# Exercices en plus 24 : Corrigé CCINP.

**Exercice 1 (oral CCINP 22) :** soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $u \in L(E)$. On note $u^2 = u \circ u$. On suppose $u^2 - 2u + Id_E = 0$ et $u \neq Id_E$.

1) Démontrer que $u \in GL(E)$ et determiner $u^{-1}$.
2) Montrer que $\text{Im}(u - Id_E) \subset \ker(u - Id_E)$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de $u$. $u$ est-il diagonalisable ?
3) Soient $f, g$ deux projecteurs. Montrer que $f \circ g = g \Leftrightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$.
4) Soit $v \in L(E)$, non nul, tel que $v^2 = 0$. Soit $S$ un supplémentaire de $\text{Im}(v)$ dans $E$. Soit $p_1$ la projection sur $\text{Im}(v)$ parallèlement à $S$. On note $q_1 = p_1 - v$.
   Montrer que $q_1$ est un projecteur et que $\text{Im}(p_1) = \text{Im}(q_1)$
5) Montrer qu'il existe deux projecteurs $p, q$ tels que $u = p + q$ et $\text{Im}(p) = \ker(q)$.

**Corrigé :**

1) On a directement $u \circ (2Id_E - u) = Id_E$, donc $u$ est bijective et $\boxed{u^{-1} = 2Id_E - u}$
2) On a un polynôme annulateur $(X-1)^2$ , donc et 1 est la seule valeur propre possible de $u$.
   Il reste à prouver que 1 est bien valeur propre.
   Comme $u^2 - 2u + Id_E = 0$, il vient $(u - Id_E)^2 = 0_{L(E)}$. Si $u - Id_E$ était bijective, $(u - Id_E)^2 = 0_{L(E)}$ le serait aussi, ce qui est absurde. Donc $u - Id_E$ n'est pas être bijective et 1 est valeur propre de $u$.
   Donc $\boxed{Sp(u) = \{1\}}$

   Si $u$ était diagonalisable, sa matrice dans une base de $E$ constituée de vecteur propres serait $I_n$, et on aurait $u = Id_E$, ce qui est exclu. Donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

3) On procède par double implication.
   $\Rightarrow$ On suppose $f \circ g = g$. Si $y \in \text{Im}(g)$, alors il existe $x \in E, y = g(x)$.
   Dès lors, $y = g(x) = f \circ g(x) \in \text{Im}(f)$. On a donc bien $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$.
   $\Leftarrow$ On suppose $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$. Pour $x \in E, g(x) \in \text{Im}(g)$. Donc $g(x) \in \text{Im}(f)$ et puisque $f$ est un projecteur, $f \circ g(x) = g(x)$. On a donc bien $f \circ g = g$.
   On a donc bien $\boxed{f \circ g = g \Leftrightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)}$

4) On sait que $q_1 = p_1 - v$, donc que $q_1 \circ q_1 = p_1 \circ p_1 - p_1 \circ v - v \circ p_1 + v^2$. On remarque ensuite que si $x \in E$, $v(x) \in \text{Im}(v) = \text{Im}(p)$ , donc $p_1 \circ v(x) = v(x)$ et ainsi $p_1 \circ v = v$. De plus, $v^2 = 0$ et si $x \in E$, $p_1(x) \in \text{Im}(v)$, donc $v \circ p_1(x) = 0_E$. Donc $v \circ p_1 = 0_{L(E)}$.
   Ainsi, $q_1 \circ q_1 = p_1 - v = q_1$, $\boxed{\text{donc } q_1 \text{ est un projecteur}}$

   De plus, avec ce qui précède, $q_1 \circ p_1 = p_1 - v \circ p_1 = p_1$, donc avec 3), $\text{Im}(p_1) \subset \text{Im}(q_1)$.
   Enfin, $p_1 \circ q_1 = p_1 - p_1 \circ v = q_1$, donc $\text{Im}(p_1) \supset \text{Im}(q_1)$. On a donc bien $\boxed{\text{Im}(p_1) = \text{Im}(q_1)}$

