

## MF2 : Actions mécaniques dans un fluide en mouvement

Considérons une particule de fluide en mouvement. Classons les actions de contact sur cette particule en deux cas :

- ★ les contraintes orthogonales à sa surface, dites *normales* : les forces de pression que vous connaissez déjà.
- ★ les contraintes tangentes à sa surface, dites *tangentiell*es : les forces de viscosité, introduites dans ce chapitre.

Une particule de fluide peut subir aussi d'autres actions mécaniques, par exemple dues aux effet d'inertie d'entraine-ment et de Coriolis.

### 1 Contrainte normale : pression (rappel de MF0)

#### 1.1 Force de pression

def : La **pression**  $p(M)$  en un point M à la surface d'une particule de fluide est définie<sup>1</sup> par la force extérieure normale en M :

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{int}} = p(M) \cdot d\vec{S}_{\text{ext} \rightarrow \text{int}}} \quad (1)$$

#### 1.2 Densité volumique des forces de pression

prop : La densité<sup>2</sup> volumique de forces de pression  $\vec{f}_p = d\vec{F}/dV$  s'écrit :

$$\boxed{\vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)} \quad (2)$$

interprétation : Les hautes pressions poussent les particules de fluide vers les basses pressions. Donc force dirigée vers les basses pressions, donc opposée au gradient de pression.

→ On peut interpréter  $p$  comme une énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.

prop : Effet nul si le champ de pression est homogène.

### 2 Contrainte tangentielle : viscosité

#### 2.1 Observations expérimentales

- Écoulement de Couette : écoulement à basse vitesse d'un fluide entre deux surfaces dont l'une est en mouvement par rapport à l'autre.

vidéo : Écoulement de Couette cylindrique : *Taylor Couette Flow - High Viscosity Liquid*,  
<https://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ>.

- Écoulement de Poiseuille : écoulement à basse vitesse d'un fluide dans une conduite cylindrique.

vidéo : *La physique animée : Écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux*, à partir de 1 min 59 s,  
<https://youtu.be/P05yYbnApFc?t=119>.

Cf figures page suivante. Ces écoulements seront étudiés plus en détails dans le chapitre suivant.

1. CE : Exprimer la force de pression exercée par un fluide sur une surface élémentaire.

2. CE : Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.

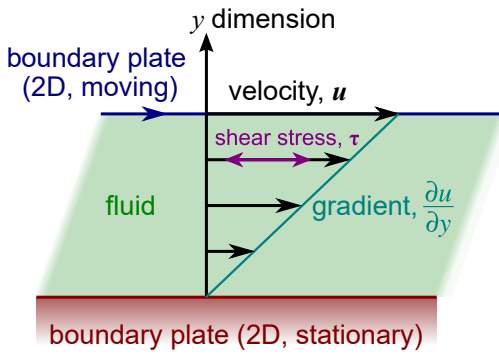


FIGURE 1 – Champ des vitesses d’un écoulement de Couette plan stationnaire. La vitesse est plus forte près de l’objet en mouvement.

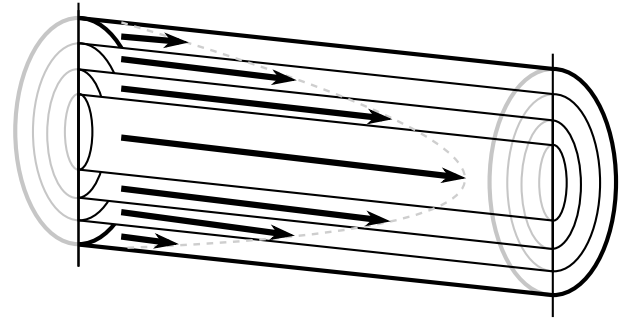


FIGURE 2 – Champ des vitesses d’un écoulement de Poiseuille cylindrique stationnaire. La vitesse est plus grande au centre.

