Chapitre 1

Suites et fonctions

1.1 Suites usuelles, sommes et produits

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sauf en et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$).

1re A

1.1.1 Calculer le terme général d'une suite récurrente usuelle

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$; pour tout entier $n \geqslant n_0$, soient $a_n, b_n, u_n \in \mathbb{K}$.

- **Suite arithmétique** : $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + b \iff \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)b.}$
- **Suite géométrique :** $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = a u_n \iff \forall n \geqslant n_0,\ u_n = a^{n-n_0} u_{n_0}.}$
- **Suite « arithmétique (ou géométrique) de raison non constante » :**

⚠ appellation incorrecte (d'où les guillemets — oxymore[1] de mon invention).

⚠ ne pas confondre avec une suite arithmétique ou géométrique — **confusion classique**.

1. reconnaître ce type de récurrence ;
2. le terme général est alors donné par une formule de **somme** ou de **produit** :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + b_n \iff u_n = u_{n_0} + \sum_{k=\bullet}^{\bullet} b_k} \qquad \boxed{u_{n+1} = a_n u_n \iff u_n = u_{n_0} \prod_{k=\bullet}^{\bullet} a_k\ ;}$$

3. déterminer les indices de début et de fin (« $k = \bullet$ » jusqu'à « $\bullet$ ») :
   il y a trop de cas différents pour qu'il soit pertinent de retenir une seule formule.
   - le premier terme est celui qui apparaît dans la relation de récurrence quand l'indice est choisi de telle sorte qu'apparaissent u_{n_0} et le terme suivant.
   - le dernier terme est celui qui apparaît dans la relation de récurrence quand on choisit l'indice de telle sorte qu'apparaissent u_n et le terme précédent.

   ⇝ en cas de doute, ne pas hésiter à calculer les premiers termes de la suite par itération — sans simplifier — pour comparer à la formule que l'on a écrite.

   ⇝ on peut aussi trouver le résultat par essai et correction, en vérifiant la validité de la formule écrite pour de petites valeurs de n.

1. « Figure qui consiste à allier deux mots de sens contraire pour leur donner plus de force expressive ».
Petit Robert, 2010.

1.1.1 Calculer le terme général d'une suite récurrente usuelle (fin)

××**SI** + +

- **Suite arithmético-géométrique** $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = a u_n + b}$ $(a \neq 1)$:
  1. calculer $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\ell = a\ell + b$;
  2. alors la suite de terme général $u_n - \ell$ est géométrique de raison a ;
  3. en déduire $u_n - \ell$, puis u_n, en fonction de u_{n_0}, a, ℓ, n_0 et n.

$\rightsquigarrow$ il plus facile (et suffisant) de retenir cette méthode plutôt que le résultat final.

1.1.2 Suites récurrentes d'ordre deux : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$

1re A

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Soit f une fonction de deux variables dans $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Existence et unicité** si X est une partie de $\mathbb{K}$ stable par f *i.e.* $\forall x, x' \in X,\ f(x, x') \in X$: pour $u_{n_0}, u_{n_0+1} \in X$ donnés, il existe une unique suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de X ainsi.
- **Cas particulier où** $u_{n+2} = f(u_n)$ **:**
  1. introduire les suites des termes pairs et impairs *i.e.* $a_p = u_{2p}$ et $b_p = u_{2p+1}$;

  ⚠ l'adjectif « pair » s'écrit sans « -e » au masculin — **faute d'orthographe classique**.

  $\rightsquigarrow$ alors on a : $a_{p+1} = f(a_p)$ et $b_{p+1} = f(b_p)$.

  2. tenter les méthodes applicables aux récurrences d'ordre un (cf. 1.1.1) ;
  3. les expressions de a_p et b_p en fonction de p donnent : $u_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ b_{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- **Calcul du terme général dans le cas d'une récurrence linéaire d'ordre deux :**

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (a \in \mathbb{K} \text{ et } b \in \mathbb{K}^*).}$$

  1. résoudre l'**équation caractéristique** : $r^2 = ar + b \ \ (E)$;
  2. si (E) a deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n\ ;}$$

  2'. si (E) a une seule solution $r \in \mathbb{K}$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n\ ;}$$

  2''. *cas particulier à connaître :* si a, b, u_0, u_1 sont réels et si (E) a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$, le n°2 s'applique avec en général λ et μ complexes non réel ; mais la suite est à termes réels et s'exprime *aussi* à l'aide de deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$ par : $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)\ ;}$

  3. calculer λ, μ (ou A, B) à partir de u_{n_0} et u_{n_0+1} (résolution d'un syst. linéaire 2×2).

⚠ la méthode ne s'applique pas lorsque a ou b n'est pas constant (dépend de n) ni pour les suites de fonctions $x \mapsto u_n(x)$ (car λ, μ dépendent de x) — **erreurs classiques**.

1re A $\rightsquigarrow$ ne pas confondre avec les formules de résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants $y'' + ay' + by = 0$ (cf. 3.4.6) — **confusion classique**.

1reA
1.1.3 Connaître les formules usuelles de somme ou de produit

Soit $x, y, z, a, b \in \mathbb{K}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

- **Somme des x (constante), des n premiers entiers, des carrés, des cubes :**

$$\boxed{\sum_{k=p+1}^{n} x = (n-p)x} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$ 1reA+

- **Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :**

$$\boxed{\text{si } x \neq 1 : \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} x^k = \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x} = x^p \left(\frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}\right).}$$

« premier terme de la somme moins premier terme hors de la somme divisé par un moins la raison »
ou « premier terme fois : un moins la raison puissance le nombre de termes sur un moins la raison »

$\rightsquigarrow$ c'est un cas particulier ($x \neq 1$ et $y = 1$) de la **formule de BERNOULLI** suivante :

$$\boxed{(y-x)(y^n + xy^{n-1} + x^2y^{n-2} + \cdots + x^n) = (y-x)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = y^{n+1} - x^{n+1}.}$$

pour $n = 2$ cela s'écrit : $(y-x)(y^2 + xy + y^2) = y^3 - x^3$.

$\rightsquigarrow$ un autre cas particulier parfois utile ($n = 2p$ et $x = -z$) est :

$$(y+z)(y^{2p} - zy^{2p-1} + z^2y^{2p-2} - \cdots + z^{2p}) = y^{2p+1} + z^{2p+1}.$$

- **Produit de facteurs constants :** $\boxed{\prod_{k=p+1}^{n} x = x^{n-p}.}$

- **Produit d'entiers consécutifs et factorielle :**

$$\boxed{n! \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 \text{ (convention)} & \text{si } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}} \qquad \text{donc : } \begin{cases} \boxed{(n+1)! = (n+1) \times n!} \\ \boxed{\prod_{k=p+1}^{n} k = \frac{n!}{p!}.} \end{cases}$$

⚠ si n n'est pas un entier naturel, alors $n!$ n'est pas défini — **erreur classique**.

⚠ on n'a pas « $(2n)! = 2(n!)$ » — **erreur classique** ; donc éviter d'écrire « $2n!$ » (ambigu).

- **Formule du binôme de NEWTON :** $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$

⚠ la somme démarre à $k = 0$; *les deux* puissances varient avec k — **erreurs classiques**.

1re A

1.1.4 Calculer des coefficients du binôme

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

- **Par la définition :** $\boxed{\dbinom{n}{p} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.}$
- **Par la formule de symétrie :** $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}.}$

⇝ en particulier, bien connaître : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

- **Par dénombrement :** cf. 9.1.2.
- **Par la formule du triangle de PASCAL :** $\boxed{\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}}$ (si $p \in [\![0, n-1]\!]$).

⇝ pour m donné, cette formule permet d'obtenir très rapidement tous les coefficients $\binom{m}{k}$ en remplissant le tableau triangulaire suivant, ligne par ligne de haut en bas :

$\binom{m}{k}$		k												
		0	1	2	3	4	5	……	p	$p+1$	……	n	$n+1$
m	0	1											
	1	1	1										
	2	1	2	1									
	3	1	3	3	1								
	4	1	4	6	4	1							
	5	1	5	10	10	5	1						
	⋮	⋮	⋮					⋱					
	p												
	$p+1$												
	⋮												
	n	1	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	……				$\boxed{\binom{n}{p}}$	$\boxed{\binom{n}{p+1}}$		1	
	$n+1$	1	$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$	……					$\boxed{\binom{n+1}{p+1}}$			1

⇝ inversement le triangle ci-dessus permet de retenir ou retrouver la formule de PASCAL.

- **Par l'expression à l'aide de factorielles :** $\boxed{\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}.}$

⚠ ne pas se précipiter d'emblée sur cette formule — **maladresse classique**.

⇝ inversement, reconnaître que $\dfrac{i!}{j!k!}$ est un coefficient binomial lorsque $i = j + k$.

1reA+

1.1.5 Formules supplémentaires avec les coefficients du binôme

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}$.

- Convention : $\binom{n}{p} \overset{\text{déf}}{=} 0$ si $p \notin [\![0, n]\!]$.

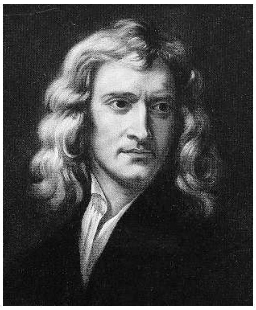
$\leadsto$ mais toujours vérifier si $p \in [\![0, n]\!]$ ou non (c'est souvent le symptôme d'une erreur).

- Formules (sans nom) : $\boxed{p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}}$ (si $1 \leqslant p \leqslant n$) et $\binom{p}{q}\binom{n}{p} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q}$.
- **formule de VANDERMONDE** : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}}$ (si $n \in [\![0, p+q]\!]$).

$\leadsto$ s'obtient :
- par calcul du coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^p(1+X)^q$ de deux manières ;
- de manière combinatoire (le nombre de tirages de n boules dans une urne contenant p boules blanches et q boules noires se décompose en fonction du nombre k de boules blanches tirées — cf. 10.1.10) ;
- 2eA par stabilité de la loi binomiale (avec les paramètres $\left(p, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(q, \frac{1}{2}\right)$ — cf. 10.2.8).

- Relation $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (par récurrence sur $n \geqslant p$ avec la formule de PASCAL).

Blaise PASCAL
(1623-1662)
France



Isaac NEWTON
(1643-1727)
Angleterre

Jacob BERNOULLI
(1654-1705)
Suisse

Alexandre-Théophile VANDERMONDE
(1735-1796)
France

Michel CHASLES
(1793-1880)
France

Niel Henrik ABEL
(1802-1829)
Norvège

1reA

1.1.6 Calculer une somme ou un produit

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient deux suites de nombres (a_k) et (b_k).
On veut écrire une somme sans le signe $\sum$, ou un produit sans le signe $\prod$.

- **Reconnaître une formule usuelle** (cf. 1.1.3), ou s'y ramener (cf. 1.6.7 notamment).
- **Par télescopage** (les termes se simplifient entre eux), par exemple :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_p} \qquad \boxed{\prod_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_p}.}$$

⇝ cela s'appelle aussi une somme (ou un produit) **télescopique**.

- **En utilisant une formule algébrique avec $\sum$ ou $\prod$:**

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=p}^{n} b_k\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right),}$$

⇝ la sommation est linéaire (cf. 7.1.3).

$$\boxed{\prod_{k=p}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k=p}^{n} ({a_k}^m) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^m.}$$

⚠ ici λ et m sont constants (ne dépendent pas de k) — **erreur classique**.
⚠ certaines formules algébriques avec $\sum$ ou $\prod$ sont fausses — **erreur classique**.
Pour tester la validité d'une formule, l'écrire en extension (*i.e.* avec $+\cdots+$ ou $\times\cdots\times$), voire avec deux termes seulement.
Exemples :

$$(a_1 + b_1)\cdots(a_n + b_n) \neq (a_1 \cdots a_n) + (b_1 \cdots b_n)$$
soit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \neq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$.

$$(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$$
soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

- **Par découpage** (**relation de CHASLES**) :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k} \quad \text{et notamment :} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k.}$$

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k} \quad \text{et notamment :} \quad \boxed{\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times \prod_{k=1}^{n} a_k = a_n \times \prod_{k=0}^{n-1} a_k.}$$

⇝ les relations de droite permettent de justifier par récurrence une formule de somme ou de produit dont le résultat est donné.

Exemple important : si $a_k = \begin{cases} u_k & \text{si } k > p \\ 0 & \text{si } k \leqslant p \end{cases}$, alors on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k$;

⚠ bien noter que la somme de droite commence à $p+1$ — **erreur classique**.

EXEMPLE CLASSIQUE. — $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)=\prod_{k=1}^{n}2k=\left(\prod_{k=1}^{n}2\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)=2^n n!$.

1reA

1.1.6 Calculer une somme ou un produit (suite)

- **Par changement d'indice**, notamment :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_k\underset{j=k-1}{=}\sum_{j=0}^{n-1}a_{j+1}}\qquad\boxed{\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}\underset{j=k+1}{=}\sum_{j=1}^{n+1}a_j}\qquad\boxed{\sum_{k=0}^{n}a_k\underset{j=n-k}{=}\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}.}$$

1. on pose un nouvel indice en fonction de l'ancien : $j=f(k)$ $[\iff k=g(j)]$;
2. on remplace k par $g(j)$ dans l'expression a_k ;
3. on remplace « k va de p à n » par « j va de $f(p)$ à $f(n)$ » (à échanger si $f(n)<f(p)$) ;

⇝ comme le nouvel indice j est muet (cf. $\mathscr{M}$.3.4), si nécessaire on peut le remplacer par k dans la suite des calculs — et c'est souvent utile.

⚠ le nouvel indice doit prendre autant de valeurs que l'indice de départ (changement bijectif) ; pas de changement d'indice $j=2k$ de 0 à $2n$ — **erreur classique**.

⚠ pas de changement ailleurs (par ex. si a_k dépend de n) — **erreur classique**.

⚠ ne pas confondre avec un changement sur n, où les k ne changent pas — **erreur classique** — *par exemple :* $u_n=\sum_{k=0}^{n}a_{k,n}\implies u_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}a_{k,2n}$.

- **En transformant un produit en somme grâce à la fonction logarithme.**

⇝ tous les facteurs doivent être strictement positifs.

⇝ les formules algébriques de somme sont ainsi reliées aux formules de produit.

1reA+

- **Reconnaître la somme ou le produit des racines d'un polynôme dont on connaît les coefficients** : cf. 1.7.8.

MP++ PC++ PSI++

- **Par transformation d'ABEL.**

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k=\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}b_k-\sum_{k=0}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n+1}a_kb_{k-1}-\sum_{k=0}^{n}a_kb_k$$
$$=a_{n+1}b_n-a_0b_0+\sum_{k=1}^{n}a_k(b_{k-1}-b_k)$$

EXEMPLE CLASSIQUE DE CALCUL DE SOMME PAR TRANSFORMATION D'ABEL. —

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n}kx^k=\sum_{k=0}^{n}(x^{k+1}-x^k)\times k\underset{\text{t. d'ABEL}}{=}x^{n+1}\times n-x^0\times 0+\sum_{k=1}^{n}x^k((k-1)-k)=nx^{n+1}+\frac{x-x^{n+1}}{x-1}$$

donc pour tout $x\neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n}kx^k=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.1 À 1.9**

1reA*

1.1.7 Extension des notations de somme ou de produit

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Pour toute suite finie de nombres $(a_k)_{k\in K}$ indicée par une partie finie K de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^2$, on note $\sum\limits_{k\in K} a_k$ leur somme et $\prod\limits_{k\in K} a_k$ leur produit.

- **Situations classiques à connaître :**
  - si $K = [\![p, n]\!]$, alors : $\boxed{\sum\limits_{k\in[\![p,n]\!]} a_k = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n.}$
  - si $K = \{2j \mid p \leqslant j \leqslant n\}$, alors : $\sum\limits_{k\in K} a_k = \sum\limits_{j=p}^{n} a_{2j} = a_{2p} + a_{2p+2} + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}$.

  ⇝ analogue avec des entiers impairs.
  - si $K = \left\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \;\middle|\; i+j=n\right\}$, alors on note :

$$\boxed{\sum_{i+j=n} a_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n-i} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j,j} = a_{0,n} + a_{1,n-1} + \cdots + a_{n-1,1} + a_{n,0}.}$$

  - si $K = [\![p,n]\!] \times [\![p,n]\!]$, alors on note : $\boxed{\sum\limits_{p\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} \sum\limits_{(i,j)\in[\![p,n]\!]^2} a_{i,j}.}$

  ⇝ autres cas où $K \subset \mathbb{N}^2$: cf. 1.1.8.

  ⚠ ne pas confondre avec $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$ (cf. 1.1.8).[2]

  ⇝ définitions et résultats analogues avec les produits.

- **Extension de la relation de CHASLES lorsque** $\boxed{K_1 \cap K_2 = \varnothing}$ (avec $K_1, K_2 \subset K$) :

$$\boxed{\sum_{k\in K_1} a_k + \sum_{k\in K_2} a_k = \sum_{k\in K_1\cup K_2} a_k} \quad \text{et} \quad \boxed{\prod_{k\in K_1} a_k \times \prod_{k\in K_2} a_k = \prod_{k\in K_1\cup K_2} a_k}$$

  ⇝ à condition de prendre les conventions : $\boxed{\sum\limits_{k\in K} a_k \overset{\text{déf}}{=} 0 \text{ et } \prod\limits_{k\in K} a_k \overset{\text{déf}}{=} 1 \text{ si } K = \varnothing.}$

  Exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = 0$ pour $n = 0$.

  Exemples classiques : $\sum\limits_{j=p}^{n} a_{2j} + \sum\limits_{j=p}^{n} a_{2j+1} = \sum\limits_{k=2p}^{2n+1} a_k$ et $\prod\limits_{j=p}^{n} a_{2j} \times \prod\limits_{j=p}^{n} a_{2j+1} = \prod\limits_{k=2p}^{2n+1} a_k$.

EXEMPLE CLASSIQUE. — $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

2. cas où $K = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \;\middle|\; i \leqslant j\right\}$.

1^re^A

1.1.8 Calculer une somme double

C'est une somme de nombres $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ indicés par deux entiers i et j *i.e.* par des couples (i,j) éléments d'un ensemble fini donné $K \subset \mathbb{N}^2$. Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

- **Cas simple où** $\boxed{K = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \text{ (ensemble d'indices rectangulaire) :}}$

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).}$$

1. pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $s_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ (qui dépend de i, mais pas de j) ;
2. calculer la somme $\sum_{i=1}^{n} s_i$, qui vaut $\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$.

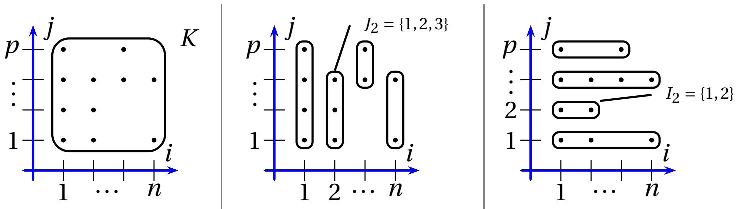
$\rightsquigarrow$ les rôles de i et j (et donc l'ordre des sommations) peuvent êtres échangés.

Cas particulier important : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i v_j = \sum_{i=1}^{n}\left[u_i\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right)\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right).$

⚠ si on lit ce calcul de droite à gauche, les deux indices muets i doivent être notés par des lettres différentes, d'où le changement de nom pour l'un d'eux — **erreur classique**.

- **Cas complexe où** $\boxed{K \subset [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \text{ (ensemble d'indices non rectangulaire) :}}$

1. dessiner K comme un ensemble de points dans le plan,
   puis opérer un découpage vertical ou horizontal :



$K = \bigcup_{i=1}^{n} \{(i,j) \mid j \in J_i\}$ avec $J_i \subset [\![1,p]\!]$

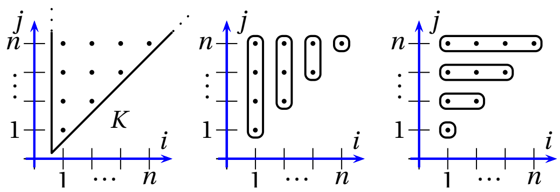
$K = \bigcup_{j=1}^{p} \{(i,j) \mid i \in I_j\}$ avec $I_j \subset [\![1,n]\!]$

2. alors on a : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i\in I_j} a_{i,j}\right).$

⚠ les bornes de sommation changent lors de l'interversion — **erreur classique**.

Exemple important (somme triangulaire) :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)}$$



✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.10**

1.2 Inégalité et monotonie

1reA **1.2.1** **Techniques classiques sur les inégalités et liens entre elles**

Soient deux fonctions $\mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ (lorsque $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{N}$, f et g sont des suites).

- **Obtenir par le calcul une inégalité donnée** :
  - par calculs de proche en proche à partir d'une inégalité évidente ou connue : cf. 1.2.2 ;
  - transformer l'inégalité à montrer en inégalités équivalentes successives de plus en plus simples, jusqu'à en obtenir une que l'on sait vraie : cf. 1.2.3 ;
  - combiner les deux approches précédentes.
- **Obtenir un encadrement** en pensant à le découper en plusieurs inégalités, *par ex.* :
$$A \leqslant B < C \iff A \leqslant B \text{ et } B < C.$$
- **Tout mettre dans un même membre pour se ramener à une étude de signe** (cf. 1.2.4) :
$$f(x) \leqslant g(x) \iff 0 \leqslant g(x) - f(x).$$
- **Résoudre une inéquation** : raisonner par équivalences.

$\rightsquigarrow$ penser à se ramener à une étude de signe : $\boxed{f(x) \leqslant g(x) \iff 0 \leqslant g(x) - f(x).}$

⚠ ne pas simplifier un facteur (sauf s'il est strictement positif) — **erreur classique** — conserver plutôt ce facteur pour l'inclure dans une étude de signe.

- **Étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction** : cf. 1.2.6 et cf. 1.2.5.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ **croissante**} & \overset{\text{déf}}{\iff} & \forall x, x' \in \mathscr{D}_f,\ x \leqslant x' \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x') \\ \mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ **décroissante**} & \overset{\text{déf}}{\iff} & \forall x, x' \in \mathscr{D}_f,\ x \leqslant x' \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x'). \end{array}}$$

- **Majorer ou minorer une suite ou une fonction** : cf. 1.2.8.
  La fonction (ou la suite) f est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un nombre M (resp. m) — indépendant de x — tel que : $\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant m).}$

$\rightsquigarrow$ majorer (resp. minorer) f c'est trouver une telle constante M (resp. m) — peu importe sa valeur du moment qu'elle ne dépend pas de x.

- **Borner une suite ou une fonction à l'aide de sa valeur absolue** (cf. ex. page 42) :
  La fonction (ou la suite) f est **bornée** si et seulement elle est majorée et minorée.
  Pour borner f, il suffit de majorer $|f|$: $\boxed{-M \leqslant f(x) \leqslant M \iff |f(x)| \leqslant M.}$
  Utiliser pour cela les propriétés de calcul de la valeur absolue (pour tout $A, B \in \mathbb{R}$) :

$$\boxed{|A+B| \leqslant |A| + |B|} \ (\textbf{inégalité triangulaire}) \quad \text{et} \quad \boxed{|AB| = |A| \times |B|.}$$

⚠ ne pas majorer à l'intérieur d'une valeur absolue — **erreur classique** ; *par exemple* « $|x-2| \leqslant |x^2-2|$ » est faux pour $x = \sqrt{2}$, bien que $x \leqslant x^2$.

- **Reconnaître et utiliser une inégalité classique**, notamment :
  - un des différents types d'inégalité triangulaire ; cf. 1.6.1, 4.2.1, 11.1.1 et ci-dessus ;
  - une inégalité de convexité (cf. 1.2.10) ;
  - une inégalité des accroissements finis ou de TAYLOR-LAGRANGE (cf. 1.2.9) ;
  - une inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (cf. 11.1.2 et 4.2.1).

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.27**

1reA

1.2.2 Obtenir une inégalité par calcul sur les inégalités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient des nombres réels : $x, x', y, y', a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, N, D$.
Soit une fonction $\mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Soit $X \subset \mathscr{D}_f$.

- **Majorer une somme, un produit :**

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} x \leqslant y \\ x' \leqslant y' \end{array}\right\} \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'} \qquad \boxed{\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x' \leqslant y' \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leqslant xx' \leqslant yy'}$$

- **Appliquer une fonction f à une inégalité :**

$$\boxed{x \leqslant y \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) & \text{si } f \text{ croissante sur } X \\ f(x) \geqslant f(y) & \text{si } f \text{ décroissante sur } X \end{cases} \quad \text{avec } x, y \in X.}$$

⚠ rien en général entre $f(x)$ et $f(y)$ si f n'est pas monotone — **erreur classique**.
⚠ citer la monotonie de f (et X, si f non globalement monotone) — **oubli fréquent**.
Exemples : $x \leqslant y \Longrightarrow e^x \leqslant e^y$ car exp est croissante
$0 < x \leqslant y \Longrightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
⚠ ne pas écrire « $x \leqslant y \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ car $x, y \geqslant 0$ » — **confusion classique** d'arguments.

- **Majorer un quotient** en se ramenant au cas d'un produit $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant x \leqslant N \\ 0 < D \leqslant y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{N}{D}.}$$

⚠ il faut <u>minorer le dénominateur</u> et non le majorer — **erreur classique**.
⚠ on n'a pas « $y \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{x}{y} \leqslant x$ » — **confusion classique** avec le cas où $y \geqslant 1$.
⇝ quand tout n'est pas positif, s'y ramener préalablement par passage à l'opposé.

- **Extension aux sommes $\sum$:** $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k \leqslant b_k \implies \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.}$

⇝ résultat analogue pour les produits $\prod$, si tout est positif.
⚠ ne pas remplacer « $\Longrightarrow$ » par « $\Longleftrightarrow$ » — **erreur classique**.