5) On sait que $(u - Id_E)^2 = 0_{L(E)}$. On pose $\boxed{v = u - Id_E}$ et on applique ce qui précède. On obtient ainsi deux projecteurs $q_1, p_1$ tels que $q_1 = p_1 - v$ tels que $\text{Im}(p_1) = \text{Im}(q_1)$.
   On a alors $u = v + Id_E = p_1 + Id_E - q_1$. On pose alors $\boxed{p = p_1 \text{ et } q = Id_E - q_1}$. On a bien $\boxed{u = p + q}$

Il vient $q\circ q = Id_E - 2q_1 + q_1 = q$, donc $\boxed{p,q \text{ sont des projecteurs.}}$

De plus, $\mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Im}(q_1) = Ker(Id_E - q_1) = \ker(q)$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \ker(q)}$

**Exercice 2 (oral CCINP 22,2) :** on étudie $f(x) = \int_0^1 t^x e^{2t}\,dt$.

1) Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.
2) Etude des limites aux bornes.
   a) Montrer $\forall x > -1, 0 \le f(x) \le \dfrac{e^2}{x+1}$. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de $f$ en $-1^+$.
3) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $D$ et déterminer $f'$. Quelle est la monotonie de $f$ sur $D$ ?
4) Equivalent en $+\infty$
   a) Déterminer une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.
   b) En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

1) On pose $g(x,t) = t^x e^{2t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \left]0,1\right]$.

   $t \mapsto g(x,t) = t^x e^{2t}$ est continue sur $\left]0,1\right]$, et $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}$. Donc $t \mapsto g(x,t)$ est integrable en $0$ si et seulement si $x > -1$. Donc $\boxed{D = \left]-1,+\infty\right[}$.

2) a) Soit $x > -1$. Alors $0 \le t^x \le t^x e^{2t} \le e^2 t^x$ pour $t \in \left]0,1\right]$.

   Donc en intégrant $\boxed{0 \le \dfrac{1}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{e^2}{x+1}}$

   Donc par encadrement, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0}$

   b) Avec ce qui précède, on a aussi $\forall x > -1, \dfrac{1}{x+1} \le f(x)$ et $\boxed{f(x) \underset{x\to -1^+}{\to} +\infty}$.

3) On cherche à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
   - Pour tout $x > -1$, $t \mapsto g(x,t) = t^x e^{2t}$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$.
   - Pour tout $t \in \left]0,1\right]$, $x \mapsto g(x,t) = e^{x\ln(t)} e^{2t}$ est $C^1$ sur $D$.
   - $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(t) e^{x\ln(t)} e^{2t}$. On prend alors $a > -1$ et on prend $x \in \left[a,+\infty\right[$ :

     $\left|(\ln t) t^x e^{2t}\right| \le \left|(\ln t)\right| t^a e^2 = \varphi(t) = \dfrac{\left|(\ln t)\right| e^2}{t^{-a}}$.

     Dès lors, si $-a < \lambda < 1$, $t^\lambda \varphi(t) = \left|(\ln t)\right| t^{a+\lambda} e^2 \underset{t\to 0}{\to} 0$, donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\lambda}\right)$ et $\varphi$ est intégrable en $0$ et continue sur $\left]0,1\right]$, donc $\varphi$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$.

   On obtient donc $\boxed{f'(x) = \int_0^1 (\ln t) t^x e^{2t}\,dt}$,

   Pour $t \in \left]0,1\right]$, $\ln(t) \le 0$ donc $f$ est décroissante sur $D$.

4) a) On effectue une intégration par parties : $f(x+1)=\int_0^1 t^{x+1}e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}t^{x+1}e^{2t}\right]_0^1-\frac{(x+1)}{2}\int_0^1 t^x e^{2t}dt$

On obtient donc $\boxed{f(x+1)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}(x+1)f(x)}$.

b) On sait que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$. Donc $\frac{1}{2}(x+1)f(x)=\frac{e^2}{2}-f(x+1)\underset{x\to+\infty}{\to}\frac{e^2}{2}$.