## 2.2 Force de cisaillement

cadre du programme pour la force de cisaillement : Champ des vitesses de la forme  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ . Correspond par exemple à un écoulement de Couette plan ou Poiseuille entre deux plans.

| schéma : Interpréter l’expression de la force de cisaillement sur une particule de fluide.

prop, non exigible mais à savoir utiliser si fournie : Pour un écoulement  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ , la force tangentielle<sup>3</sup>  $d\vec{F}$  subie par une surface  $dS$  de particule de fluide sous l’action de la particule du côté de  $y$  croissant est :

$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x \tag{3}$$

def : Le paramètre  $\eta > 0$  (« eta ») est appelé **viscosité dynamique**.

unité :  $\eta$  en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} = \text{Pa}\cdot\text{s}$ , appelé parfois le poiseuille noté Pl.

ODG : en général vers 20 ° C et 1 bar :

Fluide	air	eau	huile d’olive	glycérine	miel	poix (par exemple bitume)
$\eta$ (Pa.s)	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	1,49	$10^2 - 10^4$	$10^{11}$

interprétations : ★ La contrainte tangentielle est nulle si le champ de vitesses est uniforme.

★ En cas d’inhomogénéités du champ de vitesses, les zones de vitesse importante tendent à accélérer les zones de faible vitesse. Les zones de vitesse faible tendent à ralentir les zones de forte vitesse.

★ Ainsi, la force de cisaillement tend à homogénéiser le champ de vitesses.

def : On dit qu’un fluide est **parfait** si sa viscosité est négligeable ( $\eta = 0$ ).

Alors, les particules de fluide proches peuvent avoir des vitesses très différentes.

def : Le paramètre  $\nu = \eta/\mu$  (« nu ») est appelé **viscosité cinématique**.

unité :  $\nu$  en  $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ , comme un coefficient de diffusion.

ODG : en général vers 20 ° C et 1 bar :

Fluide	air	eau
$\nu$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$

rq : Pour la plupart des fluides, la force de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse, ce qui définit une viscosité constante. On dit qu’ils sont des **fluides newtoniens**. Le sable mouillé de bord de mer est un exemple de fluide non-newtonien : il semble solide (viscosité importante) quand on appuie fort dessus, mais semble plus mou (viscosité plus faible) si on appuie plus doucement. Un autre exemple typique réalisable à la maison est un mélange



3. CE : Utiliser l’expression fournie de la force tangentielle.

épais d'eau et de féculé de maïs (par exemple Maïzena), dans lequel une main entre aisément à faible vitesse, mais ne peut rentrer à grande vitesse<sup>4</sup>.

## 2.3 Opérateurs laplacien scalaire et laplacien vectoriel

### 2.3.1 Rappel sur le laplacien scalaire

def : L'opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire  $f(M, t)$  :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)) \quad (4)$$

def : L'opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire  $f(x, y, z, t)$  en cartésien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (5)$$

★ Applications courantes : équation de diffusion  $\partial T/\partial t = D\Delta T$ , équation de Poisson  $\Delta V + \rho/\varepsilon_0 = 0$  (cf *E2-Électrostatique*), etc.

★ Opérateur de  $\mathbb{R}$  (scalaire) dans  $\mathbb{R}$  (scalaire).

★ Unité de  $\Delta f$  : (unité de  $f$ )/(longueur)<sup>2</sup>.

ex :  $\Delta T$  en  $\text{K.m}^{-2}$ .

Pour les autres géométries (cylindrique, sphérique) : connaissance non exigible de l'expression de  $\Delta$ , mais savoir utiliser les expressions fournies.

### 2.3.2 L'opérateur laplacien vectoriel

def : L'opérateur **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel  $\vec{A}(M, t)$  :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) \quad (6)$$

rq : Attention, la définition comporte un terme supplémentaire que celle du laplacien scalaire.

def : L'opérateur **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel  $\vec{A}(x, y, z, t) = (A_x, A_y, A_z)$  en cartésien :

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

**Cela revient à appliquer le laplacien scalaire à chacune des composantes de  $\vec{A}$ .**

★ Applications courantes : force volumique de viscosité  $\vec{f} = \eta\Delta\vec{v}$ , etc.

★ Opérateur de  $\mathbb{R}^3$  (vecteur) dans  $\mathbb{R}^3$  (vecteur).

★ Unité de  $\|\Delta\vec{A}\|$  : comme unité de  $\Delta A$ .

ex :  $\Delta\vec{B}$  en  $\text{T.m}^{-2}$ .

