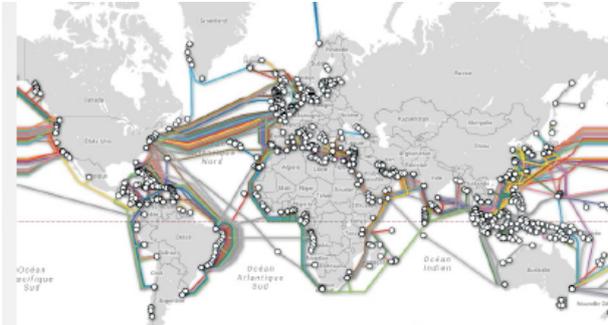


O1 : Modèle scalaire des ondes lumineuses

1 Intérêt de l'optique et des interférences

★ Certaines propriétés de la lumière sont connues depuis des siècles : par exemple la réfraction (applications aux lunettes de vue ou la photographie), ou la décomposition spectrale de la lumière blanche.

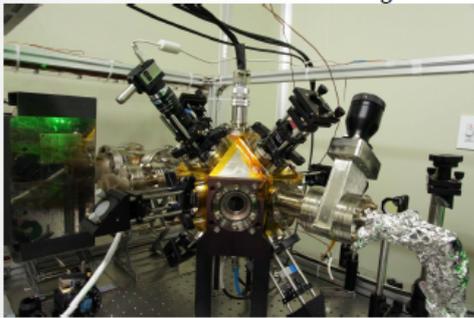
★ Mais c'est aussi une science très actuelle :



Réseau de fibre optique

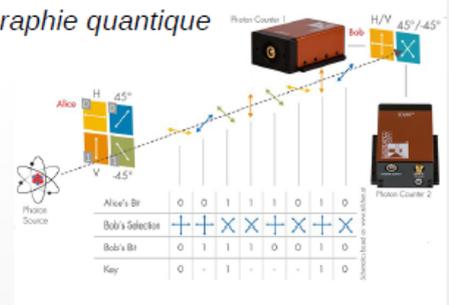


Chirurgie de l'œil par laser femtoseconde



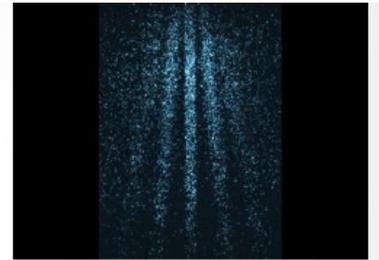
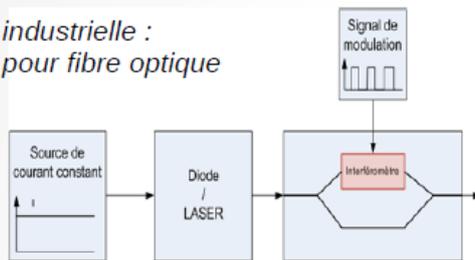
Piège à atomes

Cryptographie quantique



★ Le programme d'optique de PC se concentre sur la notion d'interférence dont voici quelques applications :

Application industrielle : Modulation pour fibre optique



Ouverture science fondamentale :
Interférences entre molécules

Application science fondamentale : Détection d'ondes gravitationnelles

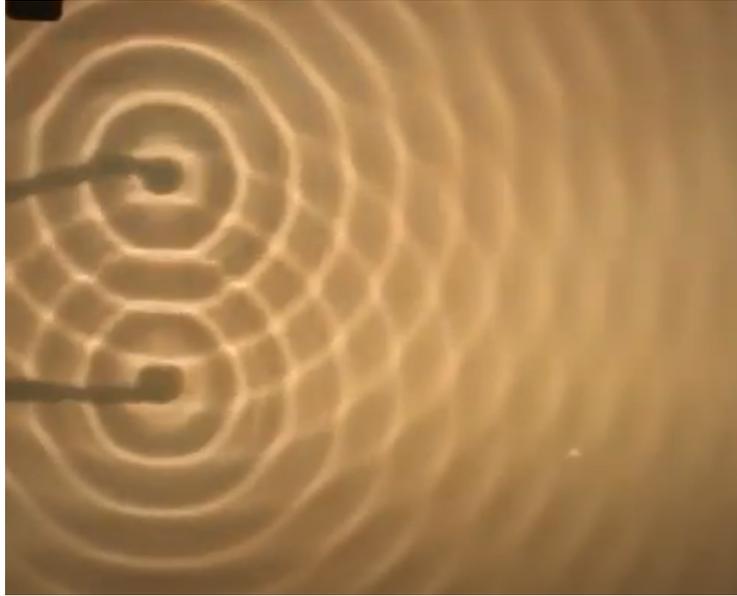


2 Approche intuitive de la notion de chemin optique

Considérons une expérience de « cuve à ondes » : deux tuyaux d'embouchures S_1 et S_2 émettent un flux d'air périodique au dessus de la surface d'eau d'un récipient de hauteur uniforme.

★ détails et vidéo de l'expérience : « 198 cuve à ondes E - double point » de la page <https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/198/cuve-a-ondes>

★ animation numérique pour faire varier facilement les paramètres : https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php?typanim=Javascript



- *Quels sont les paramètres utiles pour prédire l'état d'interférence en un point M quelconque à la surface de l'eau ?*
- *Que prendre en compte si la célérité des ondes émises par chaque source est différente ?*
- *Dans le cas d'interférences lumineuses, proposer alors une grandeur pertinente homogène à une longueur qui détermine l'état d'interférence en M .*

3 Rappel : propagation de la lumière dans un milieu transparent

Cadre du programme : en optique, limitation à la propagation dans des milieux :

- *linéaire* : la fréquence d'une onde progressive sinusoïdale reste constante lors de la propagation (il existe des milieux non-linéaires : application au doublage de fréquence) ;
- *homogène* : propriétés identiques en tout point de l'espace (contreexemple : gradient de densité formant un mirage ; fibres optiques à gradient d'indice) ;
- *isotrope* : propriétés indépendantes selon toutes directions (contreexemple : certains cristaux sont biréfringents) ;
- *transparent* : absorption négligée (cf cours Physique des Ondes *PO2-Dispersion et absorption des ondes*).