Donc $\frac{1}{2}(x+1)f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^2}{2}$ et $\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^2}{x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^2}{x}}$

**Exercice 3 (oral CCINP 19,22) :** Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $U_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Énoncer le théorème spécial sur les séries alternées, avec la majoration et le signe du reste.
2) Pour $x>0$, on note $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)$. Justifier que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer $\forall x>0, f(x)=\frac{1}{x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x}$. Etablir $\forall x>0, 2f(x)=\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}$.
4) Montrer que $\forall x>0,\left|f(x)-\frac{1}{2x}\right|\leq\frac{1}{2x(x+1)}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
5) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $0^+$.
6) Démontrer que $\forall x>0, f(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}dt$

1) Voir cours.
2) On fixe $x>0$. On utilise le théorème spécial sur les séries alternées. On a bien une série alternée et la suite $(|U_n(x)|)=\left(\frac{1}{n+x}\right)$ est décroissante et converge vers $0$.

Donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)$ est bien défini pour $x>0$.

De plus, avec la majoration du reste du théorème sur les séries alternées, il vient :

$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}U_k(x)\right|\leq|U_{n+1}(x)|\leq\frac{1}{n+1}$, donc $0\leq\|R_n\|_\infty\leq\frac{1}{n+1}$ et par encadrement, $\|R_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq0}U_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme chaque fonction $U_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

3) Si $x>0$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$.

Avec un changement d'indice, on a bien $\boxed{\forall x>0, f(x)=\frac{1}{x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x}}$

Puis on somme les deux expressions de $f(x)$ et on met au même dénominateur. Il vient alors $\boxed{2f(x)=\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}}$

4) En outre, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+1+x)}\right| \leq \frac{1}{x(1+x)}$ avec la majoration du reste du théorème spécial.

On a donc $\left|2f(x)-\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x(x+1)}$, et ainsi $\boxed{\forall x>0, \left|f(x)-\frac{1}{2x}\right| \leq \frac{1}{2x(x+1)}}$

Dès lors, $\left|xf(x)-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2(x+1)}$, donc par encadrement, $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$ et $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$

5) On a pour $x>0$ : $f(x)=\frac{1}{x}+g(x)$, avec $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$.

De plus, $|g(x)|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\right| \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$.

6) Soit $x>0$. Avec le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, il vient $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} dt$.

Si on cherche à appliquer le théorème d'intégration terme à terme, on constate que l'on n'a pas l'hypothèse principale, car $\int_0^1 t^{n+x-1}dt = \frac{1}{n+x}$ et $\sum \frac{1}{n+x}$ diverge.

On pose donc $W_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x-1}$ et on cherche à appliquer le théorème de convergence dominée.

$W_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x-1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{t^{x-1}}{1+t} = W(t)$ et $(W_n)$ converge simplement vers $W$.

De plus, toujours avec la majoration du reste, $|W_n(t)|=\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x-1}\right| \leq t^{x-1}=\varphi(t)$, et comme $x>0$, $\varphi$ est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$.

Donc $\int_0^1 W_n(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+x-1}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$. Donc $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 \left(t^{k+x-1}\right)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

Donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+x} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$ et par unicité de la limite, $\boxed{\forall x>0, f(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt}$

**Exercice 4 (oral CCINP 22,2) :** soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in E\setminus\{0_E\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

On pose $f:\begin{cases} E \to E \\ x \to x+\alpha\langle x,u\rangle u \end{cases}$.

1) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2) On se place dans $E=\mathbb{R}^2$, avec $\alpha=2$ et $u=(1,2)$.
   a) Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique.
   b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $f$.
3) On revient au cas général. On pose $D=Vect(u)$.
   a) Montrer que si $x$ est un vecteur propre de $f$, alors $x \in D$ ou $x \in D^{\perp}$.
   b) En déduire que $f$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
   c) A quelles conditions sur $\alpha$ et $u$ l'application $f$ est-elle bijective ?
   d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit un automorphisme orthogonal.

1) $f$ est définie sur $E$ et à valeurs dans $E$. Soient de plus $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x+\lambda y) = x+\lambda y+\alpha\langle x+\lambda y, u\rangle u = f(x)+\lambda f(y)$, donc $f$ est linéaire.

Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2) a) On note $(e_1, e_2)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

On calcule $f(e_1) = e_1 + 2u$ et $f(e_2) = e_2 + 4u$. On trouve $\boxed{M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}}$.

b) Alors $\chi_f = X^2 - 12X + 11$ et $\boxed{Sp(f) = \{1, 11\}}$,

Alors $M_B(f - Id_E) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\boxed{v = (2,-1) \text{ est une base de } \ker(f - Id_E)}$

On remarque que $\ker(f - Id_E) = \left(Vect(u)\right)^{\perp}$

Puis $M_B(f - 11Id_E) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{u = (1,2) \text{ est une base de } \ker(f - 11Id_E)}$

3)

a) Soit $x \neq 0_E$, un vecteur propre de $f$, associé à la valeur propre $\lambda$. Alors $x + \alpha\langle x, u\rangle u = \lambda x$, donc $\alpha\langle x, u\rangle u = (\lambda - 1)x$.

Si $\lambda \neq 1$, alors $x = \dfrac{\alpha\langle x, u\rangle}{\lambda - 1} \in D$.

Sinon, $\alpha\langle x, u\rangle u = 0$, et comme $\alpha$ et $u$ sont non nuls, $x \in D^{\perp}$.

Donc $\boxed{\text{si } x \text{ est un vecteur propre de } f\text{, alors } x \in D \text{ ou } x \in D^{\perp}.}$

b) On prend une base $B$ de $E = D \oplus D^{\perp}$, adaptée à cette décomposition, orthonormée, en posant $v = \dfrac{u}{\|u\|}$, base de $D$. On regarde la matrice dans cette base :

Si $x \in D^{\perp}$, $f(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u = x$. $f(v) = \dfrac{u}{\|u\|} + \dfrac{\alpha}{\|u\|}\langle u, u\rangle u = \left(1 + \alpha\|u\|^2\right)v$

On obtient ainsi une matrice diagonale $D = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1+\alpha\|u\|^2 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

De plus, $\boxed{Sp(f) = \left\{1 + \alpha\|u\|^2, 1\right\}}$ et $\boxed{E_{1+\alpha\|u\|^2}(f) = D\text{, et } E_1(f) = D^{\perp}}$

c) $f$ est bijective si et seulement si $D$ est inversible. Donc $\boxed{f \in GL(E) \Leftrightarrow \alpha\|u\|^2 \neq -1}$

d) Enfin, comme $B$ est orthonormée, $f \in O(E) \Leftrightarrow M_B(f) \in O_n(\mathbb{R})$. Les colonnes de la matrice doivent alors être de norme égale à 1. Or $1 + \alpha\|u\|^2 = 1$ est exclu avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Et $1 + \alpha\|u\|^2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{\|u\|^2}$. Donc $f \in O(E) \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{2}{\|u\|^2}$

**Exercice 5 (oral CCINP 22) :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ .

1) Déterminer le rayon de convergence $R$ de $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} z^n$ .
2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$ lorsque $x \in \left]-R,R\right[$ .

1) Pour $z \in \mathbb{C}$ , $\left|\frac{\sin^2(n\theta)}{n!} z^n\right| \leq \frac{|z|^n}{n!}$ , donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} z^n$ est toujours convergente, donc $\boxed{R=+\infty}$.
2) Soit $x \in \left]-R,R\right[ = \mathbb{R}$ . Alors $\sin^2(n\theta) = \frac{1-\cos(2n\theta)}{2}$ .

   Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n = \frac{1}{2}\left(e^x - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{n!} x^n\right)$ (on peut séparer en deux sommes car les deux séries convergent). Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{n!} x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(e^{2i\theta}x\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(e^{2i\theta}x\right)\right)$ .

   Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{n!} x^n = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\cos(2\theta)x + i\sin(2\theta)x\right)\right) = \exp\left(\cos(2\theta)x\right)\cos(\sin(2\theta)x)}$

**Exercice 6 (oral CCINP,1)** : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 1$ , on pose $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)$.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $f_n$ est intégrable sur $\left]1,+\infty\right[$ .
2) Etudier la limite de $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ quand $n$ tend vers l'infini.