Pour les autres géométries (cylindrique, sphérique) : connaissance non exigible de l'expression de  $\Delta$ , mais savoir utiliser les expressions fournies.

4. Je vous laisse le soin de trouver vous-même des vidéos où on court sur la surface d'une piscine de Maïzena, ou bien si on en met au dessus d'un haut-parleur.

## 2.4 Densité volumique de forces de viscosité pour un fluide incompressible

prop : Pour un fluide incompressible, l'équivalent volumique des forces de viscosité :

$$\vec{f} = \eta \Delta \vec{v} \quad (8)$$

où  $\Delta \vec{v}$  est le laplacien vectoriel du champ des vitesses.

Cette relation est valable même pour un écoulement différent du cadre de la démo.

démo exigible dans le cas  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ <sup>5</sup> : Effectuer un bilan des forces tangentielles sur une particule de fluide pour en déduire la force volumique dans ce cadre.

interprétation : Pour  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ , force volumique nulle si  $\Delta v_x = \partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$ , soit un gradient uniforme  $\partial v_x / \partial y = \text{cte}$ . Dans ce cas, une particule de fluide est autant emportée par ses voisines rapides que retenue par ses voisines lentes.

## 2.5 Conditions aux limites pour un fluide sur une paroi

On note  $v_\perp$  la vitesse relative du fluide selon une direction normale à la paroi, et  $v_\parallel$  la vitesse relative tangente à la paroi.

• prop : Les **conditions aux limites** d'un fluide sur une paroi sont :

$$\text{toujours valable : } v_\perp = 0 \quad (9)$$

interprétation : Le fluide « ne rentre pas » dans la paroi. Mais il peut en général glisser contre.

• prop : Les **conditions aux limites d'un fluide visqueux** sur une paroi sont :

$$\text{pour fluide visqueux : } v_\parallel = 0 \quad (10)$$

interprétation : Si le fluide est visqueux, il « est accroché » par la paroi. C'est une approximation.

## 2.6 Interprétation microscopique de viscosité par diffusion de quantité de mouvement

Dans l'expérience de Couette, les particules de fluide se déplacent horizontalement, aucun mouvement vertical n'est visible. Cependant, à l'échelle microscopique, en plus du mouvement d'ensemble de convection, les molécules se déplacent en tous sens sous l'agitation thermique.

Ainsi, sur la figure de l'écoulement de Couette, une partie des molécules du haut acquièrent de la vitesse car « tractées » par la paroi mobile. Ces molécules rapides peuvent alors diffuser plus bas. Les particules de fluides inférieures qui accueillent les molécules rapides voient donc leur quantité de mouvement totale augmenter, donc équivalent à l'action d'une force vers l'avant.

Réciproquement, des molécules lentes des zones inférieures diffusent vers les zones supérieures. Celles-ci voient donc leur quantité de mouvement totale diminuer, donc équivalent à l'action d'une force vers l'arrière.

C'est ainsi que le déplacement de la paroi supérieure finit par être « ressenti » par les molécules du bas : de la quantité de mouvement est transférée dans l'épaisseur du fluide par l'agitation microscopique. Notons que ce mouvement vertical des molécules est à moyenne nulle, et donc invisible à l'échelle macroscopique.

5. CE : Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas d'un écoulement de cisaillement à une dimension et utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.

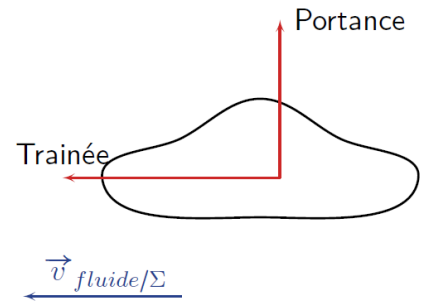
### 3 Traînée sur un obstacle

#### 3.1 Notion de traînée et portance

def : En travaillant dans le référentiel lié à un solide  $\Sigma$  étudié, la force qu'exerce le fluide en écoulement sur le solide peut se décomposer en :

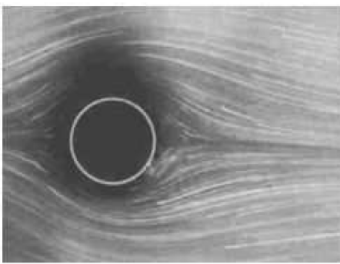
★ La traînée  $\vec{T}$ , tangente à l'écoulement du fluide. Ce sont les « frottements fluides ».