C'est plutôt une bonne approximation pour le vide, l'air, l'eau et le verre.

3.1 Indice de réfraction d'un milieu transparent

def : **Célérité** : vitesse de propagation d'une onde, souvent notée c ou v . **Dans le cas de la lumière, on réserve c pour la célérité dans le vide, et v pour la célérité dans un milieu non vide.**

ODG : Par exemple onde sonore dans l'air sec à 20°C : $c = 343\text{ m/s}$.

def : La **célérité de la lumière dans le vide**, notée c , vaut exactement $c = 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Connaître l'ordre de grandeur (ODG) : $c \simeq 3.10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

def : L'**indice de réfraction** n d'un milieu est défini par : $n = \frac{c}{v}$ avec v la célérité dans le milieu, et c la célérité dans le vide.

prop : Grandeur sans dimension : $[n] = 1$. Et $n \geq 1$ car $v \leq c$, donc le vide est le milieu transparent de plus petit indice, et de plus grande célérité.

ordres de grandeurs (ODG) : **connaître n pour vide, air, eau et verre.**

Milieu	vide	air	eau	verre(s)	diamant
n	1	$1,00029 \simeq 1$	1,33	1,5 (de 1,35 à 1,8)	2,42
v (m/s)	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$2,3 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^8$

prop : **Durée de propagation** Δt sur distance Δx dans milieu d'indice n : $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{n \cdot \Delta x}{c}$, donc le vide est le milieu transparent de plus petite durée de propagation.

rq : Le chapitre de fin d'année *PO2-Dispersion et absorption des ondes* sera l'occasion de généraliser la notion d'indice en prenant en compte l'absorption via sa partie imaginaire.

3.2 Longueur d'onde et vecteur d'onde dans un milieu peu dispersif d'indice n

def : La propagation d'une onde est dite **dispersive** si la célérité v (et donc aussi λ et k) dépend de la fréquence. Ce phénomène sera en général négligé dans la partie *Optique* du 1^{er} semestre mais sera étudié chapitre *PO2-Dispersion et absorption des ondes*.

prop : On note $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ la longueur d'onde dans le vide. Alors, dans un milieu d'indice n , λ et k sont donnés par :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \leq \lambda_0 \quad \text{et} \quad k = nk_0 \geq k_0 \quad (1)$$

| démo : Utiliser la relation entre n et v ainsi que la définition de λ et k .

3.3 Dispersion de la lumière

rq : En général, dans un milieu matériel transparent, n décroît avec λ_0 dans le visible où l'infrarouge.

| exo : Dans ce cas, l'onde lumineuse la plus rapide est-elle le rouge ou le violet ?

ex : Formule empirique de Cauchy, non exigible : $n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$.

ODG : Pour le verre ordinaire : $n = 1,528$ pour 434 nm (bleu sombre/violet); $n = 1,517$ pour 589 nm (jaune); $n = 1,511$ pour 768 nm (rouge sombre peu visible).

4 Chemin optique et différence de marche

4.1 Définitions

prop, rappel : **Durée de propagation** Δt sur distance Δx dans milieu d'indice n : $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{n \cdot \Delta x}{c}$.

def : Dans un milieu homogène d'indice n , pour une onde se propageant sur un segment AB, le **chemin optique** entre ces deux points, noté (AB) est :

$$(AB) = n \cdot AB \quad (2)$$

Il est proportionnel à la durée de propagation sur AB : $\Delta t = \frac{(AB)}{c}$.

interprétation : (AB) est la longueur qu'aurait parcouru la lumière dans le vide pendant la même durée.

def : La **différence de marche** en un point M entre deux ondes issues de S est la différence entre les chemins optiques des deux trajets notés 1 et 2 : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = c(\Delta t_2 - \Delta t_1)$. Cette grandeur est proportionnelle à la différence de durée de propagation sur les deux chemins.

attention : Le signe de δ dépend du choix arbitraire du sens de la soustraction, il faut donc toujours explicitement définir δ .

4.2 Lien entre différence de marche et déphasage

→ Comment relier la différence de marche δ entre deux chemins vers M et le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux ondes au niveau de M ?

prop : ★ Deux points séparés d'une différence de marche multiple entier de λ_0 sont en phase.

$$\delta = p\lambda_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\phi = p2\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

★ Deux points séparés d'une différence de marche multiple demi-entier (un entier + 1/2) de λ_0 sont en opposition de phase.

$$\delta = (p + 1/2)\lambda_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\phi = p2\pi + \pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

★ Généralisation :

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \quad (5)$$

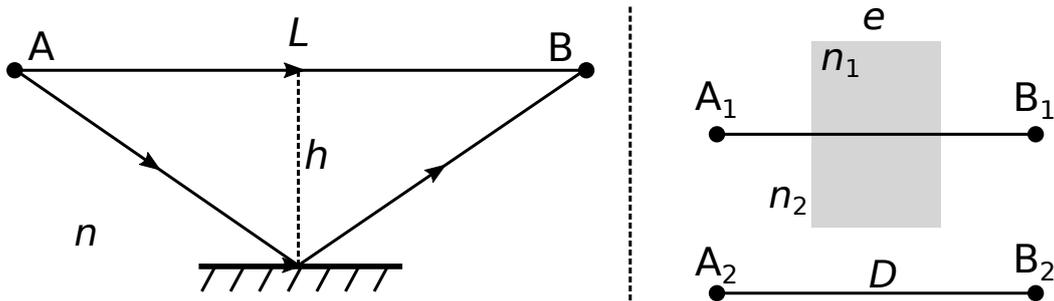
4.3 Cas exceptionnels de déphasage supplémentaire

prop : Jamais de déphasage lors d'une réfraction (par exemple transmission à travers une lentille ou lame de verre).

prop : En revanche, une onde lumineuse subit un déphasage de π , équivalent à un chemin optique supplémentaire de $\lambda_0/2$ dans les cas suivants :

- lors d'une réflexion sur un métal,
- lors d'une réflexion sur un matériau plus réfringent (d'indice plus grand),
- lors d'un passage d'un faisceau laser par un point de convergence (foyer).