- **Cas d'une inégalité stricte :** les inégalités encadrées ci-dessus sont strictes dès que l'une des inégalités de départ est stricte (et si tout est strictement positif pour un produit, et avec la stricte monotonie pour f).

⇝ lorsque $a_k \geqslant b_k$ pour tout k, une contraposée usuelle est :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = b_k.}$$

⚠ **ne pas confondre « $\leqslant$ » et « $<$ » — confusion (trop) fréquente** — cf. $\mathscr{M}$.2.5.

- **Se ramener à la positivité d'un carré, ou d'une somme de carrés.**

Exemple classique : $\boxed{xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ (équivaut à $(x-y)^2 \geqslant 0$).

EXEMPLE PATHOLOGIQUE. — $x = -6$, $y = 1$, $x' = -10$, $y' = 2$; on a $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$ mais toutes les inégalités suivantes sont fausses : $xx' \leqslant yy'$, $\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$, $x^2 \leqslant y^2$, $x - x' \leqslant y - y'$, $\frac{x}{x'} \leqslant \frac{y}{y'}$.

1reA

1.2.3 Obtenir par calcul une inégalité *équivalente*

Soient $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$. Soit une fonction $\mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; soit $X \subset \mathscr{D}_f$.

- **Par somme ou par produit :**

$$\boxed{x \leqslant y \iff 0 \leqslant y - x} \qquad \boxed{x \leqslant y \iff \lambda x \leqslant \lambda y \quad \text{si } \lambda > 0}$$

$$\boxed{x \leqslant y \iff x + \lambda \leqslant y + \lambda} \qquad \boxed{x \leqslant y \iff \lambda x \geqslant \lambda y \quad \text{si } \lambda < 0.}$$

⚠

- **En appliquant une fonction** f à $x, y \in X$:

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } \textit{strictement} \text{ croissante sur } X : x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)}$$

$$\boxed{\text{si } f \text{ est } \textit{strictement} \text{ décroissante sur } X : x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y)}$$

⇝ reste vrai avec des inégalités strictes partout.

⚠ citer la monotonie de f — **oubli fréquent**.
Exemple : $x \leqslant y \iff e^x \leqslant e^y$ car exp est strictement croissante.

⚠ tenir compte de X lorsque f n'est pas globalement monotone — **erreur classique**.
Contre-ex. : « $x \geqslant 2 \iff x^2 \geqslant 4$ car $x \mapsto x^2$ est str. croissante sur $\mathbb{R}_+$ » (oubli de $x \leqslant -2$).

1reA

1.2.4 Étudier le signe d'une fonction

Soit une fonction $\mathbb{R} \supset \mathscr{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

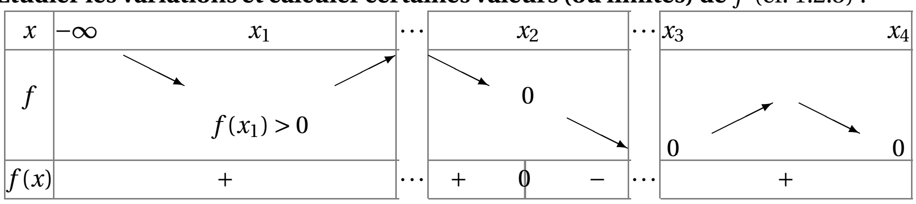
- **Factoriser** $f(x)$ **puis faire un tableau de signes**, *par exemple* :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$A(x)$		+	0			−			
$B(x)$			−		0		+		
$C(x)$		+	0		−		0	+	
$f(x) = A(x)B(x)C(x)$		−	0	−	0	+	0	−	

⇝ savoir notamment trouver le signe des expressions simples, notamment polynomiales de degré un ou deux (cf. 1.7.1).

⚠ rechercher où f s'annule ne suffit pas, car f ne change pas forcément de signe lorsqu'elle s'annule — **erreur classique**. *Contre-exemple :* $f(x) = x^3 - x^2$ (en $x = 0$).

- **Étudier les variations et calculer certaines valeurs (ou limites) de** f (cf. 1.2.5) :



EXEMPLES CLASSIQUES. — $\boxed{1 + x \leqslant e^x,}$ $\boxed{\ln(x+1) \leqslant x}$ et $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|,}$
par étude de $x \mapsto e^x - x - 1$, $x \mapsto \ln(x+1) - x$, $x \mapsto \sin x + x$ et $x \mapsto \sin x - x$ et leur valeur en $x = 0$.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.11 À 1.15**

1^{re}A

1.2.5 Étudier la monotonie d'une fonction f

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit une fonction $\mathbb{R} \supset \mathcal{D}_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

⇝ penser à utiliser les symétries de f pour réduire le domaine d'étude (cf. 1.3.7).

⚠ le contraire de « croissant » n'est pas « décroissant » : les fonctions constantes sont croissantes et décroissantes (ce sont les seules ainsi) et il existe des fonctions non monotones (*exemple* : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$) — **erreur classique**.

- ***En priorité* par les théorèmes de calcul sur les fonctions strictement monotones** si f s'obtient par des opérations (somme, produit, composée) sur des fonctions u, v plus simples dont on connaît les monotonies (strictes ou larges) :

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$u+v$</td><td>$uv\ (u,v>0)$</td><td>$v\circ u$</td><td>λu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$u \nearrow$</td><td>$v \nearrow$</td><td>$\lambda>0$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\nearrow$</td><td colspan="2">$\nearrow$</td></tr>
<tr><td>$v \searrow$</td><td>$\lambda<0$</td><td colspan="2" rowspan="2">indéterminé</td><td colspan="2">$\searrow$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$u \searrow$</td><td>$v \nearrow$</td><td>$\lambda>0$</td><td colspan="2">$\searrow$</td></tr>
<tr><td>$v \searrow$</td><td>$\lambda<0$</td><td>$\searrow$</td><td>$\searrow$</td><td colspan="2">$\nearrow$</td></tr>
</table>

⚠ la règle sur le produit ne s'applique que si $u, v > 0$ — **erreur classique**.

⇝ pour une composée, lire le tableau ci-dessus de la manière suivante :

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} u \text{ croissante sur } X \subset \mathcal{D}_u \\ u \text{ à valeurs dans } Y \subset \mathcal{D}_v \\ v \text{ décroissante } \underline{\text{sur } Y} \end{array}\right\} \Longrightarrow v \circ u \text{ décroissante sur } X.}$$

⚠ ne pas utiliser la monotonie de v sur X — **confusion classique**.

⇝ les monotonies (et les inégalités) peuvent être larges.

⇝ la monotonie des fonctions usuelles se retient grâce à leur courbe (cf. 1.5.1 à 1.5.5).

- **Étudier le signe de** f' (cf. 1.2.4) en se plaçant sur un intervalle I :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f'(x) \geqslant 0 \text{ sur } I & \Longleftrightarrow & f \text{ croissante sur } I \\ f'(x) \leqslant 0 \text{ sur } I & \Longleftrightarrow & f \text{ décroissante sur } I \end{array}}$$

⇝ c'est une conséquence de l'égalité des accroissements finis (cf. 1.2.9).

⇝ l'étude du signe de f' requiert parfois l'étude de f' ou d'un facteur présent dans l'expression de f', si nécessaire en dérivant une deuxième fois (cf. 1.2.4).

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si, de plus, } f' \text{ ne s'annule sur aucun intervalle de longueur non nulle,} \\ \text{alors la monotonie est stricte} \end{array}}$$

Ex. classiques : $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée nulle en 0) ;
$x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (continue, non dérivable en 0).

⚠ ce n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle — **erreur classique**.

- **Par la définition** : prendre x, x' quelconques tels que $x < x$ et comparer $f(x)$ et $f(x')$.

⇝ notamment lorsque $f(x)$ est la somme d'une série ou est une intégrale.

⚠ le signe de $f(x+1) - f(x)$ ne donne pas la monotonie de f — **confusion avec les suites**.

EXEMPLES PATHOLOGIQUES.

1. Fonctions u et v telles que u, v et $v\circ u$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_-$: $u(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et $v(x)=x^2$.
   En effet $(v\circ u)(x)=(\mathrm{e}^{-x})^2=\mathrm{e}^{-2x}$; il n'y a pas de contradiction avec les règles de monotonie d'une composée car u est décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et v est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Fonction f non décroissante telle que $f'(x)<0$: $f(x)=\frac{1}{x}$;
   f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, puisque $-1=f(-1)<f(1)=1$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle).
3. Fonction f non croissante telle que $f(x+1)-f(x)>0$ pour tout x : $f(x)=\pi x+\sin(2\pi x)$.
   En effet : $f(x+1)-f(x)=\pi$ et $f'(x)=\pi+2\pi\cos(2\pi x)<0$ pour $x\in\left]\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right[$.

1reA

1.2.6 Étudier la monotonie d'une suite (u_n)

- **Si $u_n=f(n)$, avec f monotone** : alors (u_n) varie dans le même sens que f.
- **Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$:**

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0 &\iff (u_n)\text{ croissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\leqslant 0 &\iff (u_n)\text{ décroissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n> 0 &\iff (u_n)\text{ strictement croissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n< 0 &\iff (u_n)\text{ strictement décroissante}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ à essayer notamment lorsque u_n s'exprime à l'aide d'une somme.

- **Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, lorsque** $u_n>0$ (à vérifier et à mentionner) :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1 &\iff (u_n)\text{ croissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1 &\iff (u_n)\text{ décroissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}> 1 &\iff (u_n)\text{ strictement croissante}\\
\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}< 1 &\iff (u_n)\text{ strictement décroissante}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ à essayer notamment lorsque u_n s'exprime par produit, quotient ou puissance.

⚠ lorsque $n<p$, alors $q^n<q^p$ si $q>1$, mais $q^n>q^p$ si $q\in]0,1[$ — **erreur très classique**.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.16 À 1.18**

1reA

1.2.7 Ce qu'il faut savoir sur les intervalles réels

- **Les différents types d'intervalle** ($m,M\in\mathbb{R}$, avec $m\leqslant M$) :

	borné	*non borné*
ouvert	$]m,M[$, $\varnothing$	$]-\infty,M[$, $]m,+\infty[$, $\mathbb{R}$
fermé	$[m,M]$ (**segment**), $\varnothing$	$]-\infty,M]$, $[m,+\infty[$, $\mathbb{R}$
semi-ouvert/semi-fermé	$[m,M[$, $]m,M]$	

$\rightsquigarrow$ m ou $-\infty$, et M ou $+\infty$ s'appellent les extrémités de l'intervalle.

⚠ ne pas confondre l'intervalle $[m,M]$ avec $[\![m,M]\!]=\mathbb{Z}\cap[m,M[$ (entiers de m à M).

- **La définition :** $I\subset\mathbb{R}$ intervalle $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $\forall a,b\in I,\ [a,b]\subset I$
  $\iff$ $(\forall a,b\in I,\ \forall t\in\mathbb{R},\ a\leqslant t\leqslant b\Longrightarrow t\in I)$

$\rightsquigarrow$ autrement dit, l'ensemble I ne comporte pas de « trou ».

MPI, PC, PSI $\rightsquigarrow$ cela revient à dire que I est convexe (cf. 11.3.8).

1reA

1.2.8 Majorer ou borner une suite ou une fonction

Soient f, g deux fonctions (ou suites) à valeurs réelles.

⚠ la relation « $\forall x,\ f(x) \leqslant g(x)$ » (« f est majorée par g ») n'entraîne pas que f est majorée — **vocabulaire trompeur** !

- **Par calcul sur les inégalités** : cf. 1.2.2.
- **Se ramener à une étude de signe** : $f(x) \leqslant M \iff 0 \leqslant M - f(x)$; cf. 1.2.4

⇝ à condition que la valeur de M soit connue, ou au moins pressentie.

- **Par étude de fonction** (variations et valeurs/limites) : on voit ainsi entre quelles valeurs f varie, donc si elle est bornée et si elle **atteint ses bornes** (*i.e.* s'il existe $x_1, x_2 \in \mathscr{D}_f$ tels que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$).
- **Par le théorème des bornes atteintes** (argument théorique, admis) :

$\boxed{\text{toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes}}$

i.e. si f est continue sur $[a,b]$, alors $\exists c, d \in [a,b],\ \forall x \in [a,b],\ f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.

⚠ ce théorème ne dit pas que « $\forall x \in [a,b], f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ » — **confusion classique**.
Contre-exemple : $f(x) = x(1-x)$ sur $[0,1]$.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.19 À 1.21**

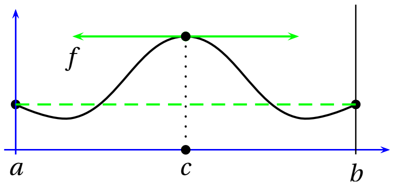
1reA

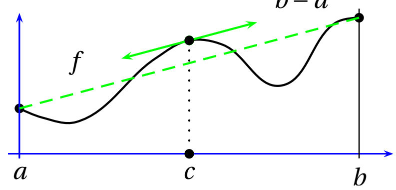
1.2.9 Reconnaître l'inégalité des accroissements finis et ses variantes

Soit un intervalle réel I. Soient $a, b \in I$. Soit $M \in \mathbb{R}$.
Soit une fonction $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $I - \{a,b\}$.

- **Le théorème de ROLLE et l'égalité des accroissements finis** si $I = [a,b]$:

théorème de ROLLE	***égalité des accroissements finis***
$f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$	$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$





⇝ faux si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$; *contre-ex.* : $f(x) = x(1-x) + \mathrm{i}x^2(1-x)$ sur $I = [0,1]$.

D 1reA ++ ++

- **L'inégalité des accroissements finis :**

$$\forall t \in I,\ |f'(t)| \leqslant M \implies |f(b) - f(a)| \leqslant |b-a| M.$$

D MPSI* PCSI*

- **L'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I (cf. 3.2.1), et si $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ sur I, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

⇝ reste vrai si f est à valeurs complexes.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.22 À 1.24**

PC PSI MPI

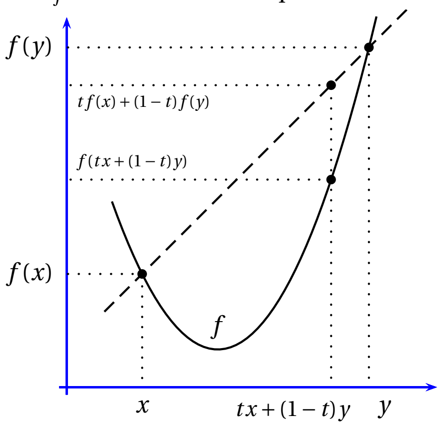
1.2.10 Obtenir une inégalité de convexité

Soit une fonction f définie sur un intervalle et au moins deux fois dérivable.

1. La fonction f est **convexe** (resp. **concave**) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$).
2. On obtient alors les trois inégalités suivantes :

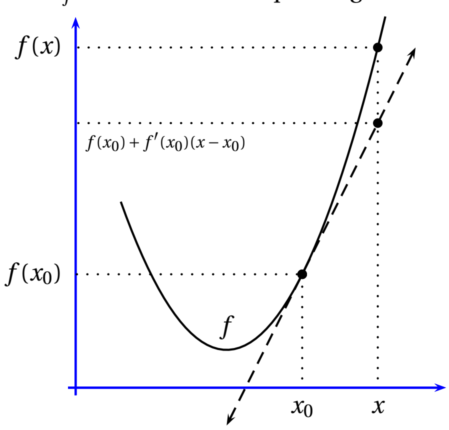
$\forall t \in [0,1]$, $\boxed{f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)}$

$\mathscr{C}_f$ en dessous de chaque sécante



$\forall x$, $\boxed{f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$

$\mathscr{C}_f$ au dessus de chaque tangente



1re A++ Généralisation : $\forall t_1,\dots,t_n \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$

(**inégalité de JENSEN**)

- ⇝ si f concave (équivaut à $-f$ convexe) : renverser le sens de toutes les inégalités .
- ⇝ *difficulté pratique :* reconnaître que l'égalité que l'on étudie est de l'un des types précédents, et pour quelle fonction f.
- ⇝ la première inégalité (qui ne nécessite pas que f soit deux fois dérivable) est la définition de la convexité ; les autres résultats sont des théorèmes qui en découlent.

EXEMPLES CLASSIQUES.

1. La fonction exp est convexe, donc au dessus de sa tangente en 0, soit : $\boxed{e^x \geqslant x+1}$.
2. Par concavité de ln on a de même : $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x.}$

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.25 À 1.26**

1.3 Tracer la courbe représentative d'une fonction

1^{re}A

1.3.1 Ce qu'il faut savoir sur la composée de fonctions

Soient trois fonctions $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T$,
i.e. telles que u (resp. v) est à valeurs dans l'ensemble où v (resp. w) est définie.

- **La définition :** $\boxed{\forall x \in X,\ (v\circ u)(x) \overset{\text{déf}}{=} v(u(x)).}$

⇝ cette formule définit bien une fonction $X \xrightarrow{v\circ u} Z$ (lire : « v rond u »), car elle donne sa valeur en tout point $x \in X$.

⚠ ne pas confondre « composée de » (*i.e.* résultat d'une composition) et « formée de » (plus général) — **confusion classique**. *Exemple :*
  - $x \mapsto \sin(x^2+1)$ est la composée de sin et $x \mapsto x^2+1$;
  - $x \mapsto \sin(x)+x^2+1$ est formée (par somme) à partir de sin et $x \mapsto x^2+1$.

⚠ **bien retenir que** les propriétés d'une composée $v\circ u$ (définition, régularité, monotonie, limit,e etc.) dépendent de celles de u et des $\boxed{\text{propriétés de } v \text{ sur } Y}$ (*i.e.* là où u prend ses valeurs) et non sur X — **erreur classique** — cf. 1.2.5, 1.3.2, 2.1.1, 2.1.14, 3.2.1.

- **Les propriétés de calcul :** $\boxed{w\circ(v\circ u) = (w\circ v)\circ u}$; $\boxed{u\circ \mathrm{Id}_X = u}$; $\boxed{\mathrm{Id}_Y \circ u = u.}$

1^{re}A

1.3.2 Trouver l'ensemble de définition d'une fonction f

Soient f, u, v trois fonctions.

$\boxed{\text{L'ensemble de définition } \mathscr{D}_f \text{ de } f \text{ est l'ensemble des } x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ est défini.}}$

- **Une somme/un produit** est défini si et seulement si les termes/facteurs le sont.
- **Pour une composée** $f(x) = u(v(x))$ **:** $\boxed{f \text{ est définie en } x \iff \begin{cases} v \text{ définie en } x \\ u \text{ définie } \underline{\text{en } v(x)} \end{cases}}$

⚠ la seconde condition n'est pas « u définie en x » — **confusion classique**.
⇝ penser à écrire le diagramme suivant pour s'en rappeler : $\mathscr{D}_v \xrightarrow{v} \mathscr{D}_u \xrightarrow{u} \mathbb{R}$.
Exemples :
  - si $f(x) = \ln(v(x))$, alors f est définie là où v est définie et strictement positive.
  - si $v(x) = \ln(-1-x)$ et $f(x) = \sqrt{v(x)}$, alors :

$$\mathscr{D}_v =]-\infty,-1[\quad \text{et} \quad \mathscr{D}_f = \{x<-1 \mid \ln(-1-x) \geqslant 0\} =]-\infty,-2].$$

- **Un quotient** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est défini si et seulement si :
  $u(x)$, $v(x)$ sont définis et le dénominateur $v(x)$ ne s'annule pas.

⚠ simplifier l'expression de f peut modifier $\mathscr{D}_f$ — **erreur classique**.
Exemple : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ pour $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$, mais $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ pour $g(x) = x$.

2^eA
- **En étudiant une convergence** lorsque $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ou $f(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$:

⇝ $f(x)$ est défini si et seulement la série/l'intégrale converge (cf. 5.2.11 et 4.3.12).

1^re^A

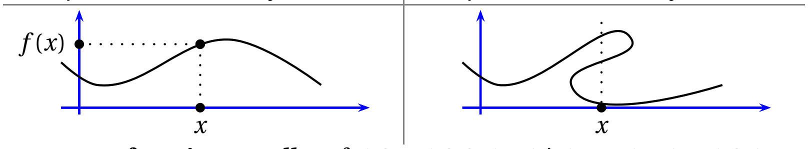
1.3.3 Tracer la courbe représentative d'une fonction f

Soit une fonction $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ avec $X \subset \mathbb{R}$. La **courbe représentative** de f, aussi appelé le **graphe** de f, est l'ensemble : $\boxed{\mathscr{C}_f \overset{\text{déf}}{=} \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.}$

⚠ en mathématiques, tracer une courbe ne consiste jamais à relier quelques points !

⚠ il y a un seul point au dessus de chaque abscisse x — **erreur classique** :

ceci est la courbe représentative d'une fonction	*ceci **n'est pas** la courbe représentative d'une fonction*



- **Savoir tracer une fonction usuelle :** cf. 1.3.4, 1.3.6, 1.5.1 à 1.5.5, 1.7.1 et 1.8.1.
- **La déduire géométriquement de celle d'une fonction usuelle :** cf. 1.3.5.
- **Par restriction/raccordement (fonction définie « par morceaux »)** : cf. 1.3.6.
- **Utiliser la parité, l'imparité ou la périodicité :** cf. 1.3.7.
- **Par étude de fonction**, lorsque les techniques précédentes sont inopérantes :
  1. tableau de variations avec valeurs ou limites aux bornes (cf. 1.2.5, 2.1.1) ;

  ⇝ vérifier la cohérence entre variations et limites (pas de « décroissance vers $+\infty$ »).

  ⚠ résoudre $f'(x) = 0$ ne suffit pas à déterminer le signe de f' — **erreur classique**.

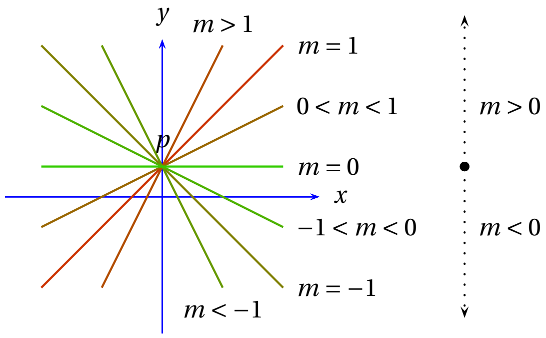
  2. étude des branches infinies éventuelles (cf. 1.3.8) ;
  3. si nécessaire : tangente en des points particuliers (cf. 1.3.9),
     position par rapport à une droite (cf. 1.3.10).

1^re^A

1.3.4 Tracer le graphe d'une fonction affine

Soit une fonction $x \overset{f}{\longmapsto} mx + p$ $(m, p \in \mathbb{R})$. Sa courbe représentative est une droite.

- **En utilisant m et p :** qui fournissent un point et la direction :
  - le nombre p est l'**ordonnée à l'origine** *i.e.* $(0, p) \in \mathscr{C}_f$.
  - le nombre m est la **pente**, ou **coefficient directeur** qui donne l'allure de la droite :



⚠ une droite verticale n'est pas le graphe d'une fonction.

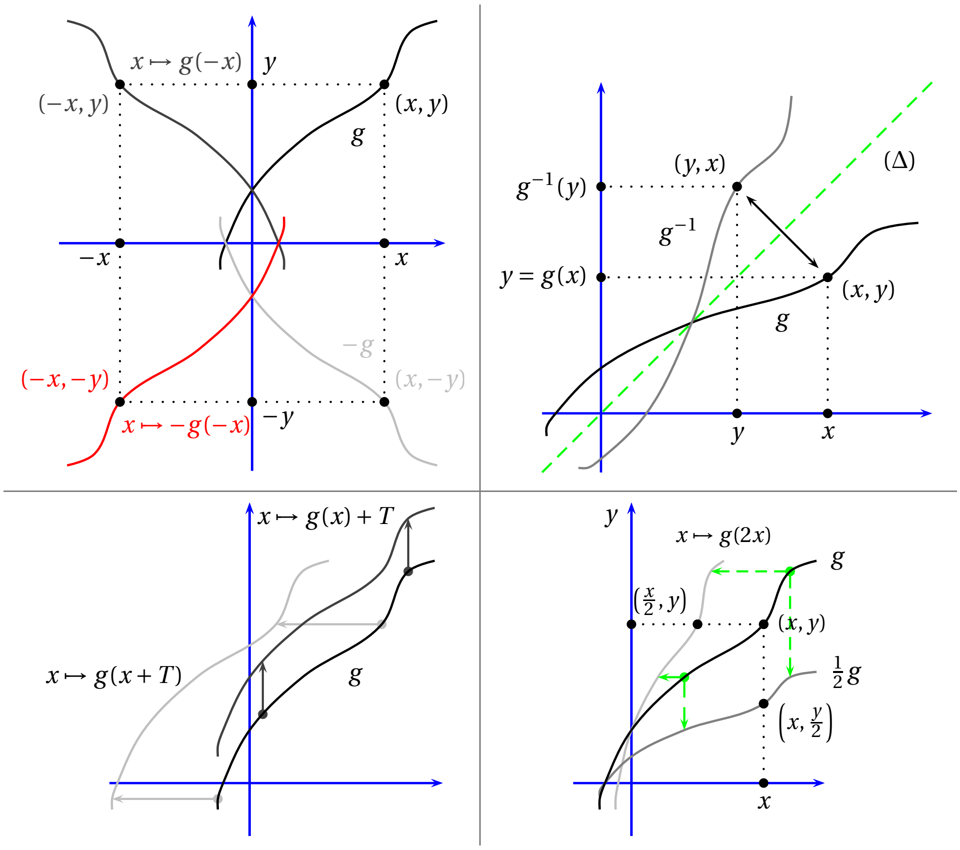
- **En reliant deux points.**

1reA

1.3.5 Obtenir la courbe de f à partir de celle de g

Soit $\mathbb{R} \supset \mathscr{D}_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(Oxy) = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de $\mathbb{R}^2$.
On a $\boxed{\mathscr{C}_f = s(\mathscr{C}_g)}$ dans les cas suivants ($T \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$) :

fonction f	*transformation géométrique s*
$x \mapsto g(-x)$	symétrie par rapport à l'axe (Oy)
$x \mapsto -g(x)$	symétrie par rapport à l'axe (Ox)
$x \mapsto -g(-x)$	symétrie de centre O
$x \mapsto g(x+T)$	translation horizontale de vecteur $-T\,\vec{i}$
$x \mapsto g(x)+T$	translation verticale de vecteur $T\,\vec{j}$
$x \mapsto \lambda g(x)$	affinité orthogonale de rapport λ parallèlement à (Oy)
$x \mapsto g(\lambda x)$	affinité orthogonale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ parallèlement à (Ox)
g^{-1} (g bij.)	symétrie par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$



✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.28**

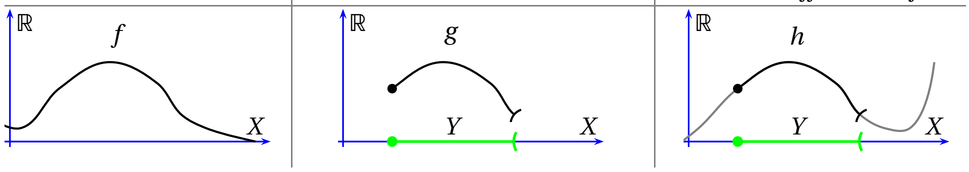
1^re^A

1.3.6 Tracer le graphe d'une fonction définie « par morceaux »

Soient deux fonctions $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, avec $Y \subset X$.
La fonction f est un **prolongement** de g sur X (si on part de g) — resp. g est la **restriction** de f à Y (si on part de f) — lorsque : $\boxed{\forall x \in Y,\ f(x) = g(x).}$

⚠ la restriction est unique, mais il y a plusieurs prolongements (cf. articles soulignés).
⇝ la restriction de f à Y est notée $f|_Y$

une fonction f	*la restriction $g = f|_Y$ de f à Y*	*un prolongement h de g sur X (différent de f)*



- **Tracé de la restriction** à Y d'une fonction f :

⇝ ne garder que les points dont l'abscisse appartient à Y.