★ La portance  $\vec{N}$ , normale à l'écoulement du fluide. Ce qui permet à un avion ou un foil de décoller.

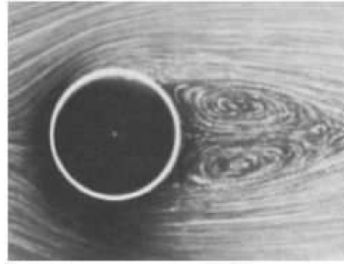


#### 3.2 Observations expérimentales

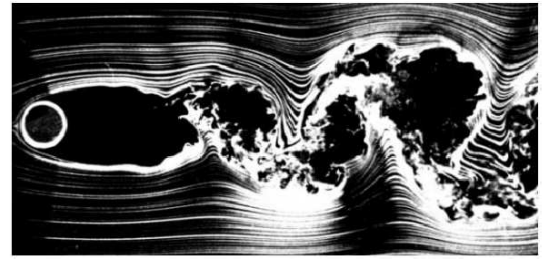
• expérience : Observation des lignes de courant autour d'un obstacle sphérique en fonction du nombre de Reynolds  $Re \propto v$  défini plus tard. Dans le référentiel de l'obstacle, l'écoulement est de gauche à droite.



$Re = 15$



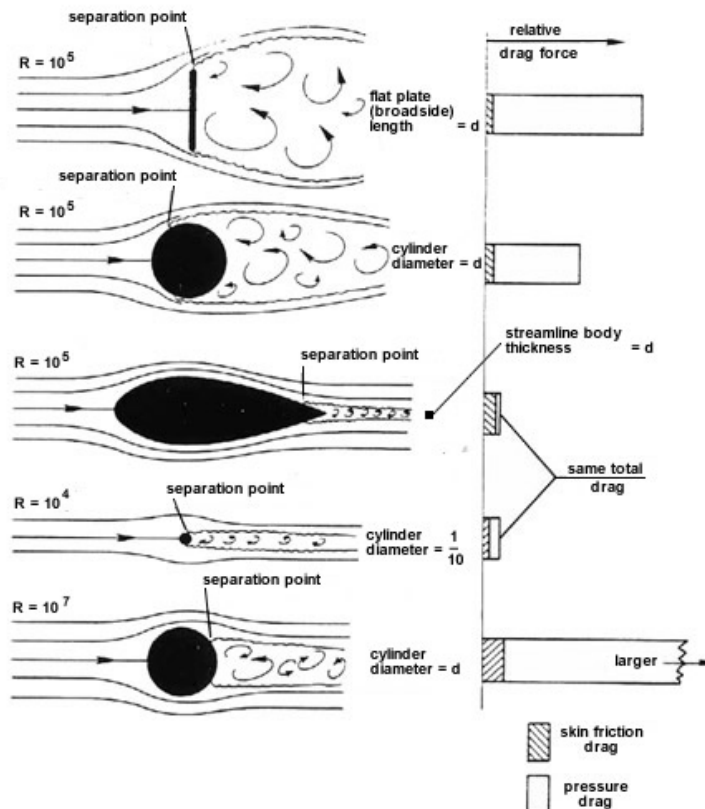
$Re = 260$



$Re > 1000$

observations : Plus la vitesse d'écoulement est forte, plus les lignes de champ sont irrégulières à l'arrière de l'obstacle.

• expérience : Observation des lignes de courant autour d'obstacles de différentes formes à plusieurs valeurs du nombre de Reynolds  $Re \propto v$  défini plus tard. Dans le référentiel de l'obstacle, l'écoulement est de gauche à droite.



observations : ★ À même  $Re$ , la traînée est d'autant plus faible que le profil de l'obstacle est « profilé ».

★ Pour un même obstacle, la traînée augmente avec  $Re$  et donc avec la vitesse.