4.4 Exemples de calculs de chemins optiques



exo : On admet que la réflexion de la lumière s'accompagne d'un déphasage de π équivalent à un chemin optique supplémentaire de $\lambda_0/2$. Exprimer le chemin optique entre les points A et B dans le cas du trajet direct et le cas de la réflexion sur le miroir, ainsi que le déphasage entre les deux trajets. Comparer le chemin optique entre A_1 et B_1 avec celui entre A_2 et B_2 .

4.5 Généralisation à un milieu non homogène

→ Comment adapter la définition du chemin optique si l'indice n n'est pas uniforme ?

exo : Considérons une source en O ($x = 0$) émettant une onde lumineuse vers x croissant, et un miroir chaud dans le plan $x = L$ qui produit un gradient de température tel que l'indice vaut $n(x) = n_0 - \alpha x$. L'onde arrive sur le miroir en M . Exprimer le chemin optique (OM).

5 Rappel : ondes planes progressives unidimensionnelles

Onde scalaire unidimensionnelle : fonction $s(x, t)$ de position et du temps.

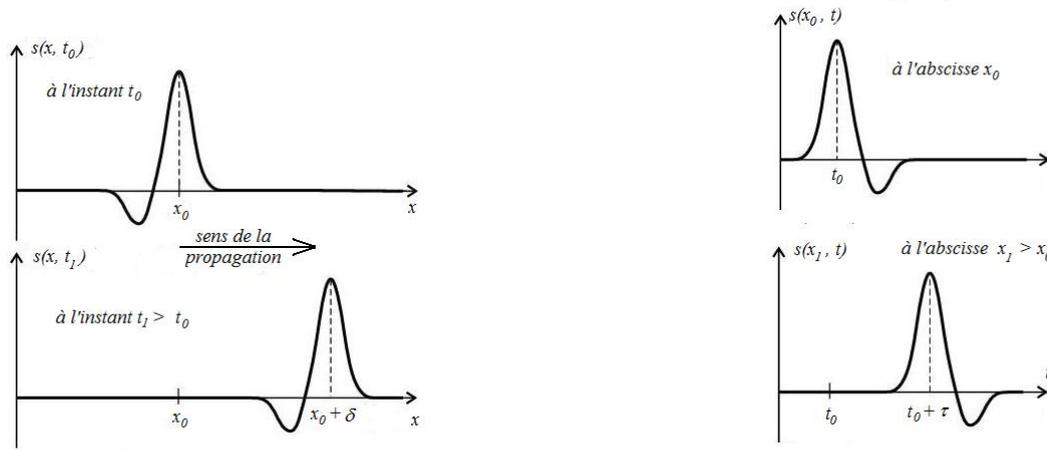
5.1 Représentations graphiques

★ Perturbation en fonction de la position à temps fixé (graphes de gauche) :

Qu'enregistre une photo à un instant donné ?

★ Perturbation en fonction du temps à position fixée (graphes de droite) :

Qu'enregistre un capteur placé à un endroit donné ?



5.2 Expression générale d'une onde plane progressive

prop : Soit **une onde progressive** $s(x, t)$ se propageant à la célérité v . Son expression générale est du type :

• si propagation suivant x croissant : $s(x, t) = f(t - x/v)$ ou $s(x, t) = f(-t + x/v)$

→ signes différents devant x et t ,

• si propagation suivant x décroissant : $s(x, t) = g(t + x/v)$ ou $s(x, t) = g(-t - x/v)$

→ signes identiques devant x et t .

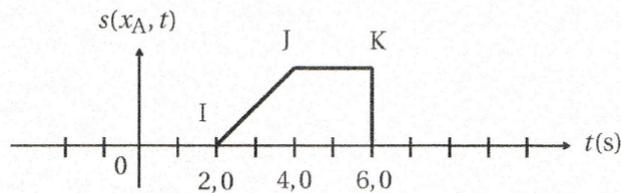
rq : ne regarder seulement que le signe devant x est insuffisant pour conclure du sens de propagation.

rq : de manière équivalente, on peut utiliser les écritures $s(x, t) = f(x - vt)$ et $s(x, t) = g(x + vt)$.

prop : **Durée de propagation** Δt sur distance Δx à célérité v : $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$.

5.3 Exo type sur les ondes progressives

- a) Soit un signal décrit par la grandeur $s(x, t)$. On donne son évolution au point A d'abscisse $x_A = 3,0$ m au cours du temps :



Le signal se propage à la vitesse $c = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dessiner son évolution au cours du temps au point B d'abscisse $x_B = 5,0$ m.

- b) Représenter l'allure spatiale du signal $s(x, t_1)$ à l'instant $t_1 = 4,0$ s.

5.4 Cas d'une onde plane progressive harmonique (OPPH)

prop : Rappel, plus de détails partie 9 : **Décomposition de Fourier** : un signal périodique de pulsation ω se décompose en somme de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de f .

prop : Rappel : Pour un système linéaire, il suffit d'étudier les composantes sinusoïdales qui évoluent indépendamment.