- **Tracé d'une fonction définie par « morceaux »,** du type : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$

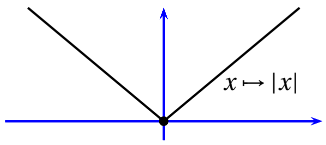
où f_1, f_2 sont deux fonctions et I_1 et I_2 des parties disjointes de $\mathbb{R}$.

⇝ la courbe de f est la réunion de : • la courbe de la restriction de f_1 à I_1 ;
• la courbe de la restriction de f_2 à I_2.

EXEMPLES FONDAMENTAUX À CONNAÎTRE. —

valeur absolue

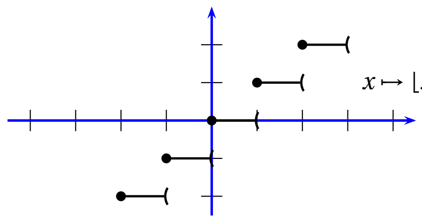
$$\boxed{|x| \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$



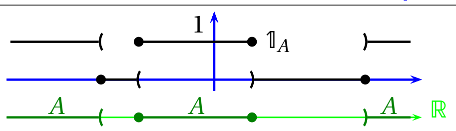
$|xy| = |x| \times |y|$,
$|x|^n = |x^n|$, $|x|^2 = x^2$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
$|x + y| \leqslant |x| + |y|$,

partie entière

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$
par ex. : $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ (et non « -3 »).



fonction caractéristique de A (avec $A \subset \mathbb{R}$)



$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}}$$

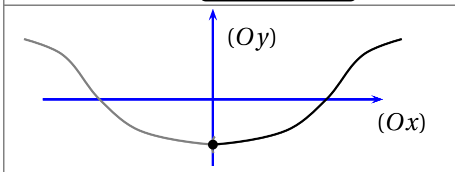
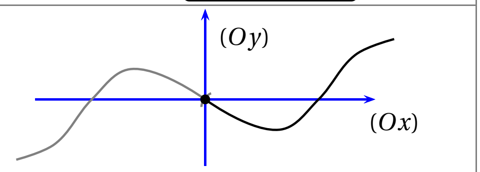
✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.29 À 1.31**

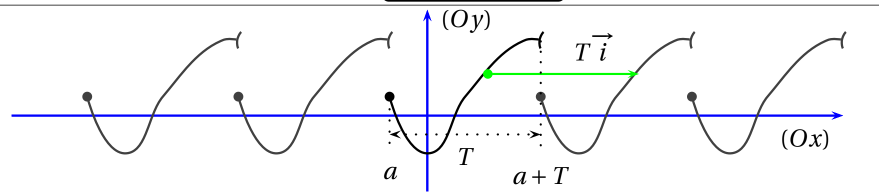
1reA

1.3.7 Utiliser la parité, l'imparité, la périodicité d'une fonction

Soit f une fonction d'une variable réelle. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.

- si f est définie sur $\mathbb{R}_+$, elle admet un unique prolongement sur $\mathbb{R}$ pair (resp. impair) ;
- si f est définie sur $[a, a+T[$, elle admet unique prolongement sur $\mathbb{R}$ T-périodique.
- **Utilisation pour un tracé (réduction du domaine d'étude)**

<table>
<tr><th>f fonction paire</th><th>f fonction impaire</th></tr>
<tr><td>$\forall x \in \mathscr{D}_f, \begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ \boxed{f(-x) = f(x)} \end{cases}$</td><td>$\forall x \in \mathscr{D}_f, \begin{cases} -x \in \mathscr{D}_f \\ \boxed{f(-x) = -f(x)} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Étude puis tracé sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$
puis symétrie d'axe (Oy)</td><td>Étude puis tracé sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis
symétrie de centre O — $f(0) = 0$ si $0 \in \mathscr{D}_f$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>f fonction périodique de période T $(T > 0)$</th></tr>
<tr><td>$\forall x \in \mathscr{D}_f, \begin{cases} x + T \in \mathscr{D}_f \\ \boxed{f(x+T) = f(x)} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>Étude puis tracé sur $\mathscr{D}_f \cap [a, a+T[$ puis translations par $nT\vec{i}$ $(n \in \mathbb{Z})$</td></tr>
</table>

⇝ si f est T-périodique, alors elle est $2T$-périodique.

- **Calcul sur les fonctions paires, impaires, périodiques** : beaucoup de résultats de calcul (somme, produit, composée, dérivée, primitive) sont vrais, mais certains sont faux.

⇝ inutile de les retenir car ceux qui sont vrais se retrouvent facilement à l'aide de la définition (par changement de variable $t = -x$ pour une primitive).

⚠ tout calcul à partir de fonctions paires (resp. impaires, resp. périodiques) n'en donne pas forcément une — **erreur classique**.

⚠ pour une fonction définie « par morceaux » (cf. 1.3.6), la parité ou l'imparité de f_1 ou f_2 ne dit rien sur celle de f en général — **erreur classique**.

⇝ la fonction f est T-périodique si et seulement la fonction g est 2π-périodique, où g est définie par : $f(t) = g(\omega t)$, avec $\omega \overset{\text{déf}}{=} \frac{2\pi}{T}$ (pulsation) — **important en physique**.

1reA+

- **Partie paire/impaire de f :** toute fonction f s'écrit de manière unique $f = p + i$, avec p paire et i impaire, données par $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

⚠ la fonction nulle est paire *et* impaire ; c'est la seule qui est ainsi.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.32 À 1.36**

××SI

1.3.8 Étudier les branches infinies d'une fonction f

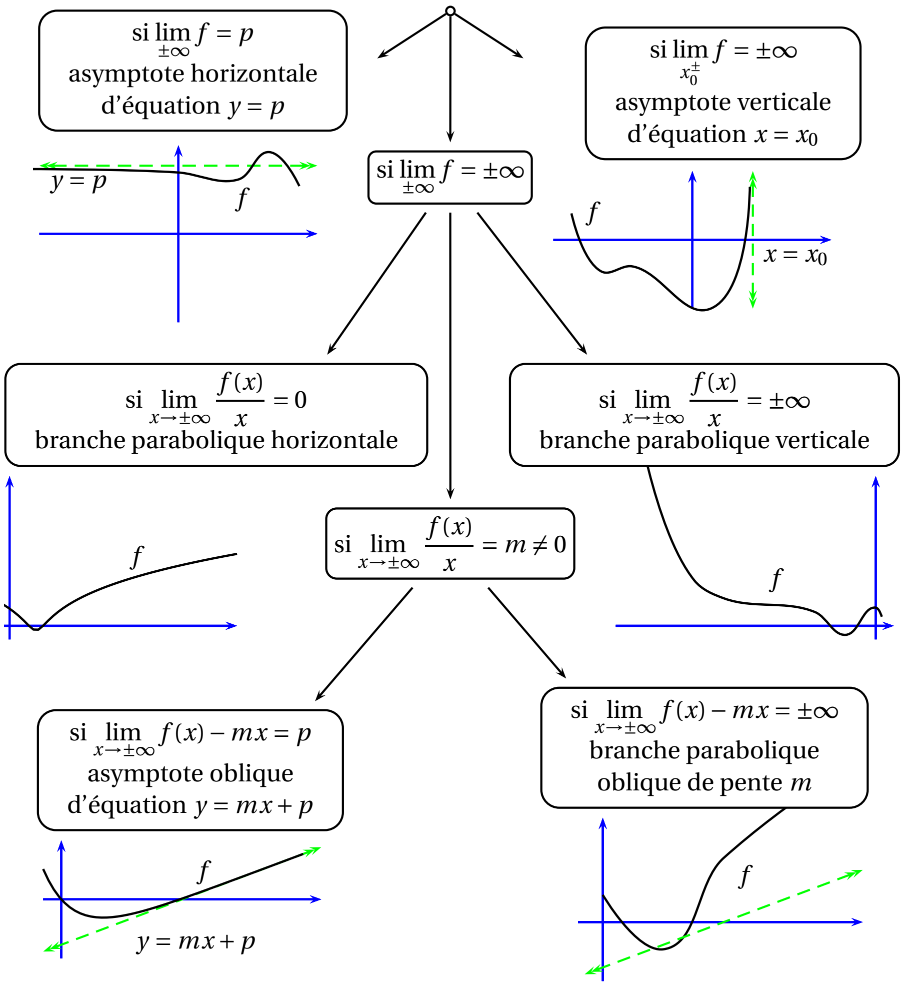
Une **branche infinie** de $\mathscr{C}_f$ est une partie de la courbe qui s'éloigne « infiniment » de l'origine. C'est notamment le cas lorsque : $\boxed{\lim_{\alpha} f = \beta \quad \text{avec } \alpha \in \{+\infty, -\infty\} \text{ ou } \beta \in \{+\infty, -\infty\}.}$

- **asymptote** : c'est une droite (notée ↞⟶↠ sur le dessin) dont toute demi-droites dans un sens donné est à distance nulle de la courbe (*i.e.* la courbe vient se « coller » d'un côté la droite — sans forcément avoir de point d'intersection).

⚠ ne pas confondre avec les tangentes (notées ←•→) — **confusion classique**.

- **branche parabolique** : notion mal définie géométriquement qui indique la ressemblance avec une branche de parabole ; définition précise ci-dessous en termes de limites.

L'étude se fait par calculs de limites (dont des formes indéterminées — cf. 2.1.9) :

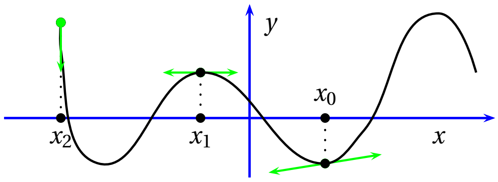


✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.37**

1reA **1.3.9** **Déterminer la tangente à une courbe représentative**

Si f est dérivable en x_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est la droite de pente $f'(x_0)$ passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$; *i.e.* elle a pour équation cartésienne :

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



- ⇝ la tangente est horizontale si la dérivée est nulle (point d'abscisse x_1).
- ⇝ si f est continue sur X (intervalle), dérivable sur $X - \{x_2\}$ et si $\lim\limits_{x_2} f' = \pm\infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale. *Exemple type :* $x \mapsto x^r$ $(r \in]0,1[)$ en $x_2 = 0$.
- ⇝ la tangente coupe la courbe (**point d'inflexion**) lorsque f'' s'annule et change de signe.

1reA **1.3.10** **Déterminer la position d'une courbe par rapport à une droite**

Soit une fonction $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la droite sous la forme : $y = mx + p$.
2. Étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - (mx + p)$ (cf. 1.2.4) :
   - si le signe est positif, alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite ;
   - si le signe est négatif, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.39**

Michel ROLLE (1652-1719) *France*

Brook TAYLOR (1685-1731) *Angleterre*

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) *Italie puis France*

Johan JENSEN (1859-1925) *Danemark*

1.4 Étudier si une fonction est injective, surjective, bijective

1reA* **1.4.1** **Savoir si un élément y possède des antécédents**

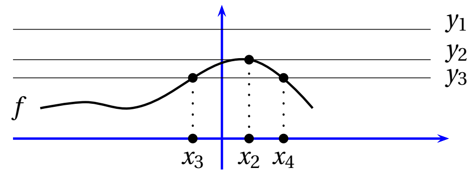
Soient deux ensembles X, Y et soit une fonction $X \xrightarrow{f} Y$. Soient $y \in Y$ et $x \in X$.

- **Par la définition** : on dit que y est <u>l'</u>**image** de x par f (si se place du point de vue de x) et que x est <u>un</u> **antécédent** de y par f (du point de vue de y) lorsque : $\boxed{y = f(x).}$

⚠ l'image est unique, mais y a zéro, un ou plusieurs antécédents (cf. articles soulignés).

⇝ trouver *tous* les antécédents de y c'est résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in X$.

- **Graphiquement** par intersection de la droite horizontale d'ordonnée y avec $\mathscr{C}_f$:



y_1 n'a pas d'antécédent
y_2 a un antécédent x_2
y_3 a deux antécédents x_3 et x_4

- **Par le théorème des valeurs intermédiaires** lorsque f est une fonction à valeurs réelles et continue sur un segment $[a, b]$, alors toute valeur k intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ (*i.e.* telle que $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant k \leqslant f(a)$) possède un antécédent $x \in [a, b]$.

⇝ en particulier si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors il existe au moins un réel $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$.

⚠ ne donne pas l'unicité de x — **confusion classique** avec le th. de la bijection (cf. 1.4.3).

1reA* **1.4.2** **Étudier si f est injective ou surjective**

Soient deux ensembles X, Y et soit une fonction $X \xrightarrow{f} Y$.

- **Par la définition** :

$$f \text{ injective} \overset{\text{déf}}{\iff} \boxed{\forall x, x' \in X,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\,;}$$

$$f \text{ surjective sur } Y \overset{\text{déf}}{\iff} \boxed{\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ f(x) = y.}$$

⚠ la surjectivité dépend de l'espace Y : toujours préciser « f surjective <u>sur Y</u> ».[3]

- **En étudiant l'équation** $f(x) = y$, afin de déterminer, pour chaque $y \in Y$, le nombre d'antécédents de qui appartiennent à X :

f injective	$\iff$	tout $y \in Y$ possède 0 ou 1 antécédent par f
f surjective sur Y	$\iff$	tout $y \in Y$ possède au moins 1 antécédent par f

⚠ l'injectivité n'est pas : « pour tout $x \in X$ il existe un unique $y \in Y$ tel que $y = f(x)$ » (toujours vrai pour une fonction) — **confusion classique** entre antécédent et image.

⚠ la surjectivité n'est pas : « toute image a un antécédent » — **confusion classique** entre image et élément de Y.

- **Par calcul** : f est injective (resp. surj.) si c'est la composée de fonctions inj. (resp. surj.).
- **Lorsque f est linéaire** (cf. 7.1.4) : $\boxed{f \text{ injective} \iff \ker f = \{0\}.}$
- *Plus rarement*, **en trouvant une autre fonction** :

$$f \text{ injective} \iff \text{il existe } Y \xrightarrow{g_1} X \text{ telle que } g_1 \circ f = \mathrm{Id}_X$$

$$f \text{ surjective sur } Y \iff \text{il existe } Y \xrightarrow{g_2} X \text{ telle que } f \circ g_2 = \mathrm{Id}_Y$$

EXEMPLES IMPORTANTS. — Toute fonction strictement monotone (cf. 1.2.3) est injective. Une fonction paire, ou périodique, n'est pas injective.

1reA* **1.4.3** **Montrer que f est bijective sans calculer f^{-1}**

- **Par la définition** : f est bijective lorsqu'elle est injective et surjective (cf. 1.4.2).
- **En étudiant l'équation** $f(x) = y$ d'inconnue $x \in X$ si, sans la résoudre, on sait compter le nombre de solutions : f est bijective lorsqu'il y a exactement une solution.

⚠ ne pas confondre avec « tout élément de X a une *image* et une seule » (vrai pour toute fonction) — **confusion classique**.

- **Par le théorème de la bijection** lorsque f est une fonction réelle d'une variable réelle :
  1. on vérifie et on écrit que f est **strictement monotone** ;
  2. on vérifie et on écrit que f est **continue sur** I ;
  3. on fait attention de se placer sur un intervalle I et on calcule les **limites ou les valeurs de f aux extrémités de** I pour former l'intervalle J (de même type — ouvert/fermé /semi-ouvert — que I) par :

	f croissante	f décroissante
$I = [a,b]$	$J = \left[f(a), f(b)\right]$	$J = \left[f(b), f(a)\right]$
$I = [a,b[$	$J = \left[f(a), \lim_b f\right[$	$J = \left]\lim_b f, f(a)\right]$
$I =]a,b]$	$J = \left]\lim_a f, f(b)\right]$	$J = \left[f(b), \lim_a f\right[$
$I =]a,b[$	$J = \left]\lim_a f, \lim_b f\right[$	$J = \left]\lim_b f, \lim_a f\right[$

Alors f est bijective de I sur[4] J, et (si nécessaire) on a :

- f^{-1} est **strictement monotone** sur J, de même sens que f,
- f^{-1} est **continue** sur l'intervalle J.
- **les limites/valeurs de f^{-1} aux extrémités de** J sont les extrémités de I,

Utilisation classique : si $0 \in J$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $x \in I$.

⚠ ne pas utiliser incorrectement la formulation du programme « f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$ » — **erreur classique** — c'est-à-dire :

1. affirmer que « f est bijective de I sur $f(I)$ » — vrai dès que f strict. monotone ;
2. affirmer *ensuite, indépendamment du théorème,* que « $f(I) = J$ » sans justification — ceci n'est vrai que d'après les trois conditions du théorème.
   Contre-exemples : $f(x) = x(1-x)$ sur $I = [0,1]$; $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ sur $I = [0,2[$.

- **Lorsque f est un endomorphisme** d'un espace vectoriel de dimension finie (cf. 7.3.10) :

$$\ker f = \{0\} \iff f \text{ injective } \iff f \text{ bijective } \iff \det f \neq 0.$$

MPSI PCSI PT

EXEMPLE. — La fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}$ définie par $c(x) = x^2$ n'est ni injective, ni surjective ;
sa restriction $\mathbb{R} \xrightarrow{c} \mathbb{R}_+$ est surjective non injective ;
sa restriction $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{c} \mathbb{R}$ est injective non surjective ;
sa restriction $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{c} \mathbb{R}_+$ est bijective (sa réciproque est la racine carrée $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{}} \mathbb{R}_+$).

3. à utiliser plutôt que « f surjective *dans* Y » — ici *sur* fait écho à *sur*jective ; cf. $\mathscr{M}$.2.2.

1reA*

1.4.4 Simultanément montrer que f est bijective <u>et</u> calculer f^{-1}

Soient deux ensembles X, Y et soit une fonction $X \xrightarrow{f} Y$.

⚠ ne pas évoquer f^{-1} *avant* de dire que f est bijective — **erreur classique** (cf. $\mathscr{M}$.2.4) ;

⇝ prendre l'habitude de dire systématiquement « f est bijective avec f^{-1} donnée par ... ».

⚠ ne pas confondre la réciproque de f avec l'inverse de f (*i.e.* $\frac{1}{f}$; quand elle existe).

- **Reconnaître une bijection usuelle dont la réciproque est connue :**

$$\mathbb{R} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+^* \quad \Big| \quad \mathbb{R}_+ \underset{\sqrt{}}{\overset{x\mapsto x^2}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+ \quad \Big| \quad , \quad \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\underset{\arctan}{\overset{\tan}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^* \underset{y\mapsto \frac{1}{y}}{\overset{x\mapsto \frac{1}{x}}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^*, \quad \Big| \quad , \quad \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \underset{\arcsin}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}} [-1,1] \quad \Big| \quad , \quad [0,\pi] \underset{\arccos}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}} [-1,1].$$

- **En résolvant (ou en étudiant) l'équation** $f(x) = y$, d'inconnue $x \in X$:
  1. f est bijective de X sur Y s'il y a une unique solution $x \in X$ pour chaque $y \in Y$;
  2. alors, la fonction $y \mapsto x$ est f^{-1}.

⇝ en particulier, si f est bijective, on a : $\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).}$

- **En reconnaissant** f^{-1}. Si l'on trouve $Y \xrightarrow{g} X$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ *i.e.* :
$$\forall x \in X, \boxed{g(f(x)) = x} \quad \text{et} \quad \forall y \in Y, \boxed{f(g(y)) = y}.$$
alors f est bijective **et** $g = f^{-1}$.

⚠ inutile de justifier avant que f est bijective — **maladresse classique**.

⇝ si f est bijective et si $Y \xrightarrow{g} X$ vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ (ou $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$), alors $f^{-1} = g$.

⚠ on peut avoir $f^{-1}(f(x)) \neq x$ lorsque f^{-1} est la réciproque *d'une restriction* de f et que x n'appartient pas à l'intervalle auquel on a restreint — **erreur classique** — en particulier :

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \;\; \left(\sqrt{x^2} \neq x \text{ si } x < 0\right) \qquad \text{et} \qquad \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2} \end{cases} \quad \cdots$$

⇝ toujours réfléchir avant de simplifier $\sqrt{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)^2$, $\sin(\arcsin x)$ ou $\arcsin(\sin x), \ldots$

- **Par le calcul** : si $f = u \circ v$ où u et v sont des bijections, alors f est une bijection et :
$$f^{-1} = \boxed{(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}.}$$

⚠ la somme/le produit de fonctions bijectives ne l'est pas forcément — **erreur classique**. *Contre-exemple :* $u(x) = x$ et $v(x) = -x$ (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

- **Par raccordement :** si f est bijective de X_1 sur Y_1 et de X_2 sur Y_2, avec X_1, X_2 (resp. Y_1, Y_2) disjoints, alors f est bij. de $X_1 \cup X_2$ sur $Y_1 \cup Y_2$, et f^{-1} est donnée par $\left(f^{-1}\right)_{|Y_i} = (f_{|Y_i})^{-1}$.

EXEMPLES CLASSIQUES.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ donnés, $x \mapsto ax + b$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $y \mapsto \frac{1}{a}(y - b)$.
2. Quand $X = Y$, alors $f \circ f = \mathrm{Id}_X$ si et seulement si f bijective avec $f^{-1} = f$;
   on dit alors que f est une **involution** de X, ou que f est **involutive**.
3. La réciproque d'une bijection impaire est impaire.
   En effet f impaire si et seulement si $f \circ i = i \circ f$, avec i définie par $i(x) = -x$ (involutive).
4. Les homographies : cf. 1.8.1.

1reA* **1.4.5** **Déterminer $f(X)$ (image directe de X par f)**

Soient trois ensembles $X \subset \widetilde{X}, Y$ et soit une fonction $\widetilde{X} \xrightarrow{f} Y$. L'**image** de X par f est l'ensemble des $y \in Y$ qui possèdent au moins un antécédent appartenant à X *i.e.* :

$$\boxed{f(X) \overset{\text{déf}}{=} \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}.}$$

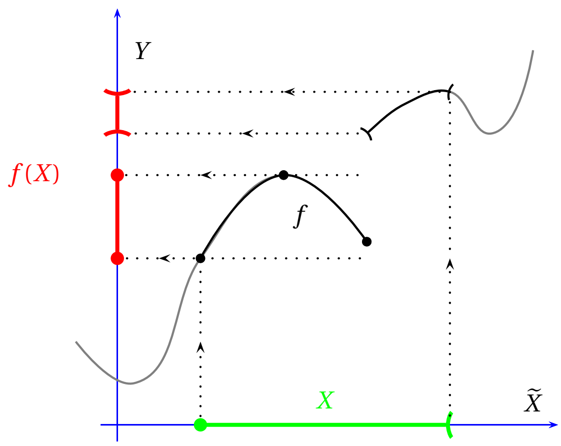
⇝ on utilise aussi la notation suivante pour $f(X)$:
$\boxed{\{f(x) \mid x \in X\}}$ « ensemble des éléments de la forme $f(x)$ quand x parcourt X ».

⚠ si f est à valeurs dans Y, on n'a pas forcément « $f(X) = Y$ »,
mais seulement $f(X) \subset Y$ — **confusion classique**.

- **En résolvant l'équation** $f(x) = y$, d'inconnue $x \in X$:
l'ensemble des éléments $y \in Y$ tels que l'équation a au moins une solution est $f(X)$.

