3. Écrire un programme qui calcule et à près.
4. Écrire un programme qui trace la courbe de sur . Conjecturer .
5. Valider la conjecture du 4).
6. On pose  puis . Étudier la convergence simple de la série . Déterminer le domaine de définition de 
7. Justifier la relation 

**Exercices en plus :**

**Exercice 7 (Oral Centrale 22) :** On pose et, pour ,

Soient  et .

1. Montrer que est continue et dérivable sur .
2. Tracer le graphe de . La fonction semble-t-elle de classe  sur ? Démontrez le résultat.
3. Justifier que est dérivable. Que vaut  ? Etablir qu’il existe tel que 
4. Tracer les graphes de et sur . La fonction semble-t-elle croissante au voisinage de ? Montrez-le.
5. Justifier que**est dérivable. Que vaut ? La fonction **semble-t-elle croissante au voisinage de ?
6. Montrer le résultat précédent en considérant où , avec convenablement choisi.
7. Le vérifier en traçant  pour compris entreet .
8. La fonctionest-elle lipschitzienne sur ? Une fonction dérivable sur  est-elle nécessairement lipschitzienne ?
9. Montrer que est dérivable sur.

**Exercice 8 (Oral Centrale 22) :** Pour , on pose et, pour tout  :

 et .

1. Calculer pour .
2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant ,et.
3. Coder en Python une fonction renvoyant .
4. Soit et . Montrer que est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.
5. Pour et , donner une représentation graphique de sur . Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de.
6. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice  ?
7. Soit , la suite de polynômes définie par ,  et Pour, donner une expression simple des termes de la suite .
8. Calculer les racines du polynôme pour tout .
9. Déterminer alors les zéros de en fonction du nombre complexe .