5.4.1 Expression d'une onde plane progressive harmonique

def : Liens entre période T , fréquence f et pulsation ω : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

prop : Soit **une onde plane progressive harmonique**¹ $s(x, t)$ de pulsation ω se propageant à la célérité v . Son expression générale est du type :

- si propagation suitant x croissant : $s(x, t) = f_0 \cdot \cos(\omega(t - x/v) + \phi)$ ou $s(x, t) = f_0 \cdot \cos(\omega(-t + x/v) + \phi)$
- si propagation suitant x décroissant : $s(x, t) = g_0 \cdot \cos(\omega(t + x/v) + \phi)$ ou $s(x, t) = g_0 \cdot \cos(\omega(-t - x/v) + \phi)$

rq : développer $\omega(t \pm x/v) = \omega t \pm (\omega/v)x$ fait apparaître le rapport ω/v homogène à l'inverse d'une longueur.

def : on note $k = \omega/v$, appelé « **norme du vecteur d'onde** » ou plus simplement « **nombre d'onde**² », de dimension $[k] = L^{-1}$.

prop : **Expression la plus utilisée d'une OPPH** :

- si propagation suitant x croissant : $s(x, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \phi)$
- si propagation suitant x décroissant : $s(x, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + kx + \phi)$

rq : ne regarder seulement que le signe devant x est insuffisant pour conclure du sens de propagation. La fonction cosinus est paire, donc $\cos(\omega t - kx + \phi) = \cos(-\omega t + kx - \phi)$. Ainsi, on retrouve qu'une onde se propage selon x croissant si le signe devant x et t est différent. De même, $\cos(\omega t + kx + \phi) = \cos(-\omega t - kx - \phi)$. Ainsi, une onde se propage selon x décroissant si le signe devant x et t est identique.

5.4.2 Double périodicité spatiale et temporelle

- Qu'enregistre un capteur placé en x_0 ?

→ la vibration locale en x_0 : $y(x_0, t) = f_0 \cos(\omega t - kx_0)$. C'est une fonction seulement de t , périodique.

prop : Vibration de période (temporelle) $T = 2\pi/\omega$.

- Qu'enregistre une photo à un instant t_0 ?

→ allure spatiale de vibration à l'instant t_0 : $y(x, t_0) = f_0 \cos(\omega t_0 - kx)$. C'est une fonction seulement de x , périodique.

prop : Vibration de « période spatiale » $\lambda = 2\pi/k$, appelée « **longueur d'onde** ».

- Peut-on relier ces deux périodes T et λ ?

$$\text{prop : } \lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{v}{\omega}$$

5.4.3 Généralisation à une propagation non unidimensionnelle

def : Le **vecteur d'onde** \vec{k} s'écrit $\vec{k} = k\vec{u}$ où sa norme $k = 2\pi/\lambda$ et le vecteur unitaire \vec{u} donne la direction de propagation.

prop : Dans un repère centré en O, soit un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) . Une onde plane progressive harmonique se propageant suivant la direction \vec{u} a pour expression au point M :

$$s(M, t) = s(x, y, z, t) = s_0 \cdot \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi\right) = s_0 \cdot \cos(\omega t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z + \varphi)$$

6 Approche ondulatoire de la propagation de la lumière

Le modèle de l'optique géométrique vu en PCSI considère les rayons lumineux indépendants. Il ne suffit donc pas à décrire les interférences, il faut construire un nouveau modèle.

6.1 Modèle scalaire de la lumière

La lumière est décrite par un modèle ondulatoire : c'est une onde électromagnétique, caractérisée par le couple de vecteurs champ électrique et champ magnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$. Cf cours *E4-Équations de Maxwell*.

1. « Onde plane progressive harmonique » et « onde plane progressive sinusoïdale » sont synonymes.

2. Attention, en spectroscopie, on appelle souvent « nombre d'onde » une autre grandeur très voisine : $\sigma = 1/\lambda = k/2\pi$.

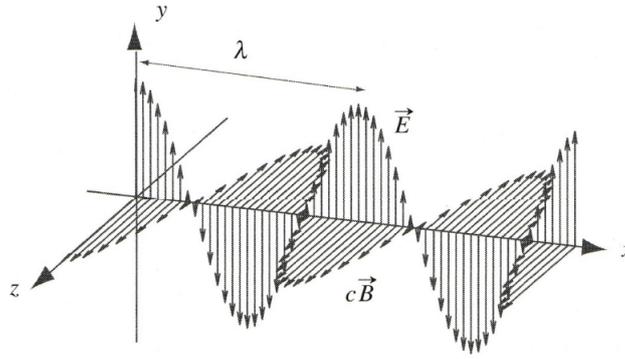


FIGURE 1 – Exemple d'une onde plane progressive dans le vide selon direction de propagation \vec{u}_x , vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et direction de polarisation rectiligne selon \vec{u}_y .

Observation expérimentale : de nombreux phénomènes ne nécessitent pas l'approche vectorielle pour être compris, on va donc simplifier l'approche.

Cadre du cours : **Modèle scalaire des ondes lumineuses**³ : au lieu du couple de vecteurs $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$, on se contente d'un scalaire $s(M, t)$ où la grandeur $s(M, t)$ est proportionnelle à une composante du champ électrique. Par exemple pour le schéma ci-dessus, on prendrait $s(M, t) \propto \vec{E}(M, t) \cdot \vec{u}_y = E_y(M, t)$.

limite du modèle : polarisation des ondes, cf cours *PO1-Propagation non dispersive*.

6.2 Lien entre chemin optique, retard de phase et durée de propagation

prop : Soit une onde plane progressive sinusoidale émise depuis l'origine O et se propageant suivant \vec{u}_x : $s(x, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \phi_0)$.

démo : exprimer le retard de phase en un point $M(x)$ par rapport à l'origine O.