⇝ donc f est toujours surjective de X sur $f(X)$.

- **Graphiquement**. L'ensemble $f(X)$ est l'ensemble des ordonnées des points de la courbe de f qui ont une abscisse dans X :



- **Par étude de fonction** (lorsque $X, Y \subset \mathbb{R}$) :
  1. déterminer le tableau de variations de f avec les valeurs ou limites aux bornes ;
  2. appliquer le théorème de la bijection (cf. 1.4.3) sur chaque intervalle I_i où f est strictement monotone ;
  3. conclure par réunion : $X = I_1 \cup \cdots \cup I_n \implies f(X) = f(I_1) \cup \cdots \cup f(I_n)$.

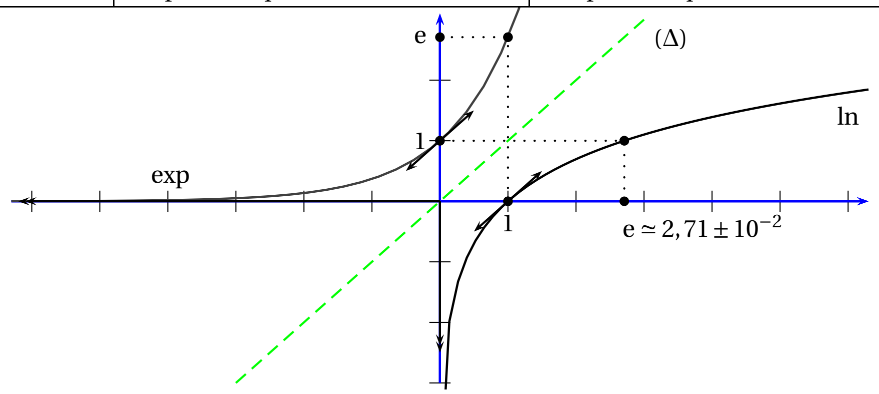
⚠ En général, on n'a pas « $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) » — **erreur classique** ;
mais c'est vrai si f est strictement monotone continue (f affine, $f = \exp$, $f = \ln \ldots$).

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.40 À 1.47**

1.5 Ce qu'il faut connaître sur les fonctions usuelles

1$^{\text{re}}$A **1.5.1** **Exponentielle et logarithme népérien**

- **Définitions usuelles équivalentes[5] de la fonction exponentielle $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_+^*$:**
  - c'est l'unique fonction dérivable $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$;
  - 1$^{\text{re}}$A$^+$ unique fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que : $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \,; \end{cases}$
  - 2$^{\text{e}}$A c'est la somme d'une série entière convergente (cf. 5.2.8, 5.4.6) : $\mathrm{e}^x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$;
  - 1$^{\text{re}}$A$^+$ *plus rare :* $\mathrm{e}^x \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- **Définitions usuelles équivalentes de la fonction logarithme $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$:**
  - primitive qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x > 0,\ \ln x \overset{\text{déf}}{=} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$;
  - réciproque de la fonction exponentielle $\mathbb{R} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+^*$ *i.e.* : $\mathrm{e}^x = y \iff \begin{cases} y > 0 \\ x = \ln y. \end{cases}$

fonctions	**logarithme**	**exponentielle**
notations	$\ln$	$\exp,\ x \mapsto \mathrm{e}^x$
définie sur	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$
dérivée	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\exp' = \exp$
branches infinies	asymptote verticale $x = 0$ en 0^+ br. parabolique horizontale en $+\infty$	asympt. horizontale $y = 0$ en $-\infty$ br. parabolique verticale en $+\infty$
		
propriétés algébriques	$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$	$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ $(\mathrm{e}^x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha x}$

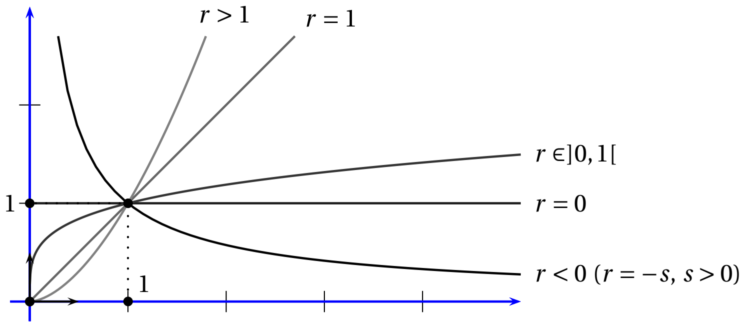
✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.48 À 1.49**

5. Les équivalences ne sont pas du tout faciles et mériteraient un chapitre de cours à elles seules. Voir par exemple : *Analyse Mathématique I*, Roger GODEMENT, Springer 2001, chap. IV.

1reA **1.5.2** **Puissances**

- **Définition**. Pour tout $x > 0$ et tout $r \in \mathbb{R}$ on définit : $\boxed{x^r \overset{\text{déf}}{=} e^{r \ln x}}$.

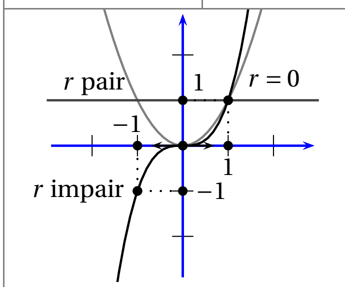
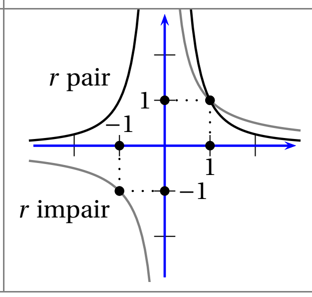
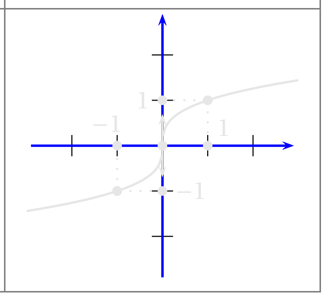
fonctions	**puissances**		
	$x \mapsto x^r \quad (r > 1)$	$x \mapsto x^r \quad (0 < r < 1)$	$x \mapsto x^r = \dfrac{1}{x^s}$ $(r = -s\,;\, s > 0)$
définie sur	$\mathbb{R}_+$ (prol. par continuité en 0 : $0^r \overset{\text{déf}}{=} 0$)		$\mathbb{R}_+^*$
branches infinies	branche parabolique verticale en $+\infty$	branche parabolique horizontale en $+\infty$	deux asymptotes : • horiz. $(y = 0)$ en $+\infty$ • vert. $(x = 0)$ en 0^+
dérivée	$x \mapsto r\,x^{r-1}$		



prop. alg.	$x^r x^t = x^{r+t}$	$(x^r)^t = x^{rt}$	$x^r y^r = (xy)^r$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

⚠ en général $x^{(r^t)} \neq (x^r)^t$ — **erreur classique**.

- **Extension de la définition dans quelques cas particuliers** :

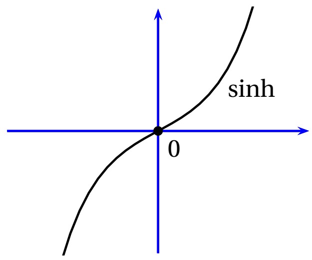
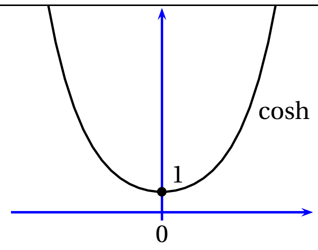
si $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$	si $r = 0$ et $x \in \mathbb{R}$	si $r \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$	si $r = \frac{1}{2p+1}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $x < 0$
$x^r \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{x \times \cdots \times x}_{r \text{ fois}}$	$x^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$	$x^r \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{\frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{(-r) \text{ fois}}$	$\sqrt[2p+1]{x} \overset{\text{déf}}{=} -\lvert x\rvert^{\frac{1}{2p+1}}$
			

⇝ l'expression $\sqrt[2p+1]{x} = -|x|^{\frac{1}{2p+1}}$ pour $x < 0$ est l'expression sur $\mathbb{R}_-^*$ de la réciproque de la fonction $x \mapsto x^{2p+1}$ (qui est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et impaire).

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.50 À 1.51**

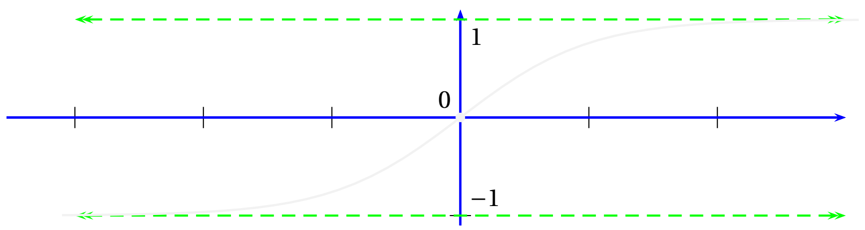
××SI

1.5.3 Fonctions de la trigonométrie hyperbolique

fonctions	**sinus hyperbolique**	**cosinus hyperbolique**
notations	sinh	cosh
définie par	$\sinh x \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	impaire	paire
branches infinies	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$	branches paraboliques verticales en $-\infty$ et en $+\infty$
dérivée	$\sinh' = \cosh$	$\cosh' = \sinh$
		
prop. alg.	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	

MPSI

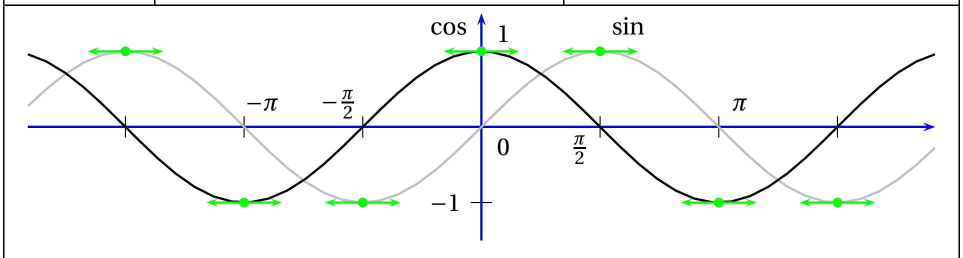
fonction	**tangente hyperbolique**
notation	th
définie par	$\operatorname{th} x \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
définie sur	$\mathbb{R}$
symétries	impaire
dérivée	$\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\cosh^2}$
branches infinies	asymptotes horizontales $y = 1$ en $+\infty$ $y = -1$ en $-\infty$



1reA

1.5.4 Fonctions de la trigonométrie circulaire

fonctions	**sinus**	**cosinus**
notations	sin	cos
définie par	$\sin x \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos x \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
symétries	périodiques de période 2π	
	impaire	paire
dérivée	$\sin' = \cos$	$\cos' = -\sin$

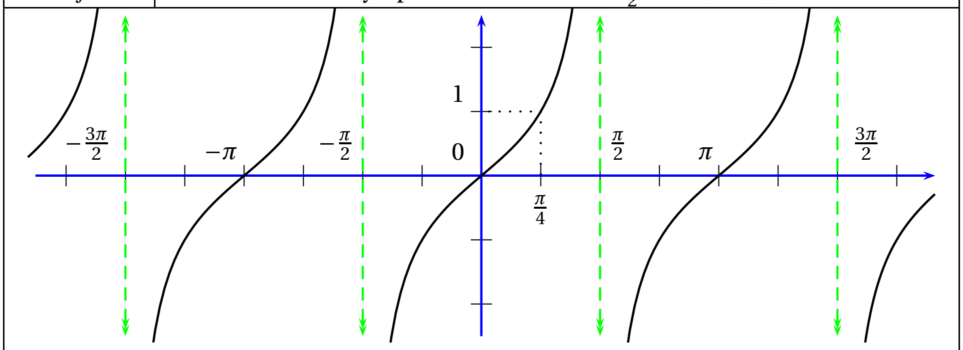


prop. alg.	formules de trigonométrie cf. 1.6.6

1reA

ECG1 +

fonction	**tangente**
déf. et not.	$\tan \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\sin}{\cos}$
définie sur	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
symétries	période π
	impaire
dérivée	$\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
br. infinies	asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$



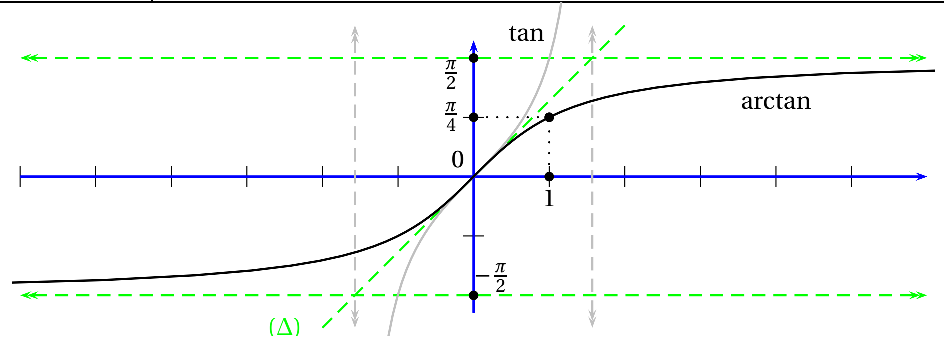
prop. alg.	formules de trigonométrie cf. 1.6.7

• **Valeurs particulières :** cf. 1.6.3.

ECG$_1$
××SI

1.5.5 Fonctions réciproques de la trigonométrie circulaire

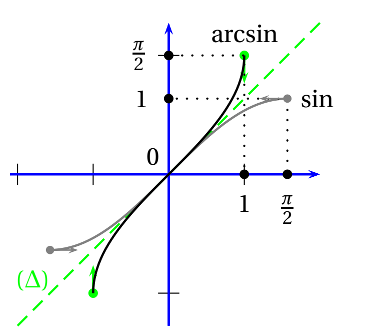
fonction	**arctangente** (arctan)
définie par	réciproque de la restriction $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\xrightarrow{\tan} \mathbb{R}$
définie sur	$\mathbb{R}$
symétries	impaire
dérivée	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
br. infinies	asymptotes horizontales $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$

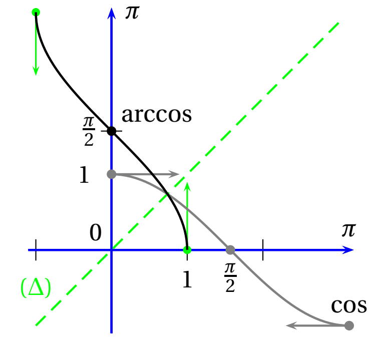


prop. alg.	$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan y) = y$

××SI

fonctions	**arcsinus** (arcsin)	**arccosinus** (arccos)
définie par	réciproque de la restriction $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\sin} [-1,1]$	réciproque de la restriction $[0,\pi] \xrightarrow{\cos} [-1,1]$
définie sur	$[-1,1]$	$[-1,1]$
symétries	impaire	—
dérivée sur $]-1,1[$	$\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$





prop. alg.	$\forall y \in [-1,1], \sin(\arcsin y) = y = \cos(\arccos y)$ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$

1.6 Trigonométrie circulaire et nombres complexes

1reA

1.6.1 Calculer avec des nombres complexes sous forme algébrique

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous **forme algébrique** :

$$\boxed{z = x + \mathrm{i}y, \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}.}$$

- **Opérations sous forme algébrique**, où $x, x', y, y', \lambda \in \mathbb{R}$:

$(x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y') \overset{\text{déf}}{=} (x+x')+\mathrm{i}(y+y')$	$(x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y') \overset{\text{déf}}{=} (xx'-yy')+\mathrm{i}(xy'+x'y)$
$\lambda(x+\mathrm{i}y) = (\lambda x)+\mathrm{i}(\lambda y)$	$\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y} = \dfrac{1}{x^2+y^2}(x-\mathrm{i}y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$

- **Calculer la partie réelle, la partie imaginaire ou le conjugué** de $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\boxed{\mathrm{Re}\,(z) \overset{\text{déf}}{=} x,} \quad \boxed{\mathrm{Im}\,(z) \overset{\text{déf}}{=} y} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{z} \overset{\text{déf}}{=} x - \mathrm{i}y.}$$

⇝ on en déduit : $\boxed{z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z),}$ $\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}).}$

⇝ les fonctions Im, Re et $z \mapsto \overline{z}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires *i.e.* :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{Re}\,(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}\,(z) \\ \mathrm{Im}\,(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}\,(z) \\ \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Re}\,(z+z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z') \\ \mathrm{Im}\,(z+z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z') \\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \end{cases}$$

⚠ ces formules sont fausses avec $\lambda \in \mathbb{C}$ — **erreur classique**.

⇝ propriétés supplémentaires pour $z \mapsto \overline{z}$: $\boxed{\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.}$

⚠ formules analogues fausses avec la partie réelle ou imaginaire — **erreur classique**.

- **Caractériser les réels ou les imaginaires purs** :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff \boxed{z = \overline{z}.} \quad \text{et} \quad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(z) = 0 \iff \boxed{z = -\overline{z}.}$$

- **Calculer le module** : $\boxed{|z| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{x^2+y^2}}$ si $z = x + \mathrm{i}y$.
  - *Relation, avec la conjugaison* : $\boxed{|z|^2 = z\overline{z},}$ et donc $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$ lorsque $z \neq 0$.
  - *Module d'un produit* : $\boxed{|zz'| = |z| \times |z'|,}$ et en particulier :

$$\boxed{\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1} \text{ } i.e. \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \text{ lorsque } z \neq 0.}$$

  - *Inégalité triangulaire* : $\boxed{|z+z'| \leqslant |z| + |z'|.}$

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.52**

1reA

1.6.2 Ce qu'il faut connaître sur l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

- **Ses valeurs particulières** : cf. 1.6.3.
- **Les propriétés fondamentales suivantes très importantes en pratique** :
  - c'est à valeurs dans $\mathbb{U}$ (nombres complexes de module 1) *i.e.* $\boxed{|e^{i\theta}| = 1.}$
  - ⚠ pas d'affirmation « $e^{i\theta} > 1$ » ou « $e^{i\theta} < 1$ » — **non sens classique**.
  - $\boxed{e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi}$ — noté « $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ » (en ××SI).
  - ⚠ éviter la notation $\theta = \varphi\ [2\pi]$ (« modulo 2π ») — **erreurs de calculs** quand on divise.
  - $\boxed{e^{i0} = 1}$ $\boxed{\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}}$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$ $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
  - pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre $e^{i\theta} = x + iy$ vérifie $x, y > 0$.

××SI

- **Son prolongement** $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ **défini par** : $\boxed{e^z = e^{x+iy} \overset{\text{déf}}{=} e^x(\cos y + i \sin y).}$

$\rightsquigarrow$ on a alors : $\boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}.}$

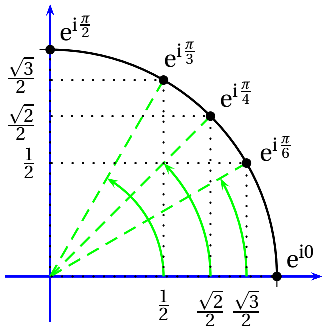
1reA++ ou 2eA++

- **Les définitions suivantes de $\theta \mapsto e^{i\theta}$ ne sont pas très utiles en pratique** :
  - c'est l'unique fonction dérivable $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ telle que : $f' = if$ et $f(0) = 1$;
  - c'est l'unique $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ dérivable en 0 telle que : $\begin{cases} f'(0) = i \\ \forall \theta, \varphi \in \mathbb{R},\ f(\theta+\varphi) = f(\theta)f(\varphi)\,; \end{cases}$
  - c'est la somme d'une série entière convergente (cf. 5.4.6) : $e^{i\theta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$.

1reA

1.6.3 Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$
$e^{i\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	i	-1	$(-1)^n$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$(-1)^n$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	0



$\rightsquigarrow$ on en déduit tout de suite :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$x<0$
$\arctan x$	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\arctan(-x)$
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$-\arcsin(-x)$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0		$\pi - \arccos(-x)$

~~ECGT~~
~~ECGT~~

1reA

1.6.4 Calculer la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z \neq 0$

- **Par la définition :** en reconnaissant une écriture $\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ avec } r > 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

⚠ ne pas oublier la condition $r > 0$ — **erreur classique**.

⚠ il n'y a pas de méthode générale pour calculer θ à partir de $r = \frac{z}{|z|}$ — **maladresse classique** — mais il faut savoir le faire dans les cas particuliers qui suivent.

- **Dans le cas particulier où** $z \in \{0,\ 1,\ \mathrm{i},\ 1 \pm \mathrm{i},\ \sqrt{3} \pm \mathrm{i},\ 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\}$ **(à un facteur réel près) :**
  - reconnaitre un multiple d'une des valeurs particulière de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ données dans 1.6.3 ;
  - sinon le déduire d'une de ces valeurs par les relations : $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$.
- **Par la formule de l'angle moitié pour z de la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:**
  1. si $\varphi = 0$, factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$;
     sinon factoriser d'abord par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ pour se ramener au cas précédent ;
  2. utiliser les formules d'EULER : $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} = 2\cos\beta}$ et $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} = 2\mathrm{i}\sin\beta\,;}$
  3. si nécessaire, se ramener au cas où le facteur réel est positif en utilisant $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
- **Par calcul (quotients, puissances, produits) :**

$$\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}, \qquad \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \qquad \prod_{k=1}^{n} r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\theta_k}.$$

⇝ reste vrai, et intéressant, même si r, r' ou r_k sont négatifs.

⇝ pour les sommes ou les combinaisons linéaires : utiliser plutôt la forme algébrique.

- **Parfois, par unicité de la forme trigonométrique :**

$$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff r = r' \text{ et } \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi\right), \quad \text{si } r, r' > 0.}$$

⇝ le réel θ s'appelle *un* **argument** du nombre complexe $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

⚠ il n'y a pas unicité de l'argument ; éviter la notation « $\arg z$ » — **maladresse classique**.

EXEMPLE COMPLET. — Mise sous forme trigonométrique de $z = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{(2-2\mathrm{i})^3}$ $(\theta \in]0, \pi[)$.

$$2 - 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2}\overline{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \text{(valeur particulière)}$$

$$\begin{aligned}
\text{et : } 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} &= 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\\
&= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{3})} + 1\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}\right) \quad \text{(angle moitié)}\\
&= 4\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} \quad \text{(formules d'EULER)}
\end{aligned}$$

$$\text{d'où : } z = \frac{4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}{\left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{2^2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{4\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{11\pi}{12}\right)},$$

où $\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) > 0$, car $\theta \in]0, \pi[$ et $\cos > 0$ sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[$.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.54 À 1.54**

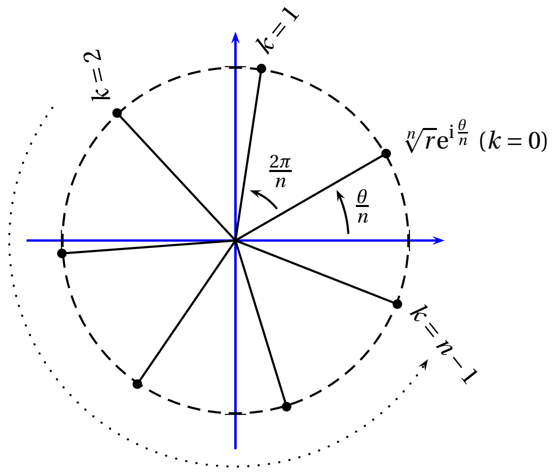
++
ECG1
××**SI**

1.6.5 Résoudre l'équation $z^n = a$

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donnés. On cherche les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation.

- **Cas** $a = 0$: de manière évidente, il y a une seule solution $z = 0$.
- **Cas générique où** $a \neq 0$:
  1. on met a sous forme trigonométrique : $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ — cf. 1.6.4.
  2. alors il exactement n **solutions** distinctes qui se déduisent de la solution évidente $z = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ (ou de toute autre solution) par multiplication par une racine n-ième de l'unité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, à savoir :

$$\boxed{z^n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.}$$



$\rightsquigarrow$ on peut remplacer $[\![0, n-1]\!]$ par tout autre ensemble de n entiers consécutifs.

ECG1 +
MPSI
PCSI
TPC1

- **Cas particulier où** $n = 2$ (autre méthode) en posant $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z = x + \mathrm{i}y$:
  1. traduire l'égalité $z^2 = a$ en $x^2 - y^2 = \alpha$, $2xy = \beta$;
  2. penser aussi à $|z|^2 = |a|$ qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$;
  3. en déduire x^2 et y^2 puis x et y au signe près, d'où 4 solutions possibles pour z ;
  4. la condition $2xy = \beta$ contraint les signes de x et y, d'où les 2 solutions opposées pour z.

⚠ les solutions de $z^2 = a$ s'appellent les **racines carrées** de a ; ne pas parler en général de « la racine carrée de a » ni de « $\sqrt{a}$ » ; cela n'a de sens que lorsque $a \geqslant 0$ parce qu'alors l'une des deux racines est réelle *positive*, ce qui permet de la distinguer de l'autre racine — **non sens classique**.

1reA++

$\rightsquigarrow$ on peut aussi vérifier directement que $z = \pm\dfrac{a + |a|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(a) + |a|)}}$ convient (si $a \notin \mathbb{R}_-$).

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.55 À 1.57**

1reA

1.6.6 Formules de trigonométrie : que retenir et comment ?

- **Apprendre les formules** et les revoir régulièrement.

$\rightsquigarrow$ elle finiront bien par rentrer...

- **Retenir d'où elles viennent**, notamment des formules de calcul dans $\mathbb{C}$ (cf. 1.6.1) et de celles sur $e^{i\theta}$ (cf. 1.6.2).