### 3.3 Nombre de Reynolds

La variété des allures des champs de vitesses s'explique par la comparaison de l'influence de deux termes :

★ effets de viscosité : plus la viscosité est forte, plus le mouvement est lisse. ODG de la force volumique de viscosité :

$$\vec{f} = \eta \Delta \vec{v} \quad \text{donc en ODG : } f \simeq \eta \frac{v}{L^2} \quad (11)$$

★ effets de convection : plus la convection est forte, moins la viscosité empêche les turbulences. L'accélération convective vaut  $\overline{a_{conv}} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ . On peut alors construire un terme homogène à une force volumique  $\vec{f} = \mu \overline{a_{conv}}$  :

$$\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \quad \text{donc en ODG : } \mu \frac{v^2}{L} \quad (12)$$

★ bilan :

$$\frac{\text{effets de convection}}{\text{effets de viscosité}} \simeq \frac{\mu v^2 / L}{\eta v / L^2} = \frac{\mu L v}{\eta} \quad (13)$$

def : Le **nombre de Reynolds** Re est défini par :

$$\text{Re} = \frac{\mu L v}{\eta} = \frac{L v}{\nu} \quad (14)$$

avec la masse volumique  $\mu$ ,  $L$  la longueur caractéristique des obstacles,  $v$  la vitesse de l'écoulement loin de l'obstacle,  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\nu = \eta / \mu$  la viscosité cinématique.

unité : C'est un nombre sans dimension.

rq : on peut justifier l'expression de Re d'autres manières :

$$\text{Re} = \frac{\text{durée de diffusion}}{\text{durée de convection}} = \frac{\text{énergie cinétique}}{\text{énergie dissipée par viscosité}} \quad (15)$$

### 3.4 Écoulement laminaire ou turbulent

def : On dit qu'un écoulement est **laminaire** si les lignes de courants sont régulières. Sinon, on dit qu'il est **turbulent**.

prop : ★ Si  $\text{Re} \ll 1$ , l'écoulement est laminaire (la viscosité domine).

★ Si  $\text{Re} \gg 1$ , l'écoulement est turbulent (la viscosité est négligeable).

→ En pratique, la frontière entre les domaines laminaire et turbulent est pour environ Re entre 1 et 100.

prop : L'écoulement est d'autant plus laminaire que la vitesse est faible ou que la viscosité est grande.

exo : L'écoulement d'air autour d'un marcheur est-il laminaire ou turbulent ? L'écoulement du sang dans une artère (diamètre 1 cm, vitesse 40 cm/s) ou dans un capillaire (diamètre 10  $\mu\text{m}$ , vitesse 0,5 mm/s) est-il laminaire ou turbulent ?

prop : L'écoulement dans l'air ou l'eau autour d'un obstacle macroscopique est quasiment toujours turbulent.

### 3.5 Coefficient de traînée

#### 3.5.1 Expression de la force de traînée

En PCSI, vous avez peut-être utilisé différents modèles de force de frottement dans un fluide :  $\vec{F} \propto -\vec{v}$  (linéaire) ou  $\vec{F} \propto -\vec{v}^2$  (quadratique). Cette partie va illustrer que ce sont des cas particuliers d'un effet plus complexe.

def non exigible : Modélisation générale des frottements de l'air sur un solide :

$$\vec{F}_f(v) = -\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot S \cdot C_x(v) \cdot v^2 \cdot \vec{e}_v$$

avec la masse volumique  $\mu$  du fluide ; la section transverse  $S$  du solide ; la norme  $v$  de la vitesse relative du fluide par rapport au solide loin du contact ; le coefficient de traînée  $C_x(v)$  et le vecteur unitaire  $\vec{e}_v$  orienté suivant la direction de la vitesse  $\vec{v}$ .

prop : Le **coefficient de traînée**  $C_x(v)$  **contient la complexité du lien entre force et vitesse**. Il dépend aussi fortement de la forme du solide.

### 3.5.2 Influence de la vitesse

Pour étudier l'influence<sup>6</sup> de la vitesse  $v$  entre le fluide et un solide sphérique, et celle de la viscosité dynamique  $\eta$  du fluide, on définit le *nombre de Reynolds*  $Re = \frac{\mu L}{\eta} v \propto v$ . La figure 3 présente l'influence de  $Re$ , et donc de  $v$  sur le coefficient  $C_x$  d'une sphère lisse<sup>7</sup>.