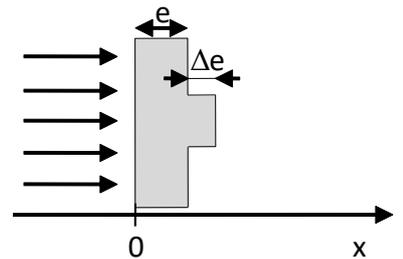
On trouve que la phase en M par rapport à O est : $\phi(M) - \phi(O) = -2\pi \frac{(OM)}{\lambda_0}$

rq : $\phi(M) - \phi(O) < 0$ car l'onde va de O vers M donc est en retard de phase en M par rapport à O.

prop : Le **retard de phase**⁴ $\phi(O) - \phi(M)$ en M par rapport à O est, avec $\tau(M)$ la durée de propagation jusque M :

$$\boxed{\phi(O) - \phi(M) = 2\pi \frac{(OM)}{\lambda_0} = 2\pi \frac{c\tau(M)}{\lambda_0}} \quad (6)$$

exo : Une onde plane arrive sous incidence normale sur une lame d'indice n , d'épaisseur globale e présentant un défaut d'épaisseur Δe . Exprimer le retard de phase (éventuellement fonction de x) pour un rayon passant par le défaut et un autre passant à côté pour différents domaines de x .



7 Notion de surface d'onde

7.1 Définition

def : Trois définitions équivalentes d'une **surface d'onde** d'une onde donnée :

- * l'ensemble des points touchés par l'onde en même temps à t donné,
- * l'ensemble des points où l'onde est de même phase à t donné,
- * l'ensemble des points à même chemin optique depuis la source à t donné.

rq : Pour une onde progressive, il y a une infinité de surface d'onde. En général, on trace celles correspondant au même état de phase, par exemple quand l'onde est maximale, ces surfaces sont alors séparées de λ .

schéma : Lien entre surface d'onde et périodicité spatiale de $s(M, t)$. Exemples.

3. *Compétence exigible (CE)* : Associer la grandeur scalaire de l'optique à une composante d'un champ électrique.

4. CE : Exprimer le retard de phase en un point en fonction du retard de propagation ou du chemin optique.

7.2 Surface d'onde d'une onde sphérique

def : Une **onde sphérique** est une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères de même centre. Elles peuvent sembler provenir du centre (onde divergente) ou bien se diriger vers le centre (onde convergente). Loin de la source, elles sont localement assimilables à des plans.

| schéma : *Surfaces d'onde d'une onde sphérique.*

expression, pas encore exigible : Pour une source placée au centre du repère sphérique, la propagation a lieu selon \vec{u}_r . L'expression de l'onde est $s(M, t) = \frac{s_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \phi_0)$.

interprétation : le terme en $1/r$ indique que l'onde s'atténue en s'éloignant de la source. Il sera mesuré en TP. Il sera démontré plus tard dans l'année.

production d'une onde sphérique : à partir d'une source lumineuse suffisamment petite (« source ponctuelle »).

7.3 Surface d'onde d'une onde plane

def : Une **onde plane** est une onde dont les surfaces d'ondes sont des plans orthogonaux à la direction de propagation. La valeur de l'onde ne dépend donc que de la coordonnée le long de la direction de propagation, elle est uniforme dans chaque plan orthogonal à la propagation.

expression : Pour une onde plane se propageant selon $+\vec{u}_x$, l'expression d'une onde plane harmonique est $s(M, t) = s_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \phi_0)$.

contrexemple : $s(M, t) = s_0 \cdot \cos(\alpha y) \cdot \cos(\omega t + kx + \phi_0)$ n'est pas une onde plane. Dans un plan orthogonal à la direction de propagation $-\vec{u}_x$, la valeur de l'onde n'est pas uniforme (dépend de y).

production d'une onde plane : * source très éloignée émettant des ondes sphériques,

* ou bien placer une source quasi-ponctuelle au foyer objet d'une lentille convergente.

| attention : *Un faisceau de rayons parallèles n'est pas forcément une onde plane.*

7.4 Généralisation : théorème de Malus

prop : **Théorème de Malus** : Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

attention : La réciproque n'est pas toujours vraie. Cf ex précédent où différents rayons parallèles ne partagent pas forcément leur surface d'onde.

→ **En pratique, des rayons lumineux qui subissent les mêmes dioptries et ne sont pas diffractés ont bien une surface d'onde perpendiculaire.**

démo : hors-programme.

| ex : *On éclaire un dioptre par un faisceau de rayons parallèles. Tracer les surfaces d'onde avant et après le dioptre.*

7.5 Effet de la traversée d'une lentille mince

| schéma : *Rayons entre deux points conjugués. Comparer les chemins optiques de chaque trajet.*

prop, conséquence du théorème de Malus : Soient deux points A et A' conjugués par une lentille mince dans les conditions de Gauss. Alors **le chemin optique de tous les rayons de A à A' est identique**⁵.

→ Les rayons issus de A arrivent donc avec la même phase en A', donc pas d'interférences destructives!

| contradiction apparente : *Les chemins optiques de A à A' sont identiques. Pourtant, les longueurs des trajets sont différentes! Comment expliquer cette contradiction?*

| exo : *Soit une source ponctuelle au foyer objet d'une lentille convergente. Déterminer la différence de chemin optique pour différents points après la lentille.*

7.6 Exemple d'utilisation du principe de retour inverse

prop : Le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation.

5. CE : Utiliser l'égalité des chemins optiques sur les rayons d'un point objet à son image.

| exo : Parfois, « partir de la fin » est utile pour estimer des chemins optiques. Exemple.

8 Rappel : les sources lumineuses

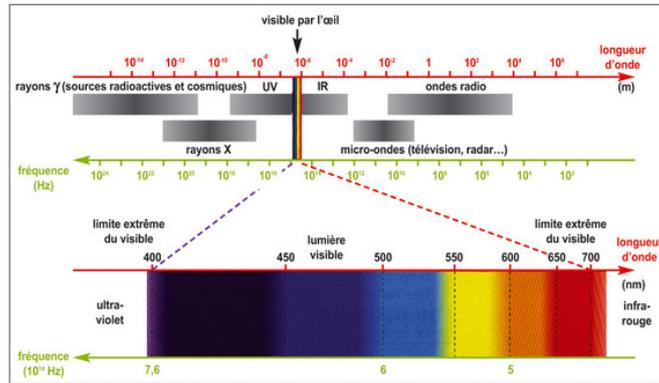


FIGURE 2 – Spectre des ondes électromagnétiques et de la lumière visible.