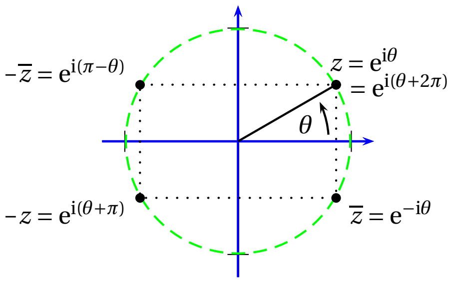
formule à connaître	*d'où elle vient* ($z = x + iy = e^{i\theta}$)
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\boxed{\implies \sin\theta, \cos\theta \in [-1,1]}$	$\lvert z\rvert = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$
$\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$ **formules d'EULER**	$\frac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\,(z) = \cos\theta$ $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}\,(z) = \sin\theta$
$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$ $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta$ **formules d'addition des angles**	$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi} = zz'$ $= xx' - yy' + i(xy' + yx')$
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ **formules de duplication d'un angle**	f. d'addition avec $\varphi = \theta$ et $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (pour $\cos 2\theta$)
$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ **formule de MOIVRE**	$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

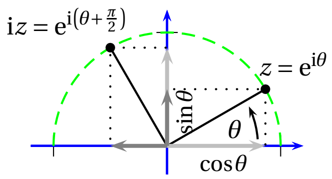
$\rightsquigarrow$ la formule de MOIVRE, historique, est peu utile en pratique.

××SI ⚠ ne pas confondre les formules d'EULER avec celles qui définissent sinh et cosh (cf. 1.5.3) — **confusion classique**.

- **Utiliser des dessins** :

formules à connaître	
$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$	$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$
sin,cos sont 2π-**périodiques**	
$\cos(-\theta) = \cos\theta$ cos est **paire**	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ sin est **impaire**
$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$	$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$	$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$





- **Combiner les formules** : remplacer φ par $-\varphi$ dans les formules d'addition et utiliser l'imparité/parité de sin/cos donne des formules pour $\cos(\theta - \varphi)$ et $\sin(\theta - \varphi)$.

MPSI P×SI*

1.6.7 Formules de trigonométrie supplémentaires

- **Formules pour tangente** :

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$	$\tan(\theta+\varphi) = \dfrac{\tan\theta+\tan\varphi}{1-\tan\theta\tan\varphi}$ formule d'addition des angles	si $\theta,\varphi,\theta+\varphi \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$ tan π-**périodique**	$\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ formule de duplication d'un angle	
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ tan **impaire**	$\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$ **paramétrage rationnel du cercle**	

⇝ formule d'addition d'après celles pour sin et cos, en divisant tout par $\cos\theta\cos\varphi$.

- **Produit de deux cosinus ou sinus** : $\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi))$
$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{1}{2}(\cos(\theta+\varphi)-\cos(\theta-\varphi))$
$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi))$.

⇝ par linéarisation (cf. 1.6.10) ou combiner les formules d'addition et de soustraction.

- **Somme de deux cosinus, de deux sinus** :

$$\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p-\sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

⇝ en utilisant que $p = \frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}$ dans les formules de produit.

1reA+
- **Savoir calculer** $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ **ou** $\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$: utiliser les formules d'EULER et la formule de somme des termes d'une suite géométrique (cf. 1.1.3) avec les raisons $e^{i\theta}$ puis $e^{-i\theta}$.

××SI

1.6.8 Établir des relations sur les fonctions trigo. réciproques

- **Par la définition** :
à partir des fonctions directes et des relations algébriques qu'elles vérifient.
- **En dérivant** (cf. 3.3.1).

⚠ ne pas oublier que si $f' = g'$, alors $f = g+C$
(C constante à calculer en prenant la valeur ou la limite de f et g au même point).

⚠ ne pas oublier de se placer sur un intervalle
(sinon il y a une constante différente par intervalle).

EXEMPLES CLASSIQUES. —

$$\arctan x+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad \forall x\in[-1,1],\ \arcsin x+\arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.58 À 1.64**

1reA **1.6.9** **Transformer $A\cos t + B\sin t \quad ((A,B)\in\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$**

1. Comme $|A+\mathrm{i}B| = \sqrt{A^2+B^2}$, il existe $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $A+\mathrm{i}B = \sqrt{A^2+B^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (cf. 1.6.4), soit : $A = \sqrt{A^2+B^2}\cos\varphi$ et $B = \sqrt{A^2+B^2}\sin\varphi$.
2. Une f. d'addition (cf. 1.6.6), donne ainsi : $\boxed{A\cos t + B\sin t = \sqrt{A^2+B^2}\cos(t-\varphi).}$

EXEMPLE. — $\cos t + \sqrt{3}\sin t = 2\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$, car $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1reA **1.6.10** **Linéariser une expression trigonométrique**

Linéariser une expression trigonométrique, quand c'est possible, c'est l'exprimer comme combinaison linéaire de plusieurs sinus et cosinus, en général sous la forme :

$$a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + b_2\sin 2t + \cdots + a_n\cos nt + b_n\sin nt \qquad (a_i, b_i\in\mathbb{R}).$$

Remarque théorique non indispensable au calcul : les a_i, b_i sont uniques (cf. 8.1.8).

- **À l'aide des formules de trigonométrie** :
  il n'y a pas de méthode systématique, mais cela aboutit dans les cas simples.
- **En utilisant des exponentielles complexes** :
  1. Exprimer tous les sinus et les cosinus à l'aide d'exponentielles (formules d'EULER).
  2. Développer complètement tous les produits et les puissances pour obtenir une combinaison linéaire d'exponentielles.
  3. Regrouper les exponentielles d'exposants opposés pour faire apparaître des sinus ou des cosinus (formules d'EULER à l'envers) ;

  ⚠ ne pas oublier le facteur 2 ou 2i — **erreur de calcul fréquente**.

⇝ pour vérifier le calcul penser à comparer la parité ou la valeur en 0 du résultat et celle de l'expression de départ.

EXEMPLES.

1. Linéarisation $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(\cos 2t + 1)$, d'après la formule de duplication $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$.
2. *Linéarisation de* $\cos^6 t$:

$$\begin{aligned}
\cos^6 t &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^6 \qquad \text{d'après les formules d'EULER}\\
&= \frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t} + 6\mathrm{e}^{5\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + 15\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + 20\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + 15\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}t}\right)\\
&\quad \text{d'après la formule du binôme}\\
&= \frac{1}{2^6}\left((\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}t}) + 6(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}) + 15(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}) + 20\right)\\
&= \frac{1}{2^6}(2\cos 6t + 12\cos 4t + 30\cos 2t + 20) \qquad \text{d'après les formules d'EULER}
\end{aligned}$$

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.65 À 1.70**

1^reA

1.6.11 Résoudre une (in)équation trigonométrique

C'est une (in)équation où l'inconnue θ apparaît uniquement sous la forme $\cos\theta$, $\sin\theta$ (parfois $\tan\theta$).

1. Traduire l'équation ou l'inéquation en problème d'inconnue $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
2. Résoudre le problème dans $\mathbb{U}$, à l'aide d'un dessin.
3. Déduire les solutions $\theta \in \mathbb{R}$ à partir des solutions $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, en « faisant rouler le cercle trigonométrique sur la droite $\mathbb{R}$ ».

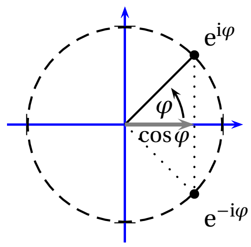
⚠ ne pas confondre les réels et les angles (réels modulo 2π) — **confusion fréquente**.

4. Si possible, simplifier les familles de solutions à l'aide d'un dessin.
Exemple classique : $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Autre méthode : se ramener à une inéquation $\sin\theta \leqslant k$ et résoudre à l'aide du tracé de la fonction sin (ou avec cos, tan ou $\geqslant, >, <$).

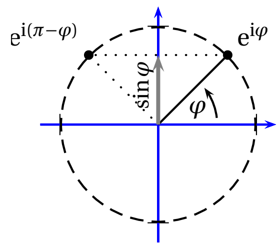
EXEMPLES FONDAMENTAUX. — Égalité de deux sinus, de deux cosinus, de deux tangentes :

$z = e^{i\theta}$ tels que $\mathrm{Re}(z) = \cos\varphi$



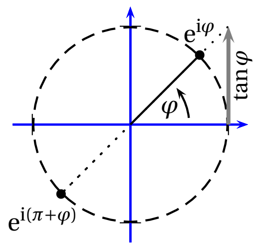
$$\cos\theta = \cos\varphi \iff \begin{cases} \theta = \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou } \theta = -\varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$z = e^{i\theta}$ tels que $\mathrm{Im}(z) = \sin\varphi$



$$\sin\theta = \sin\varphi \iff \begin{cases} \theta = \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou } \theta = \pi - \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

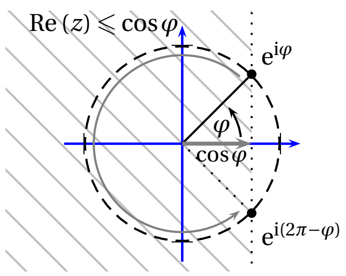
$z = e^{i\theta}$ tels que $\tan\theta = \tan\varphi$



$$\tan\theta = \tan\varphi \iff \theta = \varphi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

EXEMPLE. — Résolution de $\cos\theta \leqslant \cos\varphi$ (inconnue θ ; $\varphi \in [0, \pi]$ paramètre).

1. Nombres $z = e^{i\theta}$ tels que $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\varphi$:
2.



3. *Conclusion :*

$$\begin{aligned} &\cos\theta \leqslant \cos\varphi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in [\varphi + 2k\pi, 2\pi - \varphi + 2k\pi] \\ &\iff \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\varphi + 2k\pi, (2k+1)\pi - \varphi]. \end{aligned}$$

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.71**

1.7 Fonctions polynomiales

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1$^{\text{re}}$A **1.7.1** **Ce qu'il faut savoir sur le trinôme du second degré**

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ où $a \neq 0$. Soit $\Delta \overset{\text{déf}}{=} b^2 - 4ac$ le **discriminant** de f.

- **Forme canonique** de $f(x)$; factoriser par a puis écrire les termes en x^2 et en x à l'aide du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, ce qui donne : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$.
- **Factorisation** : $\boxed{\text{si } \Delta = \delta^2, \text{ on a : } f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ avec } x_1 = \frac{-b-\delta}{2a},\ x_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.}$

$\rightsquigarrow$ en particulier, si $\Delta = 0$ on a : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

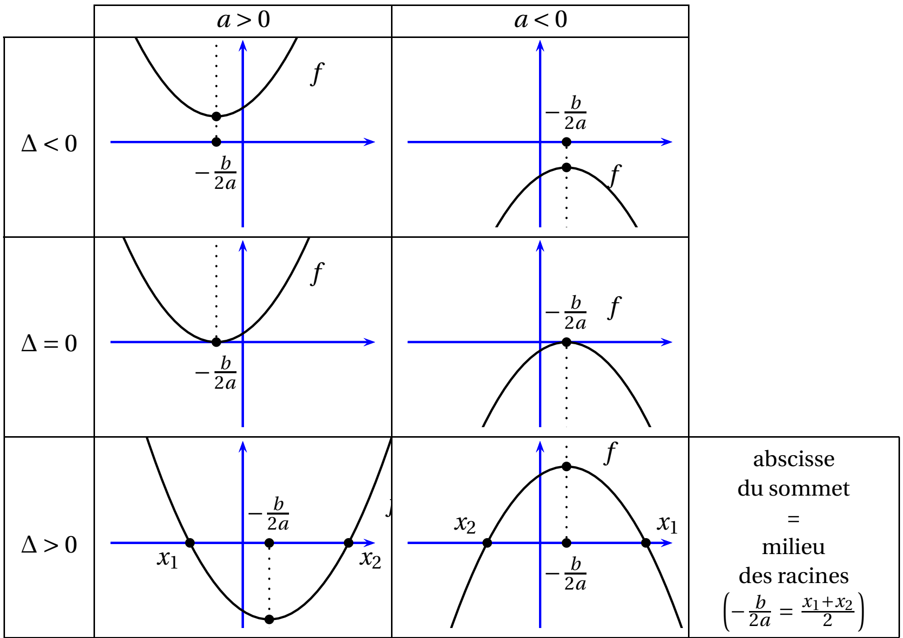
⚠ lorsque $\Delta \geqslant 0$, on peut toujours prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, mais ce n'est pas forcément adroit.
Exemple : $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$; alors $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$;
prendre $\delta = m - 1$ est plus simple que de prendre $\delta = \sqrt{(m-1)^2} = |m-1|$.

- **Racines de** f :
  - lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$, il y deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 ;
  - lorsque $\Delta = 0$, il y a une seule racine $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ (racine double cf. 1.7.6) ;
  - lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle ;
  - lorsque $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$, il y a deux racines complexes $x_1 \neq x_2$
    elles se calculent si l'on sait trouver $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ (cf. 1.6.5).

  $\rightsquigarrow$ lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$ on peut prendre $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$, et alors $\overline{x_1} = x_2$.

⚠ le calcul de Δ est inutile lorsque b ou c est nul — **maladresse classique**.

- **Tracé de** f **et signe dans le cas réel** (*i.e.* si $a, b, c, x \in \mathbb{R}$) :



La fonction f est du signe de a, sauf entre les racines réelles (s'il y en a).

1reA

1.7.2 Qu'est-ce qu'un polynôme ? Notation et présentation

××SI*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$.

- **Définition formelle** : c'est la suite finie $a_0, a_1, \dots, a_n$, notée : $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.

$\rightsquigarrow$ définition mal comprise et peu utile en CPGE.

$\rightsquigarrow$ on écrit parfois $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (avec $a_k \overset{\text{déf}}{=} 0$ si $k > n$).

- **Définition comme fonction polynomiale** : $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{P} & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \end{array}}$

$\rightsquigarrow$ en particulier l'**indéterminée** X est la fonction identité $x \mapsto x$ *i.e.* : $\boxed{X = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}.}$

⚠ $\boxed{\text{un polynôme est une fonction ;}}$ calculer $P(x_0)$ c'est **évaluer** P en x_0 ; ce n'est pas « poser $X = x_0$ dans P », égalité qui signifierait que X est une fonction constante ; ne pas voir X comme un nombre — **erreur majeure sur les polynômes**.

⚠ le nom « polynôme » prend un accent circonflexe, alors que l'adjectif « polynomial » n'en prend pas — **faute d'orthographe classique**.

- **Composée de deux polynômes :**
la composée $P \circ Q$ — aussi noté $P(Q)$ dans le cas de deux polynômes seulement (autres exceptions : cf. 7.1.6, 10.1.5) — s'obtient en substituant Q à X dans l'expression de P.

$\rightsquigarrow$ en particulier $\boxed{P = P(X)}$ (les deux notations sont utilisées ; je préfère la première).

⚠ ne pas confondre les produits et les composées — **confusion classique** ;
convention usuelle : si un facteur d'un produit nécessite des parenthèses, on le place en premier pour qu'il ne soit pas confondable avec une composée :

- notations de produits : PQ, QP, XP, $(X^2+1)P$, $(X^2+1)(X^2+2X)$;

$\rightsquigarrow$ évalués en x_0 : $P(x_0)Q(x_0)$, $Q(x_0)P(x_0)$, $x_0P(x_0)$, $(x_0^2+1)P(x_0)$, $(x_0^2+1)(x_0^2+2x_0)$;

- notations de composées : $P(Q)$, $Q(P)$, $P(X)$, $P(X^2+1)$, $(X^2+1)\circ(X^2+2X)$;

$\rightsquigarrow$ évalués en x_0 : $P(Q(x_0))$, $Q(P(x_0))$, $P(x_0)$, $P(x_0^2+1)$, $(x_0^2+2x_0)^2+1$.

- **Expression d'un polynôme.**
Sauf exception [6], tout résultat d'un calcul sur les polynômes est donné uniquement sous l'une des deux formes suivantes :
  - **forme développée :**
  c'est une somme de monômes, où chaque puissance apparaît au plus une seule fois, comme ci-dessus ; ordonner les puissances dans l'ordre croissant ou décroissant ;

  $\rightsquigarrow$ pour montrer une propriété vraie pour tout polynôme, on peut parfois la montrer pour tous les polynômes X^n, puis la déduire pour tout polynôme.
  - **forme factorisée :**
  produit de polynômes qui sont chacun sous forme développée (cf. 1.7.8, 1.7.9).

6. par exemple la forme canonique d'un trinôme du second degré (cf. 1.7.1), qui sert parfois...

1reA **1.7.3** **Trouver les coefficients d'un polynôme P**

Soient deux entier $m, n, p \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$.
Soient des polynômes U, V, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_p X^p$.

⇝ **polynôme unitaire** : polynôme dont le coefficient de plus haut degré vaut 1.

- **Vérifier une égalité $P = Q$ proposée ou conjecturée** :
  - elle est vrai $\boxed{\text{si et seulement si } P \text{ et } Q \text{ ont les mêmes coefficients ;}}$

  ⚠ cette mal nommée « identification » (cf. $\mathscr{M}$.2.2) est un théorème d'équivalence.
  - en trouvant l'expression des coefficients a_k par récurrence sur k.
  - par des arguments de racines : cf. 1.7.12.
- **Par les formules de calcul** :
  - par somme, par produit par un scalaire, par dérivation : coefficient par coefficient ;
  - 1reA* par produit : $\boxed{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ ;}}$

  ⇝ somme sur tous les couples d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant p$ et $i + j = k$;

  ⇝ il n'est pas nécessaire de tout développer pour avoir un c_k particulier ;

  cette formule résume le calcul suivant (par exemple si $n \leqslant p$) :

$$\begin{array}{llllllll}
 & a_0 Q = & a_0 b_0 + a_0 b_1 X + \cdots + & a_0 b_n X^n & + \cdots + & a_0 b_p X^p & & \\
(+) & a_1 X Q = & a_1 b_0 X + \cdots + & a_1 b_{n-1} X^n + \cdots + & & a_1 b_{p-1} X^p & + a_1 b_p X^{p+1} & \\
\vdots & = & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
(+) & a_n X^n Q = & & a_n b_0 X^n & + \cdots + & a_n b_{p-n} X^p + & \cdots & + a_n b_p X^{n+p} \\
\hline
(=) & PQ = & c_0 + c_1 X + \cdots + & c_n X^n & + \cdots + & c_p X^p & + \quad \cdots & + c_{n+p} X^{n+p}
\end{array}$$

  ⇝ si l'on note $c_k(P)$ le coefficient de degré k de P, on a en particulier :

$$\boxed{c_0(PQ) = c_0(P)c_0(Q)} \quad \text{et} \quad \boxed{c_{n+p}(PQ) = c_n(P)c_p(Q) \quad \text{si } \deg P = n,\ \deg Q = p.}$$

- *Plus rarement,* **par la formule de TAYLOR :** $\boxed{P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k.}$

⇝ en particulier, avec $x_0 = 0$, on obtient : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ (cf. 4.1.6).

⇝ il n'y a pas de terme complémentaire après la somme, contrairement aux autres formules de TAYLOR (cf. 1.2.9, 2.1.6, 2.1.15 et 4.1.6).

- **Par un calcul de dérivée n-ième** :
  - conjecturer une formule puis la démontrer par récurrence sur n ;
  - ECG1 ××SI par la **formule de LEIBNIZ** si $P = (UV)^{(n)}$: $\boxed{(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^{(k)} V^{(n-k)} \text{ ;}}$

  ⚠ ne pas confondre avec la formule du binôme (cf. 1.1.3) — **confusion classique**.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.72 À 1.74**

1reA

1.7.4 Trouver le degré d'un polynôme

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

- **Par la définition** : c'est le plus grand k tels que $a_k \neq 0$.
  En pratique, si l'on sait que $\deg P \leqslant n$, on examine les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, dans cet ordre, jusqu'à en trouver un qui n'est pas nul.

⇝ par convention on pose $\boxed{\deg(P) \overset{\text{déf}}{=} -\infty \quad \text{si } P = 0.}$

⇝ en particulier $\deg P = 0$ si et seulement si P est constant non nul.

- **Par calcul (produit, dérivée)** :

$$\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q} \qquad \boxed{\deg P' = (\deg P) - 1} \qquad \begin{array}{l} \deg P^k = k \deg P \\ \deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q, \end{array}$$ [7]

⇝ en particulier $\deg(\lambda P) = \deg P$ si λ est une constante non nulle.

⚠ attention aux cas particuliers où l'un des polynômes est nul.

- **Par calcul sur une écriture explicite qui met en évidence le degré**, notamment :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ avec } a_n \neq 0 \quad \text{ou} \quad P = a_n X^n + R \text{ avec } R \in \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

- **Degré d'une somme** :
  1. conclure directement : $\boxed{\deg(P+Q) = \deg P \quad \text{si } \deg P > \deg Q\,;}$
  2. si $\deg P = \deg Q = n$ alors $\boxed{\deg(P+Q) = n \iff c_n(P) + c_n(Q) \neq 0\,;}$
  3. si $c_n(P) + c_n(Q) = 0$ recommencer avec le coefficient de degré $n-1$, etc.

⇝ la formule « $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ » est classique mais insuffisante ici.

⚠ la formule « $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$ » est fausse — **erreur très classique**.
Contre-exemple : $P = X^2 + X$ et $Q = -X^2 + X$.

1reA

1.7.5 Montrer qu'un degré est inférieur à n

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n *i.e.* :

$$\boxed{P \in \mathbb{K}_n[X] \overset{\text{déf}}{\iff} \deg P \leqslant n.}$$

⚠ ne pas confondre « $P \in \mathbb{K}_n[X]$ » avec « $\deg P = n$ » — **confusion classique**.

- **Par calcul dans $\mathbb{K}_n[X]$** :
  - l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par somme et par produit par un scalaire *i.e.* :

$$\left.\begin{array}{r} P, Q \in \mathbb{K}_n[X] \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} P + Q \in \mathbb{K}_n[X] \\ \lambda P \in \mathbb{K}_n[X]. \end{cases}$$

  ⇝ ainsi $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (cf. 7.1.2).
  - pour les produits : $\big(P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ et } Q \in \mathbb{K}_p[X]\big) \Longrightarrow PQ \in \mathbb{K}_{n+p}[X]$.

⚠ ne pas confondre ces règles de calcul avec celles du 1.7.4 — **confusion classique**.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.75 À 1.76**

7. sauf si $P \circ Q = 0$ (*i.e.* Q est constant et racine de P).

1reA

1.7.6 Ce qu'il faut savoir sur les racines d'un polynôme

Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

- **Les caractérisations** : $\boxed{x_0 \text{ racine de } P \overset{\text{déf}}{\iff} P(x_0) = 0 \overset{\text{thm}}{\iff} \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X - x_0)Q.}$
- **Les caractérisations de l'ordre d'une racine** (aussi appelée **multiplicité**) :

$$\left.\begin{array}{c} x_0 \text{ racine de } P \\ \text{d'ordre \underline{égal à} } m \end{array}\right\} \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} \exists Q,\ P = (X - x_0)^m Q \\ Q(x_0) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(m-1)}(x_0) = 0 \\ P^{(m)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} x_0 \text{ racine de } P \\ \text{d'ordre} \\ \text{\underline{au moins} } m \end{array}\right\} \overset{\text{déf}}{\iff} \exists Q,\ P = (X - x_0)^m Q \iff P(x_0) = \cdots = P^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

⚠ ne pas se tromper sur les ordres des dérivées qui s'annulent
(il y en a m de l'ordre 0 à l'ordre $m - 1$) — **erreur très classique**.

⇝ en particulier si x_0 n'est pas racine de P alors sa multiplicité est $m = 0$.

- **Nombre maximal de racines** : la somme des multiplicités des différentes racines d'un polynôme (non nul) est inférieure ou égale au degré du polynôme.
- **Polynôme à racines simples** : polynôme dont toute racine est simple *i.e.* d'ordre 1.
  Pour cela il suffit que P soit de degré n et ait n racines distinctes.

1reA

1.7.7 Rechercher des racines d'un polynôme P

- **Par le calcul systématique pour P de degré 0, 1 ou 2** (à savoir faire vite — cf. 1.7.1).
- **Tester des racines « évidentes »**, notamment 0, 1, −1, 2, −2.

⇝ si P est à coefficients entiers, tester aussi les diviseurs du terme constant.

- **Par les relations coefficients/racines, s'il manque une seule racine :** cf. 1.7.8.
- **En se ramenant à un polynôme de degré plus petit** :
  1. si l'on a trouvé une racine x_0, on cherche sa multiplicité m
     en calculant $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, ... (cf. 1.7.6) ;
  2. on factorise en $P = (X - x_0)^m Q$ (ou $P = (X - x_0)Q$ si m non trouvé) — cf. 1.7.17 ;
  3. alors les racines de P sont x_0 et celles de Q.
- **Par la définition**, en résolvant l'équation $P(z) = 0$.

⚠ la résolution n'est pas toujours possible ; penser notamment, si possible : à se ramener par changement d'inconnue à une équation du type $Z^n = a$ (cf. 1.6.5) ou à utiliser la factorisation suivante (cf. 1.1.3) : $1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$.

⇝ cela donne toutes les racines à la fois mais pas leurs multiplicités.

1reA*
- **Par des arguments analytiques** si $P \in \mathbb{R}[X]$ (polynôme à coefficents réels) :
  - si P change de signe sur un intervalle, alors il possède une racine sur cet intervalle (**théorème des valeurs intermédiaires** 1.4.1 ou **théorème de la bijection** 1.4.3) ;
    exemple classique : tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle ;
  - si l'on peut appliquer le **théorème de ROLLE** à Q tel que $P = Q'$ (cf. 1.2.9).