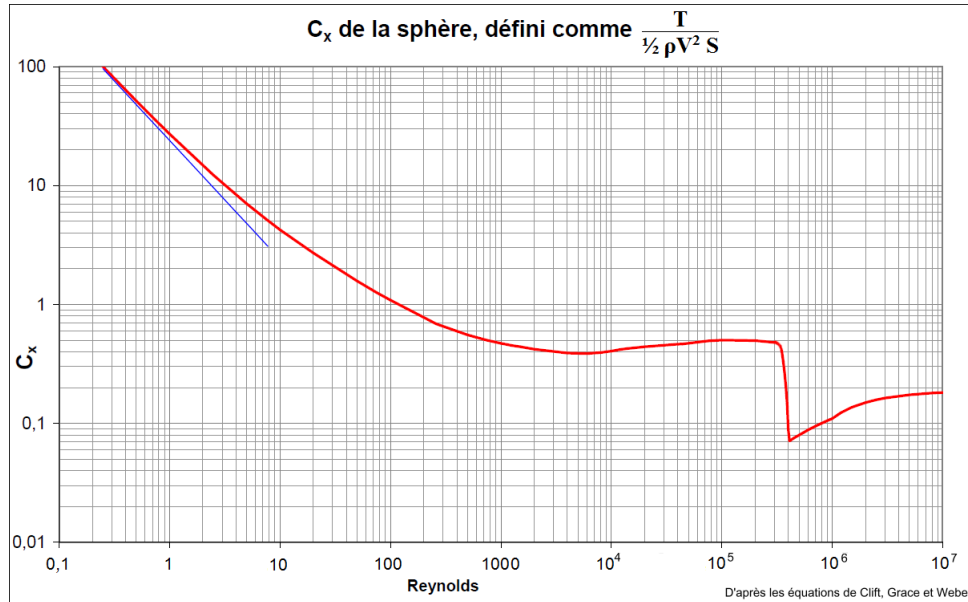


FIGURE 3 – En échelle log-log, évolution du  $C_x$  d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  caractérisant l'écoulement du fluide.  $Re = \frac{\mu L}{\eta} v \propto v$ .

exo de cours : Déduire de la figure 3 s'il existe un domaine où la force est linéaire en vitesse. Déduire de la figure 3 s'il existe un domaine où la force est quadratique en vitesse.

Plus précisément, on peut mesurer que  $C_x \simeq 24/Re$  aux faibles  $Re$ . Montrer qu'on obtient la loi de Stokes  $F = -6\pi\eta r v$ .

★ Pour  $Re \ll 1$  (écoulement laminaire donc faible vitesse et/ou haute viscosité), les forces de frottements peuvent être approchés par une force de frottement linéaire :

$$F_{Re \ll 1} = -\alpha.v \tag{16}$$

★ Pour  $Re \gg 1$  (écoulement turbulent donc forte vitesse et/ou faible viscosité), les forces de frottements peuvent être approchés par une force de frottement quadratique :

$$F_{Re \gg 1} = -\beta.v^2 \tag{17}$$

ex<sup>8</sup> : Déterminer le modèle de traînée adapté pour les exemples de la partie 3.4.






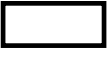



6. CE : Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.

7. La rugosité d'une balle de tennis donne un  $C_x$  plus grand. Les cratères à la surface d'une balle de golf abaissent le seuil de chute de  $C_x$  et augmente donc la portée d'un coup.

8. CE : Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.

### 3.5.3 Influence de la forme du solide

prop : Le coefficient de traînée est d'autant plus faible que le solide a une forme profilée.

Shape	Drag Coefficient
Sphere → 	0.47
Half-sphere → 	0.42
Cone → 	0.50
Cube → 	1.05
Angled Cube → 	0.80
Long Cylinder → 	0.82
Short Cylinder → 	1.15
Streamlined Body → 	0.04
Streamlined Half-body → 	0.09

Measured Drag Coefficients

FIGURE 4 – Évolution du  $C_x$  en fonction de la forme du solide dans le régime en  $C_x$  dépend peu de  $v$ .

Conclusion : pour un mouvement évoluant dans plusieurs régimes de  $C_x$ , il n'est pas en général possible de résoudre analytiquement les équations du mouvement. **On procède alors à des résolutions numériques approchées.**