ODG : **Connaître l'ODG** des domaines approximatifs des couleurs en nanomètres. Savoir retrouver l'ODG de la fréquence, période, norme de \vec{k} dans le visible :

violet	bleu	vert	jaune	orange	rouge
400-460 nm	450-490	490-570	570-584	584-605	605-750

| exo : À votre avis, quelle longueur d'onde correspondrait à la couleur « turquoise » ? En déduire la période, fréquence et norme de \vec{k} .

8.1 Lampes à incandescence

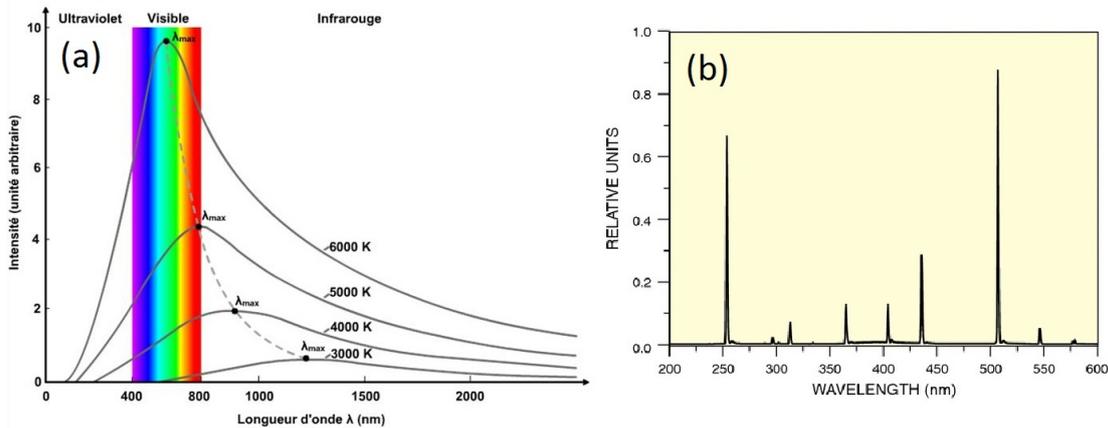


FIGURE 3 – (a) Spectre de rayonnement thermique pour différentes températures. (b) Spectre d'une lampe spectrale à vapeur de mercure/argon.

Principe physique : rayonnement thermique.

Allure du spectre : **spectre continu large** dont la longueur d'onde du maximum décroît et l'intensité croît avec la température, voir figure 3a. Largeur spectrale $\Delta\lambda$ de plusieurs centaines de nanomètres. Modélisation par rayonnement du corps noir.

Objet	Géantes bleues	Soleil	filament d'une lampe	corps humain	fond diffus cosmologique
Température (K)	> 20 000	5800	2800	310	2,728
λ_{\max} (nm)	150	500	10^3	$9 \cdot 10^3$	10^6

8.2 Lampes spectrales

Principe physique : quantification des niveaux d'énergie d'un atome \Rightarrow échange d'énergie par photons de fréquence ν .

Différence d'énergie entre deux niveaux $E = E_2 - E_1$; énergie de photon $E = h\nu$ avec $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s constante de Planck. Ainsi : $\nu = (E_2 - E_1)/h$.

Allure du spectre : **spectre de raies fines** (de largeur $\Delta\lambda$ de 0,1 à 0,01 nm), dit spectre discret, voir figure 3b.

8.3 Lasers

Principe physique : émission stimulée. Mise en œuvre : cavité résonnante + milieu amplificateur gazeux (lasers He-Ne) ou solide (diodes lasers). Cf cours *PO4-Lasers*.

Allure du spectre : **spectre d'un nombre restreint de raies encore plus fines** que dans le cas des lampes spectrales : $\Delta\lambda$ de 0,002 nm pour un laser HeNe de TP (de longueur d'onde centrale environ 632,8 nm); jusqu'à 10^{-6} nm pour un laser stabilisé; encore beaucoup moins pour les records de laboratoire.