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.80 À 1.90**

1reA

1.7.8 Ce qu'il faut savoir sur la factorisation d'un polynôme P

- **Polynôme P irréductible** : n'est pas le produit de plusieurs polynômes non constants.
- **Factoriser un polynôme** c'est l'écrire comme un produit de polynômes irréductibles.
  Exemple : $X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)(X+1)^2$.
  Contre-exemple : $X^3 + X^2 - X - 1 = (X+1)(X^2-1)$, car $X^2 - 1$ n'est pas irréductible.
- **Polynôme scindé** : peut être factorisé à l'aide de polynômes de degré 1 ;

$\rightsquigarrow$ vrai si et seulement si la somme des multiplicités des racines est *égale* au degré.
- **Relations coefficients/racines** pour un polynôme scindé :

$$a_0 + \cdots + a_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \implies \boxed{\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n},} \boxed{\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}} \quad (a_n = \lambda).$$

$\rightsquigarrow$ en particulier si $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$, on a : $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}.}$
- **Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS** (admis) : tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé ;

$\rightsquigarrow$ en particulier les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 0 ou 1.
- **Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:** ce sont ceux de degré 0 ou 1
  et ceux de degré 2 sans racine réelle (*i.e.* à discriminant strictement négatif).

1reA

1.7.9 Factoriser un polynôme scindé

\+

Soit un polynôme P.

1. Trouver le coefficient dominant de P : λ, et toutes ses racines : $x_1, \dots, x_r$.
2. Trouver leurs multiplicités respectives : $m_1, \dots, m_r$.

$\rightsquigarrow$ on voit que P est bien scindé lorsque $m_1 + \cdots + m_r = \deg P$.

3. Alors on a : $\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}}$ soit aussi : $P = \lambda \prod_{k=1}^{\deg P} (X - \alpha_k)$,
   où $\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg P}$ sont les $x_1, \dots, x_r$, chacun répété autant de fois que sa multiplicité.

⚠ ne pas oublier λ — **oubli très fréquent**.

$\rightsquigarrow$ liste des **racines comptées avec multiplicités** : $\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1 \text{ fois}}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\alpha_r, \dots, \alpha_r}_{m_r \text{ fois}}$.

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ
(1646-1716)
Allemagne

Jean LE ROND D'ALEMBERT
(1717-1783)
France

Karl-Friedrich GAUSS
(1777-1855)
Allemagne

ECG$_1$ * ××SI

1.7.10 **Factoriser un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$**

1. Comme $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, on factorise d'abord P dans $\mathbb{C}[X]$ — cf. 1.7.9.
2. Si x_k est une racine non réelle de P de multiplicité m_k, alors $\overline{x_k}$ est racine de P de multiplicité m_k ; de plus le polynôme suivant est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X - x_k)(X - \overline{x_k}) = X^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_k)X + |x_k|^2.$$

3. Dans la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ on regroupe chaque racine complexe non réelle avec son conjugué, sous la forme suivante (les facteurs sont irréductibles) :

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k \text{ t.q. } x_k \in \mathbb{R}} (X - x_k)^{m_k} \times \prod_{k \text{ t.q. } \mathrm{Im}\,(x_k) > 0} (X^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_k)X + |x_k|^2)^{m_k}.}$$

EXEMPLE. — Polynôme réel, sans racine réelle, mais non irréductible dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4 + 1$.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.91 À 1.102**

1$^{\text{re}}$A

1.7.11 **Montrer qu'un polynôme P est nul**

- **Montrer que les coefficients de P sont nuls** (cf. 1.7.3).
- **Compter ses racines** :
  si P a un nombre de racines strictement supérieur à son degré (cf. 1.7.6), alors $P = 0$.
  ⇝ en particulier lorsque P admet une infinité de racines.
- **Un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des polynômes est nul.**
  ⚠ résultat faux pour les fonctions, en général — **erreur classique**.
  Contre-exemple : $fg = 0$ si $f(x) = \max(x, 0)$ et $g(x) = \min(x, 0)$.
- **Par l'absurde**, si $P \neq 0$, il a un degré entier, et on cherche une contradiction.

EXEMPLE CLASSIQUE. — Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2 \,\mathrm{d}t = 0$, alors $P = 0$.

1$^{\text{re}}$A

1.7.12 **Montrer l'égalité $P = Q$ entre deux polynômes**

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.
- **Montrer que le polynôme $P - Q$ est nul** : cf. 1.7.11
- **Par prolongement des identités algébriques :** si P et Q sont de degré au plus n, ils sont égaux si et seulement s'ils prennent tous les deux la même valeur en au moins $n + 1$ points distincts (qui sont racines de $P - Q$).
  ⇝ il suffit que $P - Q$ admette une infinité de racines.
- Montrer que P et Q ont les mêmes racines complexes, avec les mêmes multiplicités et le même coefficient dominant (cf. 1.7.9).

1reA

1.7.13 Résoudre une équation d'inconnue P (polynôme)

- **En cherchant d'abord le degré de P :**
  1. Le degré n des solutions est souvent imposé :
     - par l'égalité des deux membres de l'équation ;
     - sinon (plus délicat) par l'égalité des coefficients de plus haut degré.

  ⚠ traiter à part le polynôme nul qui n'a pas un degré entier.
  2. Écrire P sous forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et en déduire des conditions sur les a_k (utiliser que deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients).
  3. En déduire $a_0, \dots, a_n$, ce qui donne P.
- **En cherchant ses racines** : cf. 1.7.9.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.77 À 1.78**

EUCLIDE
(IVe siècle av. J.C.)
Grèce

Étienne BÉZOUT
(1730-1783)
France

*
ECG1
××SI

1.7.14 Effectuer une division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.

- **Reconnaître le résultat** (unique) donné par le **théorème de division euclidienne** :

$$\boxed{\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.}$$

⚠ ne pas oublier la condition de degré (indispensable pour l'unicité) — **oubli fréquent**.

- **Par résolution de système lorsque A est divisible par B** : cf. 1.7.17.

MPSI
P×SI*

- **Par la méthode de division selon les puissances décroissantes :**
  1. poser $A_1 = A$;
  2. calculer successivement les monômes $Q_n = \dfrac{T(A_n)}{T(B)}$ et les $A_{n+1} = A_n - BQ_n$, où l'on a noté $T(P)$ le terme de plus haut degré d'un polynôme P ;
  3. s'arrêter lorsque $\deg(A_{n+1}) < \deg B$; alors $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ et $R = A_{n+1}$.

EXEMPLE. — Division euclidienne de $A = X^3 + 5X^2 + 6X + 1$ par $B = 3X^2 + 1$:

1. On pose la division

$$\begin{array}{ll|l} A_1 \to & X^3+5X^2+6X+1 & 3X^2+1 \\ \cline{3-3} & & \uparrow \\ & & B \end{array}$$

2. On choisit le monôme Q_1 tel que le terme de plus haut degré de BQ_1 soit égal à celui de A_1 :

$$\begin{array}{ll|l} A_1 \to & X^3+5X^2+6X+1 & 3X^2+1 \\ \cline{3-3} BQ_1 \to & X^3 \quad +\frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X \\ & & \uparrow \\ & & Q_1 \end{array}$$

3. On calcule la différence $A_2 = A_1 - BQ_1$:

$$\begin{array}{ll|l} & X^3+5X^2+6X+1 & 3X^2+1 \\ \cline{3-3} - & X^3 \qquad +\frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X \\ \cline{2-2} A_2 \to & 5X^2+\frac{17}{3}X+1 & \end{array}$$

$2n$. On choisit le monôme Q_n tel que le terme de plus haut degré de BQ_n soit celui de A_n :

$$\begin{array}{ll|l} & X^3+5X^2+6X+1 & 3X^2+1 \\ \cline{3-3} & X^3 \qquad +\frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X+\frac{5}{3} \\ \cline{2-2} A_n \to & 5X^2+\frac{17}{3}X+1 & \uparrow \\ BQ_n \to & 5X^2 \qquad +\frac{5}{3} & Q_n \end{array}$$

$2n+1$. Calcul de $A_{n+1} = A_n - BQ_n$:

$$\begin{array}{ll|l} & X^3+5X^2+6X+1 & 3X^2+1 \\ \cline{3-3} & X^3 \qquad +\frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X+\frac{5}{3} \\ \cline{2-2} & 5X^2+\frac{17}{3}X+1 & \\ - & 5X^2 \qquad +\frac{5}{3} & \\ \cline{2-2} A_{n+1} \to & \frac{17}{3}X - \frac{2}{3} & \end{array}$$

Fin : on s'arrête quand A_{n+1} est de degré strictement inférieur au degré de B.

Résultat :

$$A = B\underbrace{\left(\frac{1}{3}X + \frac{5}{3}\right)}_{=Q} + \underbrace{\frac{17}{3}X - \frac{2}{3}}_{=R}.$$

ECG1 + ××SI+

1.7.15 Calculer le reste d'une division euclidienne (sans le quotient)

Si B est de degré n, le théorème de division euclidienne s'écrit :

$$\exists a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{K},\ A = BQ + (a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}) \quad (E)$$

1. On factorise B dans $\mathbb{C}$ pour n'avoir que des facteurs de degré 1 (cf. 1.7.9).
2. En évaluant l'égalité (E) en chaque racine x_0 de B, on obtient des équations linéaires d'inconnues $a_0,\dots,a_{n-1}$ où Q ne figure pas.

⇝ si B est scindé à racines simples il y a n équations ;

⇝ si B a une racine x_0 racine d'ordre $m\geqslant 2$, on obtient d'autres équations en dérivant (E) k fois ($k\in[\![1,m-1]\!]$) avant d'évaluer en x_0.

3. On résout le système linéaire de n équations à n inconnues $a_0,\dots,a_{n-1}$.

××SI *Remarque théorique non indispensable au calcul :* il y a une unique solution ; dans le cas à racines simples car le déterminant du système est de VANDERMONDE non nul (cf. 6.3.3) ; justification plus délicate sinon.

1reA

1.7.16 Étudier la divisibilité d'un polynôme A par un polynôme B

- **Par la définition** : A divisible par $B \overset{\text{déf}}{\iff} \exists Q\in\mathbb{K}[X],\ A = BQ$.
- **En factorisant B (s'il est scindé)** : $B = \lambda(X-x_1)^{m_1}\cdots(X-x_r)^{m_r}$ ($x_1,\dots,x_r$ distincts). Alors A est divisible par B si et seulement si $x_1,\dots,x_r$ sont racines d'ordres respectifs au moins $m_1,\dots,m_r$ de A. (MPSI PCSI)
- **Par division euclidienne** : et on voit si $R=0$. (ECG1 ××SI)

⚠ *remarque de terminologie* : on peut toujours *diviser* A par B (avec reste R) mais A n'est pas toujours *divisible* par B (de même que pour la division entre entiers naturels).

1reA

1.7.17 Factoriser un polynôme A par un polynôme B

On cherche un polynôme Q tel que $A = BQ$ (sachant déjà qu'un tel polynôme Q existe).

1. Écrire A,B,Q sous forme développée : $Q = \sum_{k=0}^{n-m} q_kX^k$ (où $n=\deg A$ et $m=\deg B$), avec $q_0,\dots,q_{m-n}$ à trouver.
2. La formule de produit (cf. 1.7.3) fournit des relations linéaires sur les q_k, qui font intervenir les coefficients de A et B, connus ;
3. On commence par utiliser les relations qui comportent le moins d'inconnues parmi $q_0,\dots,q_{m-n}$, à savoir $k=0$ et $k=m-n$ qui donnent q_0 et q_{m-n}.
4. On termine la recherche des $q_0,\dots,q_{m-n}$ de proche en proche, avec des relations qui ne comportent plus, après substitution, qu'une seule inconnue.

⚠ inutile ici d'utiliser la méthode du pivot GAUSS (6.1.3) — **maladresse classique**.

✍ **EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.103 À 1.109**

MPSI

1.7.18 Étudier si deux polynômes P et Q sont premiers entre eux

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- **Vérifier que leurs factorisations ne comportent pas de facteur commun.**
  $\rightsquigarrow$ cela nécessite de les factoriser avant (cf. 1.7.9 ou 1.7.10).
- **Grâce au théorème de BÉZOUT :**

$$\boxed{P \text{ et } Q \text{ premiers entre eux} \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X],\ UP + VQ = 1.}$$

  $\rightsquigarrow$ applicable si l'on reconnaît une égalité de ce type entre P et Q.
- **En calculant leur PGCD** (plus grand diviseur commun, unitaire) :

$$P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux} \iff \mathrm{PGCD}(P, Q) = 1.$$

  - **par factorisation :**
    $\mathrm{PGCD}(P,Q) = P_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdots P_N^{\min(\alpha_N,\beta_N)}$, où $P = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_N^{\alpha_N}$, $Q = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_N^{\beta_N}$ ($P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$).
  - **par l'algorithme d'EUCLIDE** (divisions euclidiennes successives) :

$$P_0 = P,\ P_1 = Q,\ \forall n \geqslant 2,\ P_n \text{ est le reste de la division de } P_{n-2} \text{ par } P_{n-1}.$$

    Alors le dernier polynôme non nul de la suite (P_n) est le PGCD de P et Q — après l'avoir divisé par son coefficient de plus haut degré, s'il n'était pas déjà unitaire.

MPSI PC

1.7.19 Ce qu'il faut savoir sur les polynômes de LAGRANGE

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts.

- Les **polynômes de LAGRANGE** $L_0, \dots, L_n$ associés à $a_0, \dots, a_n$ sont définis d'une des deux manières suivantes équivalentes :

$$\boxed{\deg L_i = n \quad \text{et} \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}} \iff L_i = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

  Exemple avec $n = 2$:

$$L_0 = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)},\ L_1 = \frac{(X-a_0)(X-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)},\ L_2 = \frac{(X-a_0)(X-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}.$$

- **Résoudre un problème d'interpolation.**
  Étant donnés $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non nécessairement distincts, on a (cf. 7.1.9) :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = \lambda_i \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = Q \prod_{i=0}^{n} (X - a_i) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i}_{= P_1}.$$

  $\rightsquigarrow$ en particulier P_1 est l'unique solution de degré inférieur ou égal à n.

EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.110 À 1.111

1.8 Fractions rationnelles

1reA+

1.8.1 Ce qu'il faut savoir sur les homographies

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

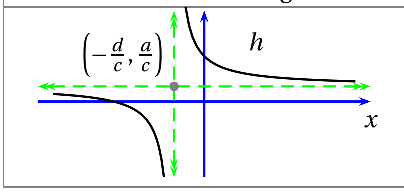
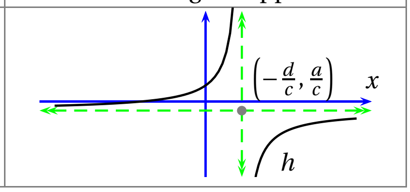
- **La définition :** fonction de la forme : $\boxed{\forall x \in \mathbb{K} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\},\ h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}.}$

$\rightsquigarrow$ la condition $ad - bc \neq 0$ assure que $ax+b$ n'est pas proportionnel à $cx+d$ (alors h serait constante) ; la condition $c \neq 0$ assure que h n'est pas affine.

- **Comment transformer son écriture :** il existe $\delta \in \mathbb{K}^*$ tel que $\boxed{h(x) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\delta}{cx+d}.}$

car : $ax+b = \frac{a}{c}(cx+d) - \frac{ad}{c} + b$ (div. euclidienne de $aX+b$ par $cX+d$).

- **L'importance de transformer son écriture** pour voir les propriétés de h :
  - **bijectivité de h de $\mathbb{K} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{K} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$:** comme composée des bijections $x \mapsto cx+d$, $y \mapsto \frac{1}{y}$, $z \mapsto \frac{a}{c} + \delta z$; par ailleurs, sa réciproque est donnée par $h^{-1}(y) = \frac{dy-b}{-cy+a}$.
  - **asymptotes** (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : verticale d'équation $x = -\frac{d}{c}$ et horizontale d'équation $y = \frac{a}{c}$.
  - **dérivée de** h (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : $h'(x) = -\frac{c\delta}{(cx+d)^2}$ sans utiliser la formule de dérivation d'un quotient ; utile aussi pour la dérivée n-ième ou le calcul d'une primitive.
  - **monotonie et courbe de** h (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : se déduit d'une hyperbole par une translation et des changements d'unités en abscisse et en ordonnée (affinités orthogonales).

c et δ de même signe	c et δ de signes opposés
	

1reA
~~MPST~~

1.8.2 Décompositions en éléments simples à savoir trouver

⚠ la notion générale de décomposition en éléments simples n'est pas au programme.

- **Un cas classique :** $\forall x \in \mathbb{K} - \{r_1, r_2\},\ \boxed{\dfrac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\left(\dfrac{1}{x-r_1} - \dfrac{1}{x-r_2}\right)}$ $(r_1 \neq r_2)$.

PCSI $\rightsquigarrow$ si $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - r_k)$, alors : $\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $\forall x \neq r_i$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{x - r_k}$.

- **Recherche des coefficients d'une décomposition donnée**, par ex. trouver $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{K} - \{1, -2\}$, $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$.
  1. mettre le second membre au même dénominateur que le premier membre ;
  2. développer le numérateur obtenu :
  $$a(x+2)^2 + b(x+2)(x-1) + c(x-1) = (a+b)x^2 + (4a+2b+c)x + (4a+2b-c)\,;$$
  3. trouver a, b, c pour que ce numérateur soit égal à x^2+2x+3.

MPSI

1.8.3 Vocabulaire des fractions rationnelles

- **fraction rationnelle** : expression de la forme $F = \frac{P}{Q}$, avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ où Q n'est pas le polynôme nul.
- **degré** de F : $\deg F \overset{\text{déf}}{=} \deg P - \deg Q$ (ne dépend pas de l'écriture de F).
- **forme irréductible** de F : lorsque P et Q sont premiers entre eux (cf. 1.7.18) ; on peut supposer Q unitaire (*i.e.* de coefficient dominant égal à 1).
- **pôle** $x_0 \in \mathbb{K}$ de F : racine de Q (lorsque F est sous forme irréductible).
- **ordre** d'un pôle $x_0 \in \mathbb{K}$ de F : ordre de x_0 comme racine de Q (F sous forme irréductible).

MPSI

1.8.4 Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Soit une fraction rationnelle F.

1. Mettre F sous forme irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$ en simplifiant tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur (cf. 1.7.18).
2. Déterminer la **partie entière** E (quotient E de P par Q dans la division euclidienne) :
$$F = \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec } \deg R < \deg Q.$$
3. Factoriser Q (avec $r, s, m_i, n_i \in \mathbb{N}^*$ et $x_i, p_i, q_i \in \mathbb{K}$ — les x_i sont distincts) :
   - si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $Q = (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r}$ (cf. 1.7.9) ;
   - si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $Q = (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r} (X^2 + p_1 X + q_1)^{n_1} \cdots (X^2 + m_s X + q_s)^{n_s}$ (les $X^2 + p_i X + q_i$ n'ont pas de racine réelle — cf. 1.7.10).
4. Utiliser le **théorème de décomposition en éléments simples** qui affirme l'existence de l'unicité de coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ ou $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \in \mathbb{R}$ tels que :
   - si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(X - x_i)^j}$.
   - si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(X - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j} X + b_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$.
5. Calculer ces coefficients inconnus :
   - cas d'un pôle simple x_i ($m_i = 1$) : $c_{i,1}$ s'obtient par la formule $c_{i,1} = \frac{R(x_i)}{Q'(x_i)}$; *autre méthode* : tout multiplier par $X - x_i$, simplifier, puis évaluer en x_i ;
   - cas d'un pôle quelconque x_i ($m_i \geqslant 1$) : pour tout $j \in [\![1, m_i]\!]$, $c_{i,j}$ s'obtient évaluant $(X - x_i)^j F(X)$ en x_i ;
   - en résolvant un système : évaluer la décomposition en des points qui ne sont pas des pôles ou calculer la limite en $\pm\infty$ (lorsque $\deg F < 0$) donne une équation linéaire ; suffisamment d'équations linéaires donnent un système qui a une seule solution.
   - *éventuellement* dans le cas où Q est à racines simples $x_1, \ldots, x_r$, à l'aide des polynômes de LAGRANGE associés à $x_1, \ldots, x_r$ (cf. 1.7.19) ; par *exemple* (si $\deg R < r$) :
$$\frac{R}{(X - x_1) \cdots (X - x_r)} = \frac{1}{(X - x_1) \cdots (X - x_r)} \sum_{i=1}^{r} R(x_i) L_i(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{R(x_i)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)} \frac{1}{X - x_i}.$$

EXERCICE(S) D'APPLICATION : 1.112 À 1.113

Mémento

	Notion	*à savoir*
1reA	Suite arithmétique Suite géométrique	$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + b \iff \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)b$ $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n \iff \forall n \geqslant n_0,\ u_n = a^{n-n_0} u_{n_0}$
1reA + +	Suite arithmético-géométrique	$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = au_n + b$ $\iff$ $(u_n - \ell)$ géométrique de raison a, avec $\ell = a\ell + b$
1reA	Somme Produit	$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + b_n \iff u_n = u_{n_0} + \sum_{k=\bullet}^{\bullet} b_k$ $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = a_n u_n \iff u_n = u_{n_0} \prod_{k=\bullet}^{\bullet} a_k$
1reA	Suite vérifiant une récurrence linéaire d'ordre deux	$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \rightsquigarrow r^2 = ar + b\ \ (E)$ ▶ $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ racines distinctes de $(E))$ ▶ $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$ $(r \in \mathbb{K}$ racine double de $(E))$ ▶ $u_n = \rho^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta)$ $(\rho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ racines conjuguées de $(E))$
1reA	Sommes usuelles	$\sum_{k=1}^{n} x = nx \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ si $x \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\sum_{k=p}^{n} x^k = \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x} = x^p \left(\frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}\right)$
	Formule du binôme	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
1reA	Coefficients du binôme	$\binom{n}{p} \overset{\text{déf}}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (f. de PASCAL)
1reA	Théorème de ROLLE	$\left.\begin{array}{r} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continue} \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$
1reA	Égalité des accroissements finis	$\left.\begin{array}{r} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continue} \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
1reA ++ ++	Inégalité des accroissements finis	$\left.\begin{array}{r} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continue} \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \forall t \in]a,b[,\ \lvert f'(t)\rvert \leqslant M \end{array}\right\} \Longrightarrow \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant M\lvert b-a\rvert$
1reA	Théorème des bornes atteintes	si $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes *i.e.* $\exists c, d \in [a,b],\ \forall x \in [a,b],\ f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$

	Notion	*à savoir*
MPI	Fonction f convexe	▶ f' croissante (*i.e.* $f'' \geqslant 0$) ▶ $\forall x, y,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ ▶ $\forall x_0, x,\ f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ ▶ $\forall t_1,\dots,t_n \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$
1reA	Fonctions usuelles	déf., allure et propriétés : cf. 1.3.4, 1.3.6, 1.5.1 à 1.5.5, 1.7.1 et 1.8.1
1reA	Bijection $X \xrightarrow{f} Y$	▶ f injective et f surjective sur Y ▶ pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ a une seule solution $x \in X$ ▶ il existe $Y \xrightarrow{g} X$ telle que $\forall x \in X,\ g(f(x)) = x$ et $\forall y \in Y,\ f(g(y)) = y$
1reA	Théorème des valeurs intermédiaires	$\left.\begin{array}{r} I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continue} \\ I \text{ intervalle et } a, b \in I \\ f(a) \leqslant k \leqslant f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in [a,b],\ f(c) = k$
1reA	Théorème de la bijection	$\left.\begin{array}{r} I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ continue} \\ f \text{ strictement monotone} \\ J \text{ défini par les valeurs/limites de } f \\ \text{aux extrémités de l'intervalle } I \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ bijective de } I \text{ sur } J$
1reA	Calcul dans $\mathbb{C}$	formules de 1.6.1 et 1.6.2
	Trigonométrie	formules de 1.6.3 et 1.6.6
1reA	Produit de polynômes	$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
ECG1 × × SI	Formule de LEIBNIZ	$(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^{(k)} V^{(n-k)}$
1reA	Degré d'un polynôme	▶ $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ ▶ $\deg P' = (\deg P) - 1$ ▶ $\deg(P+Q) = \deg P$ si $\deg P > \deg Q$ $\deg(P+Q) \leqslant n$ si $\deg P = \deg Q = n$
1reA	x_0 racine de P d'ordre égal à m	▶ $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-x_0)^m Q$ et $Q(x_0) \neq 0$ ▶ $P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(m-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(m)}(x_0) \neq 0$ (~~ECG1~~)
1reA	Th. de division euclidienne	Pour $A, B \in \mathbb{K}[X] : \exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$
1reA	Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS	Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$: ▶ possède au moins une racine complexe ▶ est scindé ▶ s'écrit : $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}$ (λ coefficient dominant ; $x_1, \dots, x_r$ racines ; m_k multiplicités)

Quelques questions de cours

Niveau 0

Énoncer précisément (en moins de vingt secondes) une définition fondamentale ou un résultat de base du cours.

1. Terme général d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique en fonction de la raison et du terme d'ordre n_0 — 1reA.
2. Formules de sommation des k — 1reA, des k^2 et des k^3 — 1reA+
3. Formules de sommation géométrique (à partir de 1 ou à partir de x^p) avec condition d'application — 1reA.
4. Factorielles et coefficients du binôme : définitions et valeurs particulières — 1reA.
5. Formules avec $\sum$ et $\prod$ — 1reA ; distinguer le vrai du faux dans les formules du type :
   - $\sum_k f(a_k) = f\left(\sum_k a_k\right)$ ou $\prod_k f(a_k) = f\left(\prod_k a_k\right)$ avec $f(x) = \lambda x$ ou $f(x) = x^n$
   - $\sum_k f(a_k, b_k) = f\left(\sum_k a_k, \sum_k b_k\right)$ ou $\prod_k f(a_k, b_k) = f\left(\prod_k a_k, \prod_k b_k\right)$
     avec $f(x, y) = x + y$ ou $f(x, y) = xy$ ou $f(x, y) = \frac{x}{y}$.
6. Formule du binôme — 1reA.
7. Définir parité, imparité, périodicité — 1reA.
8. Existence et équation d'une asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ — , ××SI.
9. Qu'est-ce qu'un antécédent ? — 1reA.
10. Donner une valeur particulière usuelle :
    (a) de $\theta \mapsto e^{i\theta}$, sin, cos, ou arctan — 1reA, , ;
    (b) de arcsin ou arccos — 1reA, , .
11. Donner une formule de trigonométrie — 1reA, , .
12. Qu'est-ce qu'un polynôme scindé ? — 1reA, , , .

