Exercice 2 : (oral Mines 22,4) :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u,v \in L(E)$ de même rang et tels que $u^2 \circ v = u$.

1) Montrer que $v \circ u \circ v = v$.
2) Montrer que $u \circ v$ est un projecteur.
3) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ et en déduire que $v^2 \circ u = v$

Corrigé :

1) Par théorème du rang, comme $rg(u) = rg(v)$, il vient $\dim(\ker(v)) = \dim(\ker(u))$.
De plus, si $x \in \ker(v)$, alors $u^2 \circ v(x) = u(x)$, donc $x \in \ker(u)$.
On déduit que $\ker(v) = \ker(u)$.
On sait que $u^2 \circ v = u$. Dès lors, si $x \in E$, alors $u\left(\left(u \circ v - Id_E\right)(x)\right) = 0_E$.
Donc $\left(u \circ v - Id_E\right)(x) \in \ker(u) = \ker(v)$. Donc $v\left(\left(u \circ v - Id_E\right)(x)\right) = 0_E$.
Donc $\boxed{v \circ u \circ v = v}$

2) Comme $v \circ u \circ v = v$, il vient $(u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ v$, $\boxed{\text{donc } u \circ v \text{ est un projecteur}}$.

3) Soit $x \in E$. On veut prouver que $u \circ v(u(x)) = u(x)$. On sait que $u \circ v$ est la projection sur $\mathrm{Im}(u \circ v)$ parallèlement à $\ker(u \circ v)$. $\boxed{\text{Donc, si } a \in \mathrm{Im}(u \circ v) \text{, alors } u \circ v(a) = a}$.
L'objectif est ici de prouver que $u(x) \in \mathrm{Im}(u \circ v)$. Pour cela, on montre $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u)$.
On obtient aisément que $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$.
On prouve aussi l'égalité des dimensions. Pour cela, on montre $\ker(u \circ v) = \ker(v)$ par double inclusion (on sait que $\ker(v) = \ker(u)$). On a directement $\ker(u \circ v) \supset \ker(v)$. En outre, si $x \in \ker(u \circ v)$, alors comme $v \circ u \circ v = v$, il vient $x \in \ker(v)$. On a donc bien $\ker(u \circ v) = \ker(v)$ et donc $\dim(\ker(u \circ v)) = \dim(\ker(v))$.
Donc comme $\ker(v) = \ker(u)$, $\dim(\ker(u \circ v)) = \dim(\ker(u))$ et $\dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.
Avec une inclusion et légalité des dimensions, on conclut $\boxed{\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u)}$, donc on a bien $u(x) \in \mathrm{Im}(u \circ v)$ et $u \circ v(u(x)) = u(x)$.
On a bien prouvé $\boxed{u \circ v \circ u = u}$

Dès lors, $u \circ (v \circ u - Id_E) = 0_{L(E)}$, donc $\mathrm{Im}(v \circ u - Id_E) \subset \ker(u) = \ker(v)$, donc $\boxed{v^2 \circ u = v}$

Exercice 4 (oral Mines 22,4) : Donner un équivalent de $I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t+t^2)^n} dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé : On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée. Si on le fait directement, on trouve une limite nulle, ce qui n'est pas intéressant. On cherche donc d'abord à transformer l'expression.

On pose $t = \frac{u}{n}$ et il vient $I_n = \frac{1}{n^3} \int_0^n \frac{u^2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} du = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} 1_{u \leq n} \, du$.

On pose alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $f_n(u) = \frac{u^2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n}$ si $u \leq n$ et $f_n(u) = 0$ si $u > n$.

$$\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\big(u+o(1)\big) .$$

Donc pour $u \in \mathbb{R}_+$, il vient si $n \geq u$: $f_n(u) = \dfrac{u^2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\to} u^2 e^{-u} = f(u)$

Donc la suite (f_n) converge simplement vers f .

De plus, pour $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 4$, $\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n \geq \left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{u^k}{n^k}$.

Donc $\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n \geq \binom{n}{0}\frac{u^0}{n^0}+\binom{n}{4}\frac{u^4}{n^4}$

Or $\binom{n}{4}\frac{1}{n^4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24n^3} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{24}$, donc pour n assez grand $(n \geq N)$, il vient $\binom{n}{4}\frac{1}{n^4} \geq \frac{1}{30}$.

Dès lors, pour $n \geq N$, $\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n \geq 1+\frac{u^4}{30}$, donc $|f_n(u)| \leq \dfrac{u^2}{1+\frac{u^4}{30}} = \varphi(u)$.

De plus, $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{30}{u^2}$ donc φ est intégrable en $+\infty$ et sur $\mathbb{R}_+$.

Donc par théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u^2}{n^2}\right)^n} 1_{u\leq n}\, du \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = 2$ (on la calcule avec deux intégrations par parties)

Donc $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}}$.