9 Rappel : caractéristiques des signaux périodiques

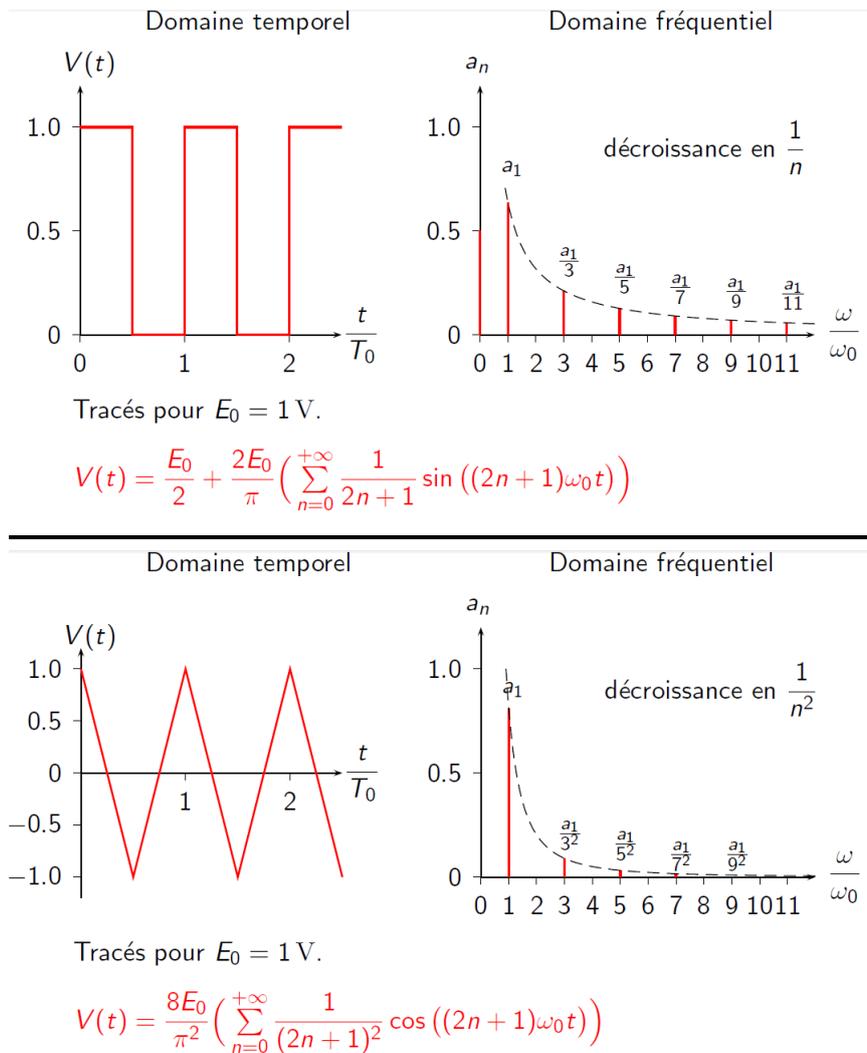


FIGURE 4 – Exemples de signal temporel $V(t)$, son spectre $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa décomposition de Fourier dans l'exemple d'un signal carré ou triangulaire.

9.1 Décomposition de Fourier

Théorème : Un signal temporel périodique $s(t)$ de fréquence $f = 1/T$ s'écrit par **décomposition de Fourier** en une somme discrète ^a :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(2\pi nft + \varphi_n) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

a. Généralisation hors-programme : Un signal quelconque peut se décomposer en une somme continue (une intégrale) de sinusoides.

prop : Un signal de fréquence f est décomposable en sinusoides de fréquences $f_n = n \times f$ où $n \in \mathbb{N}$. $n = 0$ correspond à la composante constante, $n = 1$ correspond au **fondamental**, les $n > 1$ correspondent aux **harmoniques**.

def : Le **spectre** d'un signal $s(t)$ périodique est la représentation des amplitudes s_n des harmoniques (ordonnées) en fonction des fréquences (ou pulsation). Cf figure 4.

prop : Le spectre d'une sinusoides est composé d'un seul pic. Plus un signal est irrégulier, plus son spectre comporte de pics.

9.2 Moyenne d'un signal périodique

def : La **valeur moyenne** $\langle s(t) \rangle$ de $s(t)$ de période T s'écrit :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad \forall t_0 \quad (7)$$

ex : Calculer la moyenne des signaux suivants : $s_1(t) = S = \text{cte}$, $s_2(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$, $s_3(t) = s_2^2(t)$, $s_4(t) = S_m \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \psi)$. Astuce : formules $\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$ et $\sin(a) \cos(b) = (\sin(a-b) + \sin(a+b))/2$.

prop : pour une moyenne sur un intervalle multiple de la période $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0 \quad (8)$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2 \quad (9)$$

prop : **Linéarité** de la moyenne : $\langle s_1(t) + s_2(t) \rangle = \langle s_1(t) \rangle + \langle s_2(t) \rangle$.

prop : la moyenne d'une fonction périodique est le terme d'ordre 0 de sa décomposition de Fourier :

$$\langle s(t) \rangle = \left\langle s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(2\pi nft + \varphi_n) \right\rangle = s_0 \quad (10)$$

9.3 Valeur efficace d'un signal périodique

Valeur efficace : But : prendre en compte aussi la partie oscillante ; énergie souvent proportionnelle à un carré.

$$\text{moyenne quadratique} = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt \quad (11)$$

Pour comparaison avec le signal, on construit une grandeur homogène à $s(t)$ en prenant la racine :

$$\text{def : valeur efficace} = S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} \quad (12)$$

Exemple sinusoidal : Calculer la valeur efficace de $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \phi)$.

prop : la valeur efficace d'un signal sinusoidal est proportionnelle à son amplitude :

$$s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \implies \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

10 Émission et réception de lumière

10.1 Durée et longueur de cohérence

| schéma : *Illustration de la notion de train d'onde.*

prop : Une onde émise est constituées de trains d'onde d'amplitudes, phases et polarisation non corrélées.

def : La durée moyenne d'un train d'onde d'une source est appelée **durée de cohérence** τ_c .

def : La distance parcourue dans le vide pendant τ_c est appelée **longueur de cohérence** $L_c = c \cdot \tau_c$.

10.2 Lien avec la largeur spectrale

animation : *Synthèse de Fourier*. Source : <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/synthese.php>.

| schéma : *Que dire de la durée de cohérence d'une source émettant une onde sinusoïdale parfaite ? Comparer les deux trains d'onde ci-dessous.*

