

E2 : Électrostatique

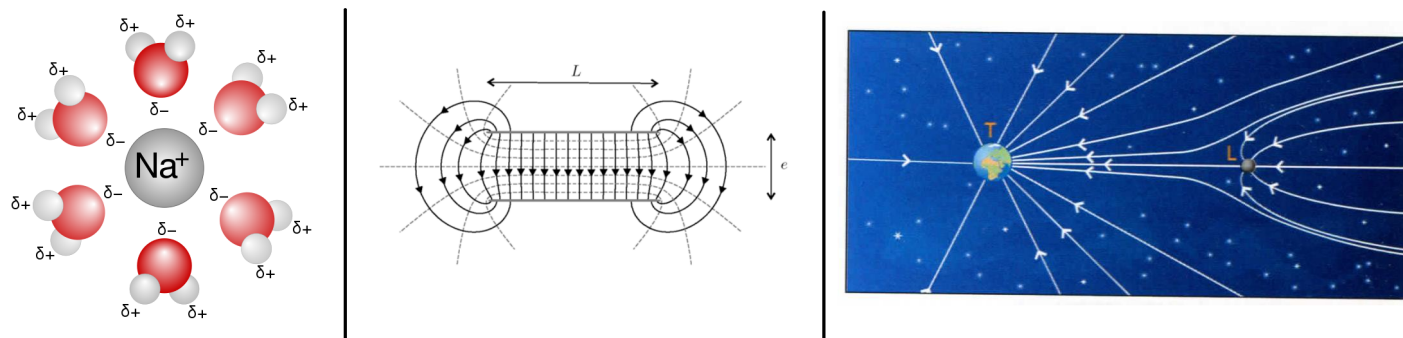


FIGURE 1 – Grande variété d’ordres de grandeurs des applications : solvation des ions, lignes de champ électriques dans un condensateur, champ de gravité du système Terre-Lune (analogie électrostatique/gravitation).

Table des matières

1	Champ et potentiel électrique	1
2	Circulation du champ électrostatique	4
3	Flux du champ électrique	5
4	Application du théorème de Gauss	6
5	Équation de Poisson et laplacien scalaire	7
6	Topographie du champ électrique	8
7	Modèle de condensateur	9
8	Modèle de noyau atomique	10
9	Analogie avec la gravitation	12
10	Champ et potentiel d’un dipôle électrostatique	12
11	Actions d’un champ extérieur sur un dipôle rigide	14
12	Description des interactions intermoléculaires et ioniques	15

1 Champ et potentiel électrique

1.1 Loi de Coulomb

| schéma : Deux charges q en O et q' en M dans le vide.

loi de Coulomb : la **force électrostatique** appliquée par q sur q' dans le vide s’écrit :

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 OM^2} \vec{u}_{O \rightarrow M} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \vec{OM}$$

avec $\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ est la **permittivité (diélectrique) du vide**.

prop : Force attractive si charges de signes opposés, répulsive si de mêmes signes.

prop : Dans un milieu matériel, il faut remplacer ε_0 par la **permittivité du matériau** $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$. Dans l'air, $\varepsilon_0 \simeq 1$ quasiment comme dans le vide. Dans l'eau, $\varepsilon_r \simeq 80$ en régime statique, cette grande valeur affaiblit donc l'interaction entre ions ce qui explique que l'eau est un solvant dissociant bien les solides ioniques.

1.2 Champ créé par une charge ponctuelle

Considérons une charge q en O et q' en M. La force électrostatique produite par q en M est le produit de la charge q' en M, et d'autres grandeurs ne dépendant pas de q' :

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 OM^2} \vec{u}_{O \rightarrow M} = q' \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM^2} \vec{u}_{O \rightarrow M}$$

def : Le **champ électrostatique** $\vec{E}(M)$ créé en M par q placée au centre du repère sphérique :

$$\text{champ produit par une charge ponctuelle : } \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

unité : $\|\vec{E}\|$ en $V \cdot m^{-1}$ (ou $N \cdot C^{-1}$).

| schéma : *Champ créé par une charge ponctuelle positive et une charge ponctuelle négative. Lignes de champ.*

def : On appelle **ligne de champ** une courbe qui est tangente en tout point au champ. Ex : les lignes de champ du champ électrique d'une source ponctuelle sont les demi-droites dont l'origine est la charge, orientée depuis une charge $q > 0$ mais se dirigeant vers $q < 0$.