Niveau 1

Énoncer précisément (en moins d'une minute) les différentes propriétés et/ou caractérisations d'une notion du cours et expliquer le lien entre elles ; énoncer précisément un théorème comportant plusieurs hypothèses et/ou plusieurs conclusions ; décrire les différents aspects d'un objet de base du cours (savoir définir chaque mot à l'aide d'une notion plus simple).

1. Qu'est-ce qu'une bijection (3 caractérisations)— 1$^{\text{re}}$A*.
2. Énoncer le théorème de la bijection — 1$^{\text{re}}$A.
   Application à la définition de l'une des fonctions
   (a) arctan— 1$^{\text{re}}$A, , , , .
   (b) arcsin ou arccos — , ××SI, , .
3. Énoncer l'un des théorèmes suivants :
   (a) théorème des valeurs intermédiaires, théorème de ROLLE, propriété d'une fonction continue sur un segment — 1$^{\text{re}}$A ;
   (b) égalité des accroissements finis — 1$^{\text{re}}$A, , ;
   (c) inégalité des accroissements finis — 1$^{\text{re}}$A, , ;
   (d) inégalité de TAYLOR-LAGRANGE — MPSI*.
4. Comment montrer qu'une fonction est convexe ? Donner les 3 inégalités usuelles vérifiées par une fonction convexe ?
5. Donner l'allure d'une fonction usuelle en faisant apparaître ses propriétés analytiques (domaine de définition, parité, imparité, périodicité, dérivée, variations, branches infinies) et préciser les formules algébriques qu'elle vérifie :
   (a) ln, exp, puissances, homographie — 1$^{\text{re}}$A ;
   (b) sin, cos, tan — , ;
   (c) arctan — , , , ;
   (d) arcsin, arccos — , ××SI, , ;
   (e) cosh, sinh — ××SI ;
   (f) th — MPSI.
6. Résoudre de $\cos\theta = \cos\varphi$ ou de $\sin\theta = \sin\varphi$ ou de $\tan\theta = \tan\varphi$ (inconnue θ, paramètre φ) — 1$^{\text{re}}$A, , .
7. Racines, signe et allure de la courbe d'une fonction trinôme du second degré, à partir de n'importe laquelle de ses formes (développée, factorisée ou canonique) — 1$^{\text{re}}$A.
8. Qu'est-ce que l'ordre d'une racine d'un polynôme (définition et caractérisation par les dérivées) ? — 1$^{\text{re}}$A, , .
9. Énoncer le théorème de division euclidienne — *, ECG$_1$, ××SI, , .

Niveau 2

Connaître et savoir mener assez rapidement (une à cinq minutes) les méthodes de calcul de base du cours.

1. Savoir rédiger correctement une démonstration par récurrence — 1^{re}A.
2. Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique (*i.e.* $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$) — , , × ×SI, $^+$.
3. Trouver le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; préciser à quel type de suite cela s'applique —- 1^{re}A, , , , .
4. Bien utiliser les techniques d'établissement d'une inégalité ou d'un encadrement — 1^{re}A.
5. Étudier le signe d'une fonction — 1^{re}A.
6. Étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction — 1^{re}A.
7. Tracer la courbe représentative d'une fonction — 1^{re}A.
8. Établir une inégalité de convexité — , MPI.
9. Tracer la courbe de $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto -f(-x)$, $x \mapsto f(x+T)$, $x \mapsto f(x)+T$, $x \mapsto \lambda f(x)$, $x \mapsto f(\lambda x)$ ou f^{-1} à partir du tracé de la courbe de f — 1^{re}A.
10. Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique — 1^{re}A, , .
11. Résoudre $z^n = a$ dans $\mathbb{C}$ — ECG$_1$, × ×SI, , .
12. Linéariser une expression trigonométrique — 1^{re}A, , .
13. Déterminer le degré d'un polynôme obtenu par produit et/ou par somme — 1^{re}A.
14. Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ — 1^{re}A, , , .
15. Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ — ECG$_1$ *, × ×SI, .
16. Trouver le PGCD de deux polynômes — MPSI.
17. Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples — MPSI.

Niveau 3

Savoir énoncer et démontrer (en moins de cinq minutes) un résultat du cours ou un résultat classique.

1. Énoncer et démontrer la formule de Pascal — 1^{re}A.
2. Énoncer et démontrer la formule du binôme — 1^{re}A*.
3. Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times 2n$ et $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factorielles — 1^{re}A.
4. Énoncer et démontrer le théorème sur la somme (resp. le produit, resp. la composée) deux fonctions monotones — 1^{re}A.
5. Montrer que si $f \circ g = \mathrm{Id}$, alors f est surjective et g est injective — 1^{re}A*.
6. Énoncer et démontrer la formule d'addition pour tangente — × ×SI.
7. Montrer que si z est une racine d'ordre m d'un polynôme P réel, alors $\overline{z}$ est racine d'ordre m de P — ECG$_1$ *, × ×SI, .
8. Énoncer et démontrer les formules de duplication (en trigonométrie) — 1^{re}A*, , .
9. Valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} a_{k+1} - a_k$ et démonstration (par changements d'indices et découpages, sans utiliser d'écriture en extension) — 1^{re}A*.

Exercices

Récurrences, suites usuelles, sommes et produits

1reA
EXERCICE 1.1

Montrer que chacune des relations suivantes est héréditaire à partir d'un certain rang et trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels elle est vraie.

1. $n^2 \leqslant 2^n$;
2. $4^n \leqslant 2n\binom{2n}{n}$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) < \sqrt{2n+1}$;
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right) > \sqrt{2n+3}$.

1reA
EXERCICE 1.2

Soit $a > 0$. Pour chacune des suites définies par récurrence ci-après, démontrer la formule du terme général proposée pour tout $n \geqslant 0$:

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \end{cases}$ $\qquad u_n = 1-(1-u_0)^{2^n}$;
2. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{au_n} \end{cases}$ $\qquad u_n = a\left(\dfrac{u_0}{a}\right)^{2^{-n}}$;
3. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{au_n}{\sqrt{a^2+u_n^2}} \end{cases}$ $\qquad u_n = \dfrac{a^n u_0}{\sqrt{a^{2n}+nu_0^2a^{2(n-1)}}}$;
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n-k}}{2^k} \quad \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ $\qquad u_n = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1reA
EXERCICE 1.3

Soit m un paramètre réel différent de 1. On définit la suite réelle (u_n), par récurrence, par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{m^2}{m-1}u_{n+1} + \frac{m+1}{1-m}u_n.$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n) en fonction de m.

1reA
EXERCICE 1.4

Calculer en fonction de l'entier n le terme général de la suite (u_n), définie par récurrence, dans les cas suivants :

1. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{2}{n-1}u_{n-2} \quad \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$;
2. $u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^3}{{u_n}^2}$ et $u_0 = 1, u_1 = 2$.

1reA
EXERCICE 1.5

Déterminer en fonction de u_0 et u_1 le terme général d'une suite (u_n) telle que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n u_p.$$

1^re^A

EXERCICE 1.6

Calculer en fonction de l'entier n le terme général de la suite (u_n), définie par récurrence, dans les cas suivants :

1. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+(n+1)u_n^2}$ et $u_0 = 1$;
2. $u_{n+1} = u_n + n + 1$ et $u_0 = 0$;
3. $u_{n+1} = u_n + 2^n$ et $u_0 = 1$;
4. $u_{n+1} = u_n + n(n!)$ et $u_1 \in \mathbb{R}$;
5. $u_{n+1} = nu_n$ et $u_0 = 1$;
6. $u_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{2n} u_n$ et $u_1 = 1$;
7. $u_{n+1} = (n+1)u_n + n$ et $u_0 = 0$;
8. $u_{n+1} = {u_n}^2$ et $u_0 \in \mathbb{R}$;
9. $u_{n+1} = 2{u_n}^3$ et $u_0 = 2$;
10. $u_{n+1} = (u_n)^{n^2}$ et $u_1 = 2$;
11. $u_{n+1} = 2(u_n)^n$ et $u_0 = 2$;
12. $u_{n+1} = 2nu_n$ et $u_1 = 1$;
13. $u_{n+1} = (2n+1)u_n$ et $u_1 = 1$.

1^re^A

EXERCICE 1.7

Soit une fonction $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ telle que $f(1) \neq 0$ et : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m^2+n^2) = f(n)^2 + f(m)^2$.

1. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 10\}$, calculer $f(k)$.
2. Pour tout $k \in \{3, 6, 7\}$, calculer $f(k)$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N},\ f(k) = k$.

Indication : pour les n^os^ 2 et 3, on pourra remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)^2 + (n-2)^2 = (2n-1)^2 + (n+2)^2 \quad \textit{et} \quad (2n+2)^2 + (n-4)^2 = (2n-2)^2 + (n+4)^2.$$

1^re^A

EXERCICE 1.8

Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$. Vérifier si :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k\, k! = (n!)^{n+1}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$;
7. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$;
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$;
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2(-1)^k = \frac{1}{2} n(n+1)$;
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 3^{n-k} = n4^{n-1}$;
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$;
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$;
15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

1reA

EXERCICE 1.9

Soit un entier $n \geqslant 2$. Calculer les sommes ou produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} 4k$;
2. $\prod_{k=0}^{n} 3^k$;
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{k+1}}$;
4. $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$;
5. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(2^k\right)$;
6. $\sum_{k=1}^{n} \ln(2k)$;
7. $\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$;
8. $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$;
9. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;
10. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$;
11. $\sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)(2k+3)}$;
12. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$;
13. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$;
14. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$;
15. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$;
16. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$;
17. $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{3}{\ln k} + \frac{2}{\ln(k+1)}$;
18. $\sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{k} - \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}$;
19. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;
20. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$;
21. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

1reA

EXERCICE 1.10

Soit un entier naturel $n \geqslant 1$. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $S_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i+j}$;
2. $S_2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$;
3. $S_3 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$;
4. $S_4 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i-j)$;
5. $S_5 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$;
6. $S_6 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$;
7. $S_7 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{i+j}$;
8. $S_8 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2i+j$;
9. $S_9 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$;
10. $S_{10} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{i}{j} 3^j$;
11. $S_{11} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{i}{j} 2^j$;
12. $S_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}\right)$;
13. $S_{13} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}\right)$.

Indication : si nécessaire, utiliser que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Inégalités et monotonie

1re A

EXERCICE 1.11

Soient trois nombres réels $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Montrer les inégalités suivantes :

1. $2xy \leqslant \frac{x^2}{z} + zy^2$;
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$;
3. $\dfrac{1}{8}\dfrac{(x-y)^2}{y} \leqslant \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{1}{8}\dfrac{(y-x)^2}{x}$;
4. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$;
5. $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$.

1re A

EXERCICE 1.12

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient $a_1, \dots, a_n > 0$. On note $P_n = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ et $Q_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$.

1. Déterminer le nombre de couples (i, j) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
2. Exprimer Q_n en fonction de P_n.
3. En déduire que $(2^n P_n)^{\frac{n-1}{2}} \leqslant \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i + a_j)$.

1re A

EXERCICE 1.13

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $4x^2 + 12x - 5 < 0$;
2. $(x^2 - 25)(x^4 - 16) > 0$;
3. $(-2x-1)(-x^2-3)(-3x^2-8x+5) \geqslant 0$;
4. $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 5x + 4) > 0$
5. $(x^2 - 9x + 14)(x^2 - 7x + 6) \leqslant 0$;
6. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leqslant \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$;
7. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$.

1re A

EXERCICE 1.14

En utilisant l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}^*,\ 1 + u < \mathrm{e}^u$, montrer que : $\forall x > 1,\ \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)^x$.

1re A

EXERCICE 1.15

Résoudre en fonction des valeurs du paramètre réel m les inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

1. $(m^2 + m)x \leqslant m^2 + 1$;
2. $(mx+1)(3x+5) < 0$;
3. $\dfrac{m}{x-2} > \dfrac{m-1}{x+1}$.

1re A

n°3

EXERCICE 1.16

Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g, d'une variable réelle x, puis étudier les variations de g et en déduire les variations de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = -x + \dfrac{\ln x}{x}$ et $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$;
2. $f(x) = x\ln(x+1)$ et $g = f'$;
3. $f(x) = (x-1)^2 \arctan \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = -\dfrac{x-1}{x^2+1} + 2\arctan\dfrac{1}{x}$.

1reA

EXERCICE 1.17

Soient $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer sans calcul de dérivée les variations de la fonction f :

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 + 2x$;
2. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$;
3. $f(x) = x\sqrt{x-1}$;
4. $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$;
5. $f(x) = x^2 - 3x + 2$;
6. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{3-x}$;
7. $f(x) = (x^{\frac{1}{4}} + \sqrt{x})^5$;
8. $f(x) = x^2 e^{|x|}$;
9. $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$;
10. $f(x) = \dfrac{-2|x|+1}{3-|x|}$;
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$;
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x+2}}$;
13. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{\sqrt{x}}}{1+e^{-x}}$;
14. $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$;
15. $f(x) = \dfrac{-2x^2+1}{3-x^2}$;
16. $f(x) = |x^2 - 1|$;
17. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x+1|}}$;
18. $f(x) = \dfrac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}$.

1reA

EXERCICE 1.18

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;
2. $u_n = (1-n)(2-n)(3-n)$;
3. $u_n = \frac{1}{3n^2+2n+1}$;
4. $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$;
5. $u_n = 2n + (-1)^n$;
6. $u_n = n! + \dfrac{1}{n}$;
7. $u_n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;
8. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$;
9. $u_n = \dfrac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{n2^n+1}}$;
10. $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n2^n+1}}$.

1reA

EXERCICE 1.19

Trouver un majorant et un minorant de la fonction f définie sur X chacun des cas suivants :

1. $X = [0,1]$ et $f(x) = \dfrac{x^6 - x^3 + 2 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(3+x)}$;
2. $X = [-1,0]$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^3+x^2+2|}}{x^2-3x+2}$;
3. $X =]-1,2] - \{0\}$ et $f(x) = \left(\dfrac{|x|^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}{x^2+x+1}\right)^2$.

1reA

EXERCICE 1.20

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des nombres réels $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$. Montrer qu'au moins l'un des deux nombres $x = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ et $y = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-a_k)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{2^n}$.

1reA

EXERCICE 1.21

Soient deux fonctions continues $[a,b] \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in [a,b],\ 0 < g(x) < f(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [a,b],\ (1+\lambda)g(x) \leqslant f(x)$.

1reA

EXERCICE 1.22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ une fonction dérivable n fois. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

1re A **EXERCICE 1.23**

Soient $a, b \in, \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient deux fonctions $[a, b] \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$f(a) = g(a), \quad f(b) = g(b) \quad \text{et} \quad f'' > g''.$$

En étudiant $g - f$, montrer que : $g \geqslant f$.

1re A **EXERCICE 1.24**

1. À l'aide du th. des accroissements finis, montrer que : $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la monotonie sur $\mathbb{R}_+^*$ de f et g définies par : $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Inégalités de convexité

MPSI
PCSI

EXERCICE 1.25

Montrer que : $\forall x_i, y_i > 0,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i + y_i\right)^{\frac{1}{n}}.$

Indication : on pourra montrer que $t \stackrel{g}{\longmapsto} \ln(1+\mathrm{e}^t)$ *est convexe.*

MPSI
PCSI

EXERCICE 1.26

Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a : $f(a) - f(0) \leqslant a f'(a)$.
2. Montrer la croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.
3. En déduire que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et majorée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $f(0)$ est un maximum global.
   Indication : on pourra appliquer ce qui précède aux fonctions f et $x \mapsto f(-x)$.
   (c) Montrer que f est constante.

1^{re}A

n$^{\text{os}}$8 à 11 et 13
ECG$_1$
MPSI
PCSI

EXERCICE 1.27

Vérifier chacune des inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[,\ \ln(1+2x) \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$;
2. $\forall x > 0,\ 0 < \dfrac{x^2}{1+x^2} < \ln(1+x^2)$;
3. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 3x < 2\sin x + \tan x$;
4. $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right],\ 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$;
5. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$;
6. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin 2x}{2} \leqslant \sin x$;
7. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leqslant 2\tan\dfrac{x}{2} \leqslant \tan x$;
8. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x$;
9. $\forall x \in \mathbb{R},\ |\arctan x| \leqslant |x|$;
10. $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$;
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$;
12. $\forall x \in [1,2],\ \mathrm{e}^{x-1} \leqslant x^2$;
13. $\begin{cases} \forall x \in [0,1], \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases} \dfrac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(k-x) \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}.$

Courbe représentative, partie entière, parité, imparité, périodicité

1re A

EXERCICE 1.28

Donner, sans étude de variations et sans l'aide d'une calculatrice, le tracé des fonctions suivantes. Préciser lorsqu'il y a lieu : tangentes horizontales ($\leftarrow\!\bullet\!\rightarrow$) et verticales ($\updownarrow$), asymptotes ($\twoheadleftarrow\!\twoheadrightarrow$), points d'intersection avec les axes, parité, imparité, période.

1. $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$;
2. $x \mapsto x^{\pi}$;
3. $x \mapsto (\sqrt{x})^5$;
4. $x \mapsto \frac{1}{x^2}$;
5. $x \mapsto (x^2)^{-\frac{1}{3}}$;
6. $x \mapsto -1+\sqrt{x}$;
7. $x \mapsto (1+x)^{-3}$;
8. $x \mapsto \ln(1+x)$;
9. $x \mapsto (1-x)^{\frac{2}{3}}$;
10. $x \mapsto 1-(1-x)^{\frac{3}{2}}$;
11. $x \mapsto 1-\sqrt{1-x}$;
12. $x \mapsto |\cos x|$;
13. $x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-|x|}$;
14. $x \mapsto |\ln(|x|)|$.

1re A

EXERCICE 1.29

Indiquer pour quels réels x elles ont un sens et résoudre les (in)équations suivantes :

1. $x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}+\left|\dfrac{5x}{6}-\dfrac{1}{2}\right| \leqslant 0$;
2. $\dfrac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geqslant 1$;
3. $\big||x|-5\big| \geqslant \big||3x|-3\big|$;
4. $\sqrt{|x^2-x|-2x+2} \leqslant 2$;
5. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}} = 1$.

1re A

EXERCICE 1.30

Étudier la validité de chacune des propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1$;
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$;
5. $\forall x \geqslant 0,\ \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$;
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$;
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Indication : pour le n° 4, on pourra écrire que : $x = \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{x-\lfloor x \rfloor}_{\in [0,1[}$.

1re A

EXERCICE 1.31

Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 = 0$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = 1 + u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Montrer que $u_n = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$ pour tout $n \geqslant 1$.

1re A

EXERCICE 1.32

Soient trois fonctions $\mathbb{R} \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$.

1. Étudier la parité et l'imparité de $-f$, $f+g$, fg et $h \circ f$ lorsque f, g et h sont chacune paire ou impaire. Pour cela on établira la parité ou l'imparité dans le cas général, ou bien on l'infirmera à l'aide d'un contre-exemple.
2. Même question pour f' si l'on suppose f dérivable.

1reA

EXERCICE 1.33

Soit $a>0$.Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ si $x\in]0,2\pi]$;
2. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ si $x\in]-\pi,\pi]$;
3. $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ si $x\in]-\pi,\pi]$;
4. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \pi-x & \text{si } x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$;
5. $f(x)=x$ si $x\in[0,\pi]$ et f paire ;
6. $f(x)=x(\pi-x)$ si $x\in[0,\pi]$ et f impaire.

1reA

EXERCICE 1.34

Soit une fonction $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(x^2)$.
Montrer que f est paire.

1reA

EXERCICE 1.35

Soit une fonction $\mathbb{R}\xrightarrow{f}]-1,1[$ telle que : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
Montrer que f est impaire.
Indication : on pourra s'intéresser à la valeur de $f(0)$.

1reA

EXERCICE 1.36

Soient $a>0$. Soit $\mathbb{R}\xrightarrow{f}[0,1]$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\left(f(x)\right)^2}$.
Montrer que f est périodique de période $2a$.
Indication : montrer que f est à valeurs dans $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

1reA

nos3,4

EXERCICE 1.37

Déterminer les branches infinies de la fonction f d'une variable réelle x dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;
2. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}$;
3. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos x}}$;
4. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x$;
5. $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+7}{2(2x-1)}$;
6. $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$.

1reA

nos2, 3
××SI

EXERCICE 1.38

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Étudier les variations et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}x^n$ $(x\geqslant 0)$;
2. $f(x)=\dfrac{1}{\cosh x}$;
3. $f(x)=\dfrac{x}{\sinh x}$;
4. $f(x)=\ln|\ln x|$;
5. $f(x)=\left|\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x\right|-2$.

1reA **EXERCICE 1.39**

Soient des nombres réels a, x_0, x_1, x_2 tels que $a \neq 0$ et $x_0 \neq x_1$. Soit le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Soit (Γ) la courbe représentative de P.

1. Calculer $P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ et $P'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$; on exprimera les résultats avec le facteur $(x_0-x_1)^2$.
   En déduire que la tangente à (Γ) au point d'abscisse $\frac{x_0+x_1}{2}$ n'est pas horizontale.
2. Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $\left(\frac{x_0+x_1}{2}, P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right)$ et montrer qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x = x_2$.
3. Soient deux nombres distincts s et t. Soit (D) la droite passant par les points de coordonnées $(s, P(s))$ et $(t, P(t))$. Soit (D') la tangente à (Γ) au point d'abscisse $\frac{s+t}{2}$.
   Soit le polynôme F défini par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{P(s)+P(t)}{2} + \frac{P(s)-P(t)}{s-t}\left(x - \frac{s+t}{2}\right).$$
   (a) Montrer que (D) a pour équation cartésienne : $y = F(x)$.
   (b) Soit le polynôme $Q = P - F$. Montrer $Q'\left(\frac{s+t}{2}\right) \neq 0$.
   (c) En déduire que (D) et (D') sont sécantes.

Antécédents

1reA **EXERCICE 1.40**

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des nombres réels $a_1, \dots, a_n \in [0,1]$. Montrer que $\frac{n}{2}$ admet au moins un antécédent par la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Injections, surjections et bijections

××SI

EXERCICE 1.41

1. Montrer que la fonction sinh est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble Y à préciser.
2. Tracer sur un même dessin les graphes de sinh et de sa réciproque $g = \sinh^{-1}$ ainsi que celui de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 - g(1-x).$$

1reA — n°8

EXERCICE 1.42

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est bijective de X sur Y, où l'un des deux ensembles est à déterminer. Dans les nos 1 à 7 déterminer en plus la réciproque de f.

1. $X = \mathbb{R}^*$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$;
2. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$;
3. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{|x|}{2}$.
4. $X = [2, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$;
5. $X =]-1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
6. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$;
7. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$;
8. $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(x^3)$;
9. $X = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + 2x^3$;
10. $X = [\mathrm{e}-1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{1+x}$.

1reA

EXERCICE 1.43

Montrer qu'il existe une unique application $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[\xrightarrow{g} [\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[,\ g(x)\ln(g(x)) = x,$$

donner le tableau de variations de g et tracer sa courbe représentative.

1reA

EXERCICE 1.44

On considère la fonction h définie sur $X = \mathbb{R} - \{2\}$ par : $h(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

1. Montrer que h est bijective de X sur X, et déterminer sa réciproque.
2. Déterminer, en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, toutes les fonctions $X \xrightarrow{f} X$ telles que :
$$\forall x \in X,\ f(h(x)) - af(x) = \mathrm{e}^x.$$

1reA

EXERCICE 1.45

Soient trois fonctions : $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $2f+1$ l'est.
2. On suppose que si $f \circ f \circ f = f$. Montrer que est injective si et seulement si elle est surjective.
3. On suppose que $h = f \circ g$, que $h \circ h = h$, que f est injective et que g est surjective.
Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

4. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ est surjective.
   Montrer que f, g et h sont bijectives.
5. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont surjectives et que $f \circ h \circ g$ est injective.
   Montrer que f, g et h sont bijectives.

1reA

EXERCICE 1.46

Montrer que l'identité de $\mathbb{N}$ est la seule fonction $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ injective t. que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$.

1reA

EXERCICE 1.47

Montrer que la fonction suivante est surjective : $\begin{array}{ccc} \left\{(x,y) \in]0,1[^2 \mid x \neq y\right\} & \xrightarrow{f} &]0,2[\\ (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array}$

Exponentielle, logarithme

1reA

EXERCICE 1.48

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. $\ln(\mathrm{e}^3)$;
2. $(\ln \mathrm{e})^3$;
3. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$;
4. $\ln(\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}})$;
5. $\ln(\sqrt[3]{\mathrm{e}})$;
6. $\mathrm{e}^{\ln 2}$;
7. $\mathrm{e}^{\ln 3 - 2\ln 2}$.

1reA

EXERCICE 1.49

Résoudre chacune des équations, d'inconnue réelle x, suivantes :

1. $(x^2-1)\mathrm{e}^{\ln(x-2)} = \ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)$;
2. $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$;
3. $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$;
4. $\ln\left|x^2+2x-8\right| = 3\ln(x-2)$;
5. $\ln(x+2) + \ln(4-x) = \ln|8x-8|$;
6. $\mathrm{e}^{2x+1} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x+2}} - 2\mathrm{e}^3 = 0$.

Puissances

1reA

EXERCICE 1.50

Soit $x > 1$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{x} \overset{\text{déf}}{=} x^{\frac{1}{n}}$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $E_1 = \dfrac{\sqrt[5]{4}\,\sqrt{8}\,\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$;
2. $E_2 = \dfrac{\sqrt{4}\,\sqrt{8}\,\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$;
3. $E_3 = \dfrac{\sqrt[15]{3}\,\sqrt[3]{9}\,\left(\sqrt{9}\right)^3}{\sqrt[4]{27}\,\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$;
4. $E_4 = \dfrac{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[4]{625}\,\left(\sqrt{25}\right)^3}{\sqrt[4]{125}\,\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^3}$;
5. $E_5 = x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}}$;
6. $E_6 = \dfrac{\sqrt{x^3\sqrt[4]{x}(x\sqrt{x})^3}}{x\sqrt{x^{\frac{1}{6}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}}$.

1reA

EXERCICE 1.51

Résoudre chacune des équations, d'inconnue réelle x, suivantes :

1. $2^{x^2}4^x = 8$;
2. $3^x - \dfrac{1}{3^x} = 3$;
3. $4^x - 3 \times 2^{x+2} = 2^6$;
4. $7^{x+\frac{4}{3}} + 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right)$;
5. $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$;
6. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Nombres complexes

1re A

EXERCICE 1.52

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre chacune des équations, d'inconnue complexe z, suivantes :

1. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=0$;
2. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=0$;
3. $(z-a)(z-b)\in\mathbb{R}$;
4. $z(1+\mathrm{i})-\mathrm{i}\overline{z}=1$;
5. $z+\overline{z}=1+\mathrm{i}$;
6. $1-\left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right|^2=0$;
7. $\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\in\mathbb{R}$;
8. $\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$;
9. $\begin{cases}|z|=|z-1|\\ |z-1|=\left|\dfrac{1}{z}\right|\end{cases}$.

1re A

EXERCICE 1.53

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $|a|=|b|=|c|=1$. Montrer que $|ab+bc+ac|=|a+b+c|$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1re A

EXERCICE 1.54

Soient $\theta, \theta' \in]-\pi,\pi[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;
2. $\dfrac{(2-2\mathrm{i})^3}{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}$;
3. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5+(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5$;
4. $\dfrac{5+11\mathrm{i}\sqrt{3}}{7-4\mathrm{i}\sqrt{3}}$;
5. $(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$;
6. $\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}$;
7. $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2$;
8. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\theta}$.

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.55

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre chacune des équations suivantes, d'inconnue complexe z :

1. $z^4=1$;
2. $z^3+8\mathrm{i}=0$;
3. $z^6=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$;
4. $z^8=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$;
5. $\overline{z^7}=\dfrac{1}{z^2}$;
6. $\overline{z}=z^{n+1}$;
7. $z^4=\overline{z}^4$;
8. $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^8=1$;
9. $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3+\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2+\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)+1=0.$

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.56

1. Calculer U^4, où $U=\sqrt{2-\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.57

Soient $a, b>0$ et soit $z\in\mathbb{C}$ tels que $a>b$ et $|z-a|=\sqrt{a^2-b^2}$.
Montrer que $\left|\dfrac{b-z}{b+z}\right|=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

Fonctions trigonométriques réciproques

EXERCICE 1.58

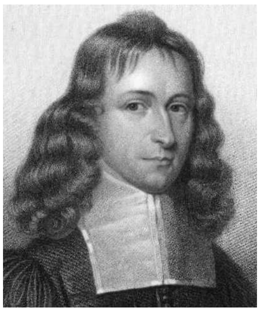
ECG1 ××SI

1. À l'aide des formules de duplication, calculer $\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$, puis de $\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.
2. En déduire que : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\frac{120}{119}$.

EXERCICE 1.59

ECG1 ××SI

1. Soient $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$. Montrer que $\arctan\frac{b}{a}$ est un argument de $a+\mathrm{i}b$.
   Donner un argument de $a+\mathrm{i}b$ lorsque $a<0$, puis lorsque $a=0$.
2. Preuve de la **formule de MACHIN**[8] :
   (a) Mettre le nombre complexe $z=\frac{(5+\mathrm{i})^4}{239+\mathrm{i}}$ sous forme algébrique puis trigonométrique.
   (b) En déduire la formule de MACHIN : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.



James GREGORY
(1638-1675)
Écosse

John MACHIN
(1680-1751)
Angleterre

EXERCICE 1.60

ECG1 ××SI

On pose $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$.
2. On admet la relation classique : $\forall x>0,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
   Trouver une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
3. Tracer la courbe représentative de f.

8. John MACHIN (1680-1752) utilisa sa formule et le développement en série entière suivant dû à James GREGORY (1638-1675) :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} \quad \text{(cf. 5.4.6)}$$

pour calculer en 1706 — à la main ! — les 100 premières décimales de π.

×× SI

EXERCICE 1.61

Résoudre chacune des équations d'inconnue réelle x suivantes :

1. $\arctan x + \arctan\left(x\sqrt{3}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$;
2. $2\arcsin(2x) = 3\arccos x$;
3. $\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Indication : pour le n° 1, calculer $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.
Indication : pour le n° 2, vérifier que $\frac{1}{2}$ *est une solution.*
Indication : pour le n° 3, on pourra utiliser que : $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

ECG1
×× SI

EXERCICE 1.62

Soit n un entier naturel non nul. Simplifier les sommes suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{1+k+k^2}$;
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k^2}$;
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$.

Indication : on pourra démontrer et utiliser que : $\arctan\frac{x-y}{1+xy} = \arctan x - \arctan y$ *si* $x, y \geqslant 0$.

×× SI

EXERCICE 1.63

Simplifier l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
2. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) - 2\arctan\sqrt{x}$;
3. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$;
4. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

×× SI

EXERCICE 1.64

Trouver, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions $x \in [0, 2\pi[$ de l'équation :

$$\alpha\cos x + \sin x = 2.$$

Trigonométrie circulaire

1reA

EXERCICE 1.65

Soit t un nombre réel. Soit n un entier naturel. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^3 t$;
2. $\sin^3 t$;
3. $\sin^4 t$;
4. $\cos^5 t$;
5. $\sin^6 t$;
6. $\cos^6 t$;
7. $\cos^8 t$;
8. $\cos^2 t \sin^4 t$;
9. $\cos^3 t \sin^2 t$;
10. $\cos^4 t \sin^3 t$;
11. $\sin^{2n} t$;
12. $4\cos^3 t \sin t - 4\cos t \sin^3 t$;
13. $\sin^2 2t \cos^2 t \cos 2t$;
14. $\cos^3 t \sin 2t - \cos 2t \sin^3 t$.

1reA

EXERCICE 1.66

Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe une constante α, que l'on déterminera, telle que, pour tout x réel où cela est défini, on a la relation suivante :

1. $\cos^2 x \sin^4 x = \alpha\left(\cos^2 x - \cos 4x - \cos 2x + \cos^2 3x\right)$;
2. $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \alpha \cos^3 2x$;
3. $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x} = \alpha \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

EXERCICE 1.67

ECG1 ××SI

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On définit la suite réelle (u_n), par récurrence, par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n) en fonction de θ.

1reA

EXERCICE 1.68

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer chacune des égalités suivantes (quand les deux membres sont définis ; on ne cherchera pas à préciser à quelles conditions c'est le cas) :

1. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+2} \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-3)^k = 2^{2n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$;
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2\cos(2^k x) - 1) = \frac{2\cos(2^n x) + 1}{2\cos x + 1}$;
6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) + \cos\left(\frac{y}{2^k}\right)\right) = \frac{\cos x - \cos y}{2^n\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{y}{2^n}\right)\right)}$;
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \sin(2^k x)}{2\cos(2^k x) - 1} = \frac{2^n \sin(2^n x)}{2^n \cos(2^n x) + 1} - \frac{\sin x}{2\cos x + 1}$.

1re A

EXERCICE 1.69

Soit le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Soit n un entier non nul. Soient deux nombres réels $x, y \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} j^k$;
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$;
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{\pi k}{9}\right)$;
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \sin(ky)$;
5. $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$;
6. $S_6 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$;
7. $S_7 = \sum_{k=1}^{n} \cos^3(kx)$;
8. $S_8 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$;
9. $S_9 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(y + kx)$;
10. $S_{10} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\binom{n}{2k+1}}{3^k}$;
11. $S_{11} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k\, 3^k \binom{n}{2k}$;
12. $S_{12} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$;
13. $S_{13} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\cos^3(3^{k-1}x)}{3^{k-1}}$.

1re A

EXERCICE 1.70

Majorer par une constante indépendante de n la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2k)$.

Équations et inéquations trigonométriques

1re A

EXERCICE 1.71

Résoudre les (in)équations d'inconnue réelle x suivantes :

1. $\cos(3x-2) = \cos(2x-1)$;
2. $\tan(x+1) + \tan(3x+1) = 0$;
3. $\sin^2 x = \frac{1}{2}$;
4. $\sin 2x = \cos \frac{x}{2}$;
5. $\tan^4 x + 2\tan^2 x - 3 = 0$;
6. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$;
7. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$;
8. $\tan^2 x - 1 < 0$;
9. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leqslant 0$;
10. $\frac{1}{4} \leqslant \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2}$;
11. $\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2} < 0$;
12. $\cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\ln(x^2)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calculs de polynômes, degré

1reA

EXERCICE 1.72

Développer et simplifier le produit P_iQ_i dans chacun des cas suivants :

1. $P_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2} X^k$ et $Q_1 = X-1$;
2. $P_2 = \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$ et $Q_2 = (X-1)^2$;
3. $P_3 = \sum_{k=0}^{n} (1+2^k)X^k$ et $Q_3 = 2X^2-3X+1$;
4. $P_4 = \prod_{k=0}^{n} \left(X^{2^k}+1\right)$ et $Q_4 = X-1$;
5. $P_5 = \prod_{k=0}^{n} \left(X^{2\times 3^k}+X^{3^k}+1\right)$ et $Q_5 = X-1$;
6. $P_6 = 1+X+X^2+\cdots+X^n$ et $Q_6 = P_6$;
7. $P_7 = \sum_{k=0}^{n} kX^k$ et $Q_7 = \sum_{k=0}^{2n} X^k$.

1reA

EXERCICE 1.73

Soit α un nombre réel différent de 0, 1 et -1, et soit n un entier. Soit le polynôme réel :

$$P = (1+\alpha X)(1+\alpha^2 X)(1+\alpha^3 X)\cdots(1+\alpha^n X).$$

1. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.
   Calculer a_0, a_1 et a_n.
2. Montrer que : $(1+\alpha X)P(\alpha X) = (1+\alpha^{n+1}X)P$ ($P(\alpha X)$ est une composée, non un produit).
3. En déduire une expression de a_p pour tout $p \geqslant 1$.

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.74

Soit le polynôme $P = X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 4$.
Calculer $P(1+\sqrt[3]{2})$ à l'aide de la formule de TAYLOR.

1reA

nos3,4

EXERCICE 1.75

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des suites de polynômes définies par récurrence suivantes, calculer ce qui est demandé ou montrer la relation proposée :

1. $\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = (2n+1)XP_n - (X^2+1)P_n' \end{cases}$
   terme de plus haut degré de P_n
   relation $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$;
2. $\begin{cases} P_0 = \frac{1}{2} \text{ et } P_1 = X \\ P_{n+2} = XP_{n+1} - X^2 P_n \end{cases}$
   calcul de P_n ;
3. $\begin{cases} P_0 = 2 \text{ et } P_1 = X+1 \\ P_{n+2} = P_{n+1}^3 P_n^4 \end{cases}$
   terme de plus haut degré de P_n ;
4. $\begin{cases} P_1 = X^{m-1} \\ P_{n+1} = P_n + \frac{1}{m}(1-X)P_n' \end{cases}$
   relation $P_n = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \left(1-\frac{i}{m}\right)^{n-1} (X-1)^i$;
5. $\begin{cases} P_1 = X \\ P_{n+1} = (X^2 P_n)' \end{cases}$
   calcul de P_n ;
6. $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$
   terme de plus haut degré de P_n
   relation $P_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$;
7. $\begin{cases} P_1 = X^2 - X + 1 \\ P_{n+1} = XP_n(X^3-X) + 2(X^3-X)P_n \end{cases}$
   terme de plus haut degré de P_n.

1reA

EXERCICE 1.76

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si le polynôme $P^2 - Q^2$ est constant non nul alors les polynômes P et Q sont constants.
2. Soit P un polynôme réel non constant. Montrer que la fonction f d'une variable réelle x suivante n'est pas polynomiale : $f(x) = \sqrt{1 + (P(x))^2}$.

1reA

EXERCICE 1.77

Soit q un entier naturel et a un nombre complexe. Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les polynômes P qui vérifient l'équation proposée :

1. $\deg P \leqslant 3$ et $P(X+1) = (X+1)P'$;
2. $P(2X) = P'P''$;
3. $(P')^2 = aP$;
4. $2P = (X-1)P' - 1$;
5. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$;
6. $(X^2 - X)P'' = 6P$;
7. $(X-1)P' - P = X^q$.

1reA

EXERCICE 1.78

Soient trois polynômes réels P, Q, R.

1. Montrer que si $P^2 - XQ^2 = XR^2$ alors $P = Q = R = 0$.
2. Que peut-on dire sur P, Q et R lorsque $P^2 - XQ^2 + R^2 = 0$?

Racines d'un polynôme et multiplicité

1reA,

EXERCICE 1.79

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Montrer que 1 ne peut être racine simple de $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

1reA

nº3 MPSI

EXERCICE 1.80

Soit un paramètre $\alpha \in]0, \pi[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les racines complexes du polynôme en utilisant l'indication donnée :

1. $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$; a une racine évidente ;
2. $P = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 28X - 24$; a une racine d'ordre 3
3. $P = X^3 - (1+2\mathrm{i})X^2 + (9\mathrm{i}-1)X - 2(1+5\mathrm{i})$; a une racine réelle ;
4. $P = X^5 - (1+\sqrt{3})X^4 + \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X^2 - (1+\sqrt{3})X + 1$; a deux racines évidentes ;
5. $P = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$; il existe Q t.q. $x_0 \neq 0$ est racine P ssi $x_0 + \dfrac{1}{x_0}$ racine de Q.
6. $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)\ X^{n-k}$; simplifier l'expression de P ;
7. $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(X + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)^n$ (racines réelles seulement) ; simplifier l'expression de P.

1reA

EXERCICE 1.81

Soit un entier $n \geqslant 5$. Montrer que 1 est racine de chacun des polynômes suivants, et déterminer sa multiplicité :

1. $P_1 = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$;
2. $P_2 = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$;
3. $P_3 = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$;
4. $P_4 = (n-4)X^n - nX^{n-2} + nX^2 - (n-4)$;
5. $P_5 = X^{2n+1} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(-X^{n+2} + X^{n-1}\right) + \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}\left(X^{n+1} - X^n\right) - 1$.

××SI

EXERCICE 1.82

Soit un entier $n \geqslant 1$. Soit le polynôme : $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que Q_n n'a aucune racine multiple (réelle ou complexe).
2. Montrer que 0 est racine d'ordre exactement $n+1$ du polynôme $P_n = Q_n^2 - Q_n(2X)$.

1reA

EXERCICE 1.83

Soient deux nombres réels distincts a et b et un entier non nul n. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1}\,dt = (x-a)^n P_n(x)$.
On précisera le degré de P_n ainsi que les valeurs $P_n(a)$ et $P_n(b)$.

1^re^A

EXERCICE 1.84

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soient deux nombres réels p, q.
Pour chacun des polynômes suivants, vérifier la propriété indiquée :

1. $P_1 = X^{17} - X^{11} - 1$; a au moins une racine réelle ;
2. $P_2 = X^7 - 3X^2 + 4X - 1$; a au moins une racine réelle ;
3. $P_3 = X^{29} + 14X^{17} - 7X^5 + 2$; a au moins une racine réelle ;
4. $P_4 = X^{99} + \sqrt{2}X - 1$; a une seule racine réelle ;
5. $P_5 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} X^k$; n'a pas de racine réelle si n est pair ;
6. $P_6 = X^n + pX + q$; possède au plus trois racines réelles distinctes ;
   Indication : faire un raisonnement par l'absurde.
7. $P_7 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle sinon.

1^re^A, ,

EXERCICE 1.85

Montrer que si P est un polynôme réel et scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' aussi.

1^re^A

EXERCICE 1.86

Soit un entier $q \geqslant 2$. Soit le polynôme complexe $Q = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k$.

1. Montrer par l'absurde à l'aide de l'inégalité triangulaire que toute racine complexe z de Q vérifie $|z| \leqslant 1$
2. Simplifier le polynôme $R = (X-1)Q$. En déduire que toutes les racines de Q sont simples.
3. Montrer que si z est une racine de Q de module 1, alors $z = 1$.

1^re^A

EXERCICE 1.87

Soient trois nombres réels distincts a, b, c et non nuls. Soient les polynômes :

$$P = (b-c)(X-a)\left((X+a)^2 + b^2 + c^2\right) + (c-a)(X-b)\left((X+b)^2 + a^2 + c^2\right) + (a-b)(X-c)\left((X+c)^2 + b^2 + a^2\right)$$

$$Q = 2X(a-b)(b-c)(c-a).$$

Comparer les valeurs de P et Q en a (resp. b, c et 0). Que peut-on en déduire sur P et Q ?

1^re^A

EXERCICE 1.88

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient les polynômes : $P = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (X+k)$ et $Q = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+j)$.
Simplifier les valeurs $P(i)$ et $Q(i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. En déduire que $P = Q$.

1^re^A

EXERCICE 1.89

Soit P un polynôme réel tel que : $P(X^2+1) = P^2 + 1$ et $P(0) = 0$. Montrer que $P = X$.
Indication : on pourra montrer que la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ *est strictement croissante.*

1re A

EXERCICE 1.90

On veut déterminer tous les polynômes P à coefficients complexes tels que :

$$P \times P(X+2) + P(X^2) = 0, \quad (E)$$

où $P(X+2)$ et $P(X^2)$ désignent les composées de P avec $X+2$ et X^2 respectivement, et $\times$ désigne le produit de polynômes.

1. Soit P un polynôme non nul qui vérifie (E). Montrer que si α est racine de P alors α^2 aussi.
2. En déduire que, dans les mêmes conditions, α^{2^n} est racine de P pour tout n.
3. En déduire que le module de α vaut 0 ou 1.
4. Montrer que si α est racine de P alors $(\alpha-2)^2$ aussi.
5. Trouver tous les nombres complexes α tels que $|\alpha|, |\alpha-2| \in \{0,1\}$.
6. Trouver tous les polynômes P à coefficients complexes qui vérifient (E).

Factorisation d'un polynôme

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.91

Soient un entier $n \geqslant 1$ et $a \in]-2,2[$. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ puis factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ ceux de ces polynômes qui sont réels :

1. X^2+4 ;
2. $X^3-6X^2+11X-6$;
3. $2X^4+2$;
4. X^4+4 ;
5. $X^3+8\mathrm{i}$;
6. $-X^6+3X^3-2$;
7. $2X^8-2X^4-12$.

××SI

EXERCICE 1.92

Soit n un entier naturel non nul.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $P = X(X+1)+1-\mathrm{i}$ et $Q = X(X+1)+1+\mathrm{i}$.
2. En déduire une expression simple du produit : $a = \displaystyle\prod_{p=0}^{n} \frac{p(p+1)+1-\mathrm{i}}{p(p+1)+1+\mathrm{i}}$.

1re A

EXERCICE 1.93

Soient les nombres complexes suivants : $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $a = u+u^2+u^4$ et $b = u^3+u^5+u^6$.

1. Calculer $a+b$ puis ab.
2. En déduire que $\{a,b\} = \left\{\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}$.
3. En déduire a et b à l'aide d'un dessin.

1re A

EXERCICE 1.94

Soit un entier naturel $n \geqslant 1$ et le polynôme : $P = X^{2n+3} - X^{2n+2} - 2X^{n+2} + 2X^{n+1} + X - 1$.

1. Déterminer la multiplicité de 1 comme racine de P.
2. Déterminer les racines complexes du polynôme $Q = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.
3. Déterminer la multiplicité des racines de Q dans le polynôme P.
4. En déduire une expression de P en fonction des polynômes Q et $X-1$.

1^re^A

EXERCICE 1.95

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit le polynôme $P = X^{n+1} - 2X^n - 2X + 4$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit $z_k = 2^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Calculer $P\left(2^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

1^re^A

EXERCICE 1.96

Calculer $P(1001)$, où P est un polynôme de degré 1000 tel que : $\forall n \in [\![0, 1000]\!],\ P(n) = \dfrac{n}{n+1}$.
Indication : on pourra utiliser le polynôme $Q = (X+1)P - X$.

1^re^A

EXERCICE 1.97

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes complexes définie par récurrence par :

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a : $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le nombre réel $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est racine de P_n. Ces racines sont-elles distinctes ?
3. Pour tout $n \geqslant 1$, factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

1^re^A

EXERCICE 1.98

Trouver tous les $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que : $a + b + c = 1$, $abc = 1$ et $|a| = |b| = |c| = 1$.

1^re^A

EXERCICE 1.99

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X+3)P = XP(X+1)$.

1^re^A

EXERCICE 1.100

Soit un entier $n \geqslant 1$.

1. Trouver les racines du polynôme $P = (X-1)^{2n+1} - 1$.
2. En déduire une expression simple du produit suivant : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

1^re^A

EXERCICE 1.101

Soit un nombre réel a. Soit un entier $n \geqslant 1$.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z suivante : $(z+1)^n = \mathrm{e}^{2ina}$.
2. En déduire une expression simple du produit suivant : $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

1^re^A

EXERCICE 1.102

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit le polynôme $P = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}$.

1. Préciser le degré de P et le coefficient de plus haut degré.
2. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que toutes les racines sont simples.
3. Montrer que : $P = 4nX \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right)$.
4. En déduire la valeur du produit suivant : $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$.
5. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{3}$.

Division euclidienne et divisibilité

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.103

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le quotient de la division euclidienne du polynôme :

$$P = (X-1)^{n+2} + (X+2)^n - 2 \quad \text{par } Q = (X-1)^n.$$

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.104

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, calculer le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B :

1. $A = X^{2n} + X^n + 1$ et $B = X^2 + X + 1$;
2. $A = (X\cos\theta + \sin\theta)^n$ et $B = X^2 + 1$.

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.105

Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$.

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.106

Dans chacun des cas suivants, déterminer un polynôme P vérifiant les conditions données :

1. $\deg P = 4$, $P(X+1)$ divisible par $(X-1)^2$ et par $(X+1)^2$, et $P(1) = 1$;
2. $\deg P \leqslant 4$, $P + 10$ divisible par $(X-2)^2$ et $P - 12$ divisible par $(X+2)^3$;
3. $\deg P \leqslant 7$, $P + 1$ divisible par $(X-1)^4$ et $P - 1$ divisible par $(X+1)^4$.

1reA

EXERCICE 1.107

Soit un entier $n \geqslant 2$ et soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, dire si A est divisible par B :

1. $\begin{cases} A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1 \\ B = X(X+1)(2X+1) \text{ ;} \end{cases}$
2. $\begin{cases} A = (X-2)^{2n} - (X-1)^n - 1 \\ B = X^2 - 3X + 2 \text{ ;} \end{cases}$
3. $\begin{cases} A = (X^n - 1)(X^{n+1} - 1) \\ B = X^3 - X^2 - X + 1 \text{ ;} \end{cases}$
4. $\begin{cases} A = X^{2n} - 2X^n \cos n\varphi + 1 \\ B = X^2 - 2X\cos\varphi + 1. \end{cases}$

1reA

EXERCICE 1.108

Montrer que les polynômes non constants $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P sont ceux de la forme :

$$P = a(X-b)^n \text{ avec } a, b \in \mathbb{K} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

ECG1 ××SI

EXERCICE 1.109

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A - C$ est divisible par B.

1. Montrer que A^n et C^n ont le même reste lors de la division euclidienne par B.
2. Dans cette question, on prend $B = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $A = X^{12} + X^9 + X^6 + X^3 + 2$.
   (a) Montrer que les polynômes $X^5 - 1$, $X^6 - X$, $X^9 - X^4$ et $X^{12} - X^2$ sont divisibles par B.
   (b) En utilisant la question 1, en déduire le reste de la division de A^n par B.

Polynômes de LAGRANGE

MPSI PC PSI

EXERCICE 1.110

Soient trois nombres distincts $a, b, c \in \mathbb{K}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division de P par le polynôme $(X-a)(X-b)(X-c)$ à l'aide de polynômes d'interpolation de LAGRANGE.

MPSI PC PSI

EXERCICE 1.111

Soient $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de LAGRANGE associés à $1, 2, \dots, n$.
Calculer le polynôme $P_k = \sum_{j=1}^{n} j^k L_j$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, puis pour pour $k = n$.

Fractions rationnelles

××SI n$^{\text{os}}$2,3,5 MPSI

EXERCICE 1.112

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit P, Q deux polynômes qui admettent a comme racine d'ordre k.
Soit f la fonction rationnelle associée à la fraction $\dfrac{P}{Q}$. Exprimer $f(a)$ à l'aide de P, Q, k et a.

MPSI

EXERCICE 1.113

Soit un entier $n \geqslant 2$. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{2X^3+1}{(X+1)(X^2-3X+2)}$;
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^4(X-2)^2}$;
3. $\dfrac{X^5+1}{X^2(X-1)^2}$;
4. $\dfrac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}$;
5. $\dfrac{1}{X^2(X-1)^n}$.