Activité numérique

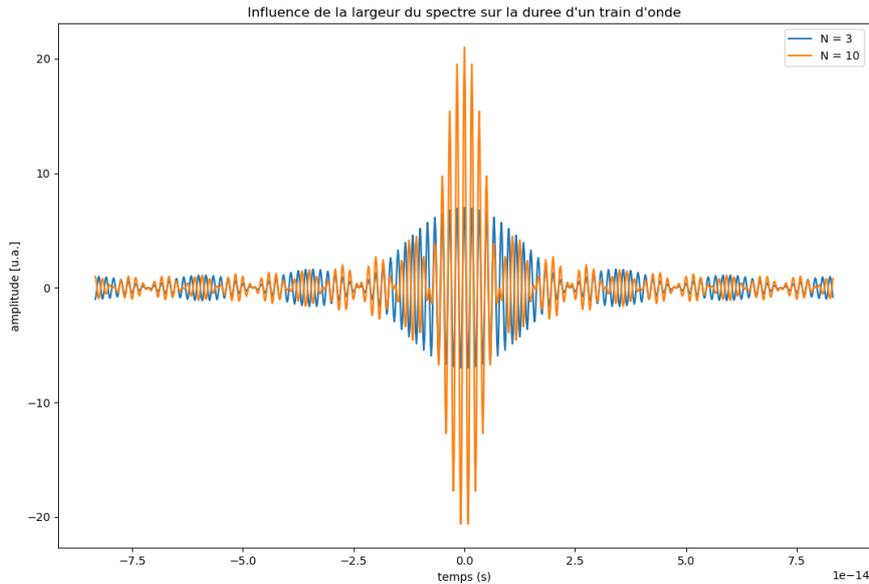
On considère une onde $s(x=0, t) = \sum_{n=-N}^N \cos(\omega_n t)$ constituée de sinusoïdes de pulsations⁶ voisines $\omega_n = \omega_0 + n\delta\omega$ avec $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # longueur d'onde et pulsation centrale du paquet d'onde
5 lambda_0 = 500e-9 # longueur d'onde en mm
6 w_0 = 2*np.pi*3e8 / lambda_0 # pulsation centrale, avec celerite lumiere dans vide
7
8 # choix du spectre, peigne de pulsation d'intervalle dw entre pics, et largeur totale 2*N*dw
9 # [ w - N*dw, ..., w, ..., w + N*dw ]
10 dw = 0.01 * w_0
11 N = 10
12
13 # valeurs de temps t entre -50 et 50 periodes separees de 0.1 periode
14 t = np.arange( -50 , 50 , 0.1 ) * 2 * np.pi / w_0
15 s = np.zeros( len(t) )
16 for n in range(-N , N+1):
17     w_n = w_0 + n*dw
18     s += np.cos( w_n * t )
19 plt.plot( t , s , label='N = {0:.0f}'.format(N) )
20 plt.title("Influence de la largeur du spectre sur la duree d'un train d'onde")
21 plt.xlabel('temps (s)')
22 plt.ylabel('amplitude [u.a.]')
23 plt.legend()

```

6. On dit que c'est un « peigne de fréquence » car spectre de raies régulièrement espacées.



prop : Plus le spectre est large, plus le train d'onde est court.

prop : Le temps de cohérence τ_c et la largeur spectrale (en fréquence) $\Delta\nu$ d'une onde sont reliés par $\tau_c \cdot \Delta\nu \simeq 1$.

démo : Hors-programme. Lien avec transformée de Fourier (comme relation d'incertitude d'Heisenberg).

prop : Le temps de cohérence⁷ τ_c et la largeur spectrale (en longueur d'onde) $\Delta\lambda$ d'une onde de longueur d'onde

moyenne λ_m sont reliés par $\tau_c \cdot \left(\frac{c}{\lambda_m^2} \Delta\lambda \right) \simeq 1$. Valable si $\lambda_m \gg \Delta\lambda$.⁸

| démo : Commencer par exprimer $|d\lambda/d\nu|$, puis l'assimiler au rapport des largeurs spectrales.

10.3 ODG de τ_c , L_c , $\Delta\nu$, $\Delta\lambda$

Source	λ_m (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)	$\Delta\nu$ (Hz)	τ_c (s)	L_c
Lampe blanche	$\simeq 575$	$\simeq 350$	$3 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$0,9 \mu\text{m}$
Raie verte d'une lampe mercure haute pression	546,1	1,0	10^{12}	10^{-12}	0,3 mm
Laser He-Ne usuel	632,8	0,0013	10^9	10^{-9}	30 cm
Laser He-Ne stabilisé	632,8	$1,3 \cdot 10^{-8}$	10^4	10^{-4}	30 km

| exo : Pour une source donnée, retrouver les valeurs de τ_c à partir de $\Delta\lambda$ ou $\Delta\nu$.

prop : τ_c est grand devant période de l'onde (sauf lampe blanche). Donc beaucoup d'oscillations par train d'onde !

10.4 Détection d'une onde lumineuse

10.4.1 Temps de réponse des capteurs usuels

rq : Le temps de réponse d'un capteur dépend beaucoup du circuit électrique auquel il est relié, ces ODG sont donc approximatifs⁹ :

Détecteur	Oeil	CCD	Photodiode
Temps de réponse	$60 \cdot 10^{-3}$ s	10^{-2} à 10^{-3} s	10^{-6} à 10^{-12} s

7. CE : Classifier différentes sources lumineuses (lampe spectrale basse pression, laser, source de lumière blanche) en fonction du temps de cohérence de leurs diverses radiations et connaître quelques ordres de grandeur des longueurs de cohérence temporelle associées.

8. CE : Utiliser la relation $\tau_c \cdot \Delta\nu \simeq 1$ pour relier le temps de cohérence et la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la radiation considérée.

9. CE : Citer le temps de réponse de l'oeil.

observation : Temps de réponse toujours très grand devant la période d'une onde lumineuse!! Aucun ne réagit assez vite pour suivre l'aspect ondulatoire!

10.4.2 Notion d'intensité lumineuse ou éclairement

Les capteurs n'ont pas le temps de suivre les oscillations périodiques de l'onde lumineuse, ils sont en général sensibles à la valeur moyenne de l'énergie lumineuse, proportionnelle au carré de \vec{E} , cf cours électromagnétisme (analogie autres énergies).

Pour $s(t) \propto \cos(\omega t)$, $s^2(t) \propto \cos^2(\omega t) = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} = 1/2 + \cos(2\omega t)/2$. Donc l'énergie possède une composante continue, et une à très haute fréquence indétectable.

def : Donc on définit l'**intensité lumineuse** : $I = \text{cte} \times \langle s(t)^2 \rangle$. C'est la grandeur mesurable par les capteurs¹⁰.

Unité : W/m².

rq : L'étude de la constante reliant l'intensité lumineuse et l'amplitude de l'onde s n'est pas essentielle à notre programme dans les chapitres d'optique.

rq : Dans notre programme, on ne fera pas la distinction entre « intensité lumineuse » et « éclairement ».

10. CE : Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique.