Révisions de PCSI : mécanique - Correction

1.3 Projection dans une base

exo : *[Vérifier les cas extrêmes ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$) pour corriger une formule fausse.]*

1. $\boxed{\overrightarrow{P} = mg(\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} - \cos(\alpha)\overrightarrow{u_y})}$.
2. $\boxed{\overrightarrow{T} = T(-\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} + \cos(\alpha)\overrightarrow{u_y})}$.
   [Attention : pour un angle orienté, il faut une expression valable aussi bien pour $\alpha > 0$ et pour $\alpha < 0$.]
3. $\boxed{\overrightarrow{F} = \dfrac{GMm}{h^2+d^2}\left(-\dfrac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{h}{\sqrt{h^2+d^2}}\overrightarrow{u_y}\right)}$
   [En cohérence avec le schéma, vérifier que la composante suivant $\overrightarrow{u_x}$ est bien négative, et positive suivant $\overrightarrow{u_y}$.]

1.4.3 Opérations sur les vecteurs de base

ex : $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{u_y}$, $(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}) \wedge \overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{u_y} + \overrightarrow{u_x}$, $(\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_z}) \wedge \overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_\theta}$.

2.2 Coordonnées cylindriques

exo : *Exprimer les vecteurs de la base cylindrique en fonction de ceux de la base cartésienne. Et faire le contraire.*
$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y}$.
$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}$.
$\overrightarrow{u_x} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.
$\overrightarrow{u_y} = \sin(\theta)\overrightarrow{u_r} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$.

IMPORTANT : *Formule à connaître, à savoir démontrer, à savoir interpréter.*
Comme $\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y}$,
$d\overrightarrow{u_r}/dt = -\dot\theta\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \dot\theta\cos(\theta)\overrightarrow{u_y} = \dot\theta\overrightarrow{u_\theta}$.
Comme $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}$,
$d\overrightarrow{u_\theta}/dt = -\dot\theta\cos(\theta)\overrightarrow{u_x} - \dot\theta\sin(\theta)\overrightarrow{u_y} = -\dot\theta\overrightarrow{u_r}$.

2.3 Coordonnées sphériques

exo : *Exprimer les vecteurs de la base sphérique en fonction de ceux de la base cartésienne. Et faire le contraire.*
$\overrightarrow{u_r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_y} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_z}$,
$\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_y} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_z}$,
$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{u_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{u_y}$,
$\overrightarrow{u_x} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{u_r} + \cos(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{u_\theta} - \sin(\varphi)\overrightarrow{u_\varphi}$,
$\overrightarrow{u_y} = \sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_r} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_\theta} + \cos(\varphi)\overrightarrow{u_\varphi}$,
$\overrightarrow{u_z} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

4.2.1 Exo sur le choix de théorème énergétique

exo :

1. *[On cherche à relier l'état en un point avec l'état initial, donc on utilise une version « variation » des théorèmes énergétiques.]*
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique au skieur entre O et A : $\Delta E_c = E_c(A) - E_c(O) = W(\overrightarrow{P})$ car seul le poids $\overrightarrow{P}$ travaille ici en l'absence de frottement.
   Alors $mv_A^2/2 - 0 = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{OA} = mgd\sin(\alpha)$. Donc $\boxed{v_A = \sqrt{2gd\sin\alpha}}$ qui est bien sûr nulle si $\alpha = 0$.
   [On trouve la même chose en utilisant le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = 0$ qui donne $E_m(A) = E_m(O)$ soit $mv_A^2/2 + 0 = 0 + mgd\sin(\alpha)$.]
2. *[On cherche une équation du mouvement (donc une équation différentielle), donc on utilise une version « dérivée » des théorèmes énergétiques.]*
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de la puissance cinétique au skieur : $dE_c/dt = \mathcal{P}(\overrightarrow{P})$ car seul le poids $\overrightarrow{P}$ travaille ici en l'absence de frottement.
   Alors $(m/2)d(v^2)/dt = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{P} = vmg\sin(\alpha)$. Donc $(m/2)2v\dot v = vmg\sin(\alpha)$.
   D'où $\boxed{\dot v = g\sin\alpha}$, chute dans champ de pesanteur apparent $g\sin\alpha$.
   [On trouve la même chose en utilisant le théorème de la puissance mécanique : $dE_m/dt = 0$ ou bien le PFD.]