1) Tout d'abord, $f_n$ est continue sur $\left]1,+\infty\right[$ et même sur $\left[1,+\infty\right[$ , ce qui donne l'intégrabilité en $1$ .

   De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ , $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ , donc $f_n$ l'est aussi.

   Donc $\boxed{f_n \text{ est intégrable sur } \left]1,+\infty\right[}$.

2) On utilise le théorème de convergence dominée.

   Pour $t \geq 1$ , $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1+\frac{1}{nt}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}} = f(t)$ , donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers $f$ .

   De plus, pour $u > -1$ , $\ln(1+u) \leq u$ , donc si $t \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ , $|f_n(t)| \leq \frac{n}{\sqrt{t}} \frac{1}{nt} = \frac{1}{t^{3/2}} = \varphi(t)$ , avec $\varphi$ intégrable sur $\left]1,+\infty\right[$ .

   On obtient donc $\boxed{\int_1^{+\infty} f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} f(t)dt = 2}$

**Exercice 7 (Oral CCINP 22,2) :** Soient $\varphi,\theta\in\mathbb{R}$. Pour $n\geq 2$, on pose : $u_n=\dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}}$.

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}-\dfrac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n}+O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

2) On suppose que $\theta$ et $\varphi$ sont des multiples de $\pi$. Quelle est la nature de $\sum u_n$ ?

1) On sait que $\dfrac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{=}1-u+O(u^2)$. Donc $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{e^{in\theta}}{1+\dfrac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}}\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{in\theta}-e^{in\theta}\dfrac{e^{in\varphi}}{\sqrt{n}}+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

On obtient bien $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}-\dfrac{e^{in(\theta+\varphi)}}{n}+O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$.

2) On distingue plusieurs cas.

- Si $\theta=2p\pi$, avec $p\in\mathbb{Z}$, il vient $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est de signe fixe et la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ diverge.

- Si $\theta=(2p+1)\pi$ et $\varphi=(2k+1)\pi$, avec $k,p\in\mathbb{Z}$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

  On note alors $v_n=-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{n}$. Alors $\sum\limits_{n\geq 1}v_n$ diverge.

  En outre, avec le théorème spécial sur les séries alternées, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

  Donc par somme, $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ diverge

- Si $\theta=(2p+1)\pi$ et $\varphi=2k\pi$, avec $k,p\in\mathbb{Z}$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{(-1)^n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

  Avec le théorème spécial sur les séries alternées, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ convergent.

  De plus, $\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est positive et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 1}O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge et $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge.

Finalement, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1}u_n \text{ converge si et seulement si } \theta=(2p+1)\pi \text{ et } \varphi=2k\pi\text{, avec } k,p\in\mathbb{Z}}$

**Exercice 8 (oral CCINP 23,3) :** soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.

1) $M$ est-elle inversible ?
2) $M$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Sur $\mathbb{C}$ ?
3) Montrer que $n$ est pair. Calculer $Tr(M)$ et $\det(M)$.

**Corrigé :**

1) On a directement $M(-M - I_n) = I_n$, donc $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = -M - I_n}$

2) $P = X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de $M$. Ses racines sont $x = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right) = j$ et

   $y = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\dfrac{-2i\pi}{3}\right) = \overline{j}$. Ainsi, $P = (X-j)(X-\overline{j})$ et $Sp(M) \subset \{j, \overline{j}\}$.

   $M$ ne possède pas de valeur propre réelle, donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.
   $P$ est un polynôme annulateur de $M$, scindé à racines simples, $\boxed{M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

3) Comme $M \in M_n(\mathbb{R})$, ses deux valeurs propres complexes conjuguées $j, \overline{j}$ ont la même multiplicité que l'on note $p \in \mathbb{N}$. Alors $\gamma_M = (X-j)^p (X-\overline{j})^p$.
   Ainsi, $n = \deg(\gamma_M) = 2p$ et $\boxed{n \text{ est pair}}$.

   De plus, $tr(M) = p(j+\overline{j}) = -p$, donc $\boxed{tr(M) = -\dfrac{n}{2}}$.
   Enfin, $\boxed{\det(M) = (j.\overline{j})^p = 1}$