1.3 Potentiel électrique créé par une charge ponctuelle

prop : La **force électrostatique est conservative**. Il existe donc une énergie potentielle associée telle que $\vec{F} = -\text{grad}(\mathcal{E}_p)$.

prop : Dans le cas d'une charge ponctuelle q' à distance r de q en O :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}$$

démo : $qq'/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = -d\mathcal{E}_p/dr$ à intégrer.

Comme pour la distinction entre force et champ, l'énergie potentielle s'écrit $q' \times$ (autres grandeurs indépendantes de q').

def : Le **potentiel électrique** $V(M)$, en volt, en un point M est relié à l'énergie potentielle par :

$$\mathcal{E}_p(M) = q' \cdot V(M) + \text{cte}$$

prop : Dans le cas d'une charge ponctuelle q , le potentiel créé à distance r est :

$$\text{potentiel produit par une charge ponctuelle : } V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}$$

rq : on choisit souvent $\text{cte} = 0$.

prop : En régime statique, \vec{E} dérive d'un potentiel :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

→ **relation toujours valide en électrostatique**, même en présence de plusieurs charges.

démo pour une charge ponctuelle : $\vec{F} = -\text{grad}(\mathcal{E}_p)$ donc $q' \vec{E} = -\text{grad}(q'V)$ à simplifier par q' .

(très hors-programme : En régime variable, on a $\vec{E} = -\text{grad}(V) - \partial \vec{A} / \partial t$ avec le potentiel-vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$.)

1.4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

def : Une **surface équipotentielle** est une zone de l'espace où le potentiel électrique est uniforme.

prop¹ : Les surfaces équipotentielles sont orthogonales au champ électrostatique \vec{E} .

| schéma : *Champ créé par une charge ponctuelle et par un condensateur. Nombreux exemples plus tard.*

1.5 Principe de superposition

On sait que la résultante d'un ensemble de forces est la somme de ces forces. Ce résultat se généralise au champ électrique et au potentiel créés par une répartition quelconque de charges.

Distribution discrète de charge

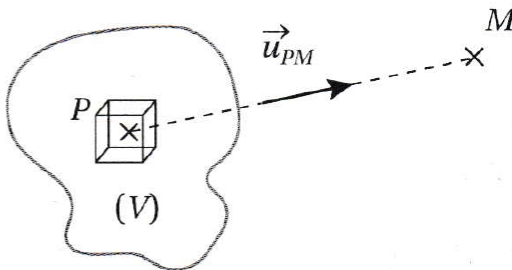
prop : **Principe de superposition**. Soient N charges q_i en P_i . Alors le champ et potentiel² créés en M est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M^2} \vec{u}_{P_i \rightarrow M}, \quad V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + \text{cte}$$

| ex : *Soit deux charges identiques $q > 0$ en A et en B . Que dire du champ au milieu de AB ? Sur le plan médiateur? Sur la droite AB ?*

Distribution continue de charge

Pour une distribution continue de charge présentant beaucoup de symétrie, on peut utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique produit, cf section 4. Dans le cas général, on peut se ramener à une distribution discrète par découpage en volumes infinitésimaux $d\tau$ de charge $dq = \rho d\tau$:

$$\vec{E}(M) = \iiint_{(V)} \frac{\rho(P) d\tau \vec{u}_{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^2}$$


1.6 Invariance et symétrie du champ électrostatique

procédure générale³ : On analyse les invariances et symétries d'une distribution de charge, on en déduit celles du champ électrique créé par ces charges.

principe : **Principe de Curie** : les symétries des causes se retrouvent⁴ dans les effets qu'elles produisent.

prop : **Propriétés d'invariance de \vec{E}** :

Les invariances des composantes du champ électrostatique \vec{E} sont les mêmes que les invariances de la distribution de charge qui en est à l'origine.

→ **détermine de quelles variables dépendent les composantes de \vec{E} .**

1. CE : Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.

2. CE : Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges.

3. CE : Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.

4. Le terme « se retrouvent » ne veut pas forcément dire que les causes et effets ont exactement les mêmes symétries, cf chapitre E3-Magnétostatique.

prop : **Plans de symétrie de \vec{E}** :

★ Un plan de symétrie des charges est aussi un plan de symétrie de \vec{E} .

★ En particulier, en un point d'un plan de symétrie des charges, \vec{E} est colinéaire à ce plan.

prop : **Plans d'antisymétrie de \vec{E}** :

★ Un plan d'antisymétrie des charges est aussi un plan d'antisymétrie de \vec{E} .

★ En particulier, en un point d'un plan d'antisymétrie des charges, \vec{E} est orthogonal à ce plan.

→ **détermine quels vecteurs directeurs portent le champ \vec{E} .**

ex : *Considérons une boule de rayon R , centre O , de densité de charge $\rho(M) = \rho(r)$ en coordonnée sphérique. Démontrer que le champ électrique s'écrit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Nombreux autres exemples plus loin.*

1.7 Ordres de grandeurs de champs électriques

Connaître⁵ quelques ODG et savoir en recalculer certains :

	$\ \vec{E}\ $ (V/m)	commentaire
produit par les protons dans un noyau	10^{21}	à savoir calculer
subi par e^- dans atome H	10^{11}	à savoir calculer
entre molécules polaires	10^{10}	savoir calculer si formule \vec{E} fournie
entre armatures d'un condensateur	10^6	choisir ODG de tension u et épaisseur L
champ disruptif de l'air	3.10^6	champ qui permet d'ioniser l'air
(onde électromagnétique) faisceau laser de lycée	10^3	dépend du diamètre et de la puissance
(onde électromagnétique) max antenne téléphone	60	dépend de la bande (4G, etc)

2 Circulation du champ électrostatique

Toutes les relations de cette section concernant la circulation ne sont valables qu'en régime statique.

2.1 Rappel d'une propriété du gradient

prop : Propriété du gradient d'un champ scalaire f :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{d\ell} \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \quad \text{en cartésien} \right)$$

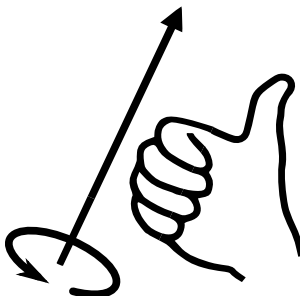
$$f(B) - f(A) = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{d\ell}$$

2.2 Circulation du champ et différence de potentiel

def (rappel) : La **circulation** du champ vectoriel \vec{F} sur une courbe orientée \mathcal{C} est $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{d\ell}$.

def (rappel) : Une courbe orientée est un **contour fermé** si cette courbe se boucle sur elle-même. Elle englobe donc complètement une surface.

rappel : *Orientation relative d'un contour fermé et de la surface enlacée.*



5. CE : Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

prop : La circulation du champ électrostatique est une différence de potentiel :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B) \quad \text{pour le champ électrostatique} \quad (1)$$

exo : Soit un condensateur de distance $e = 0,1$ mm entre armatures soumises à une tension $U = 2$ V. En supposant le champ uniforme entre les armatures, en déduire sa valeur.

2.3 Circulation conservative du champ électrostatique

prop : La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé \mathcal{C} est nulle, elle est dite conservative :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{pour le champ électrostatique}$$

2.4 Équation locale de circulation : opérateur rotationnel

Interprétation d'une circulation nulle autour d'un point : le champ ne tourne pas autour de ce point.

schéma : Circulation du champ d'une charge ponctuelle, et d'un champ homogène.

Comment quantifier à quel point « le champ tourne » ? L'opérateur **rotationnel**.

def : L'opérateur **rotationnel** du champ de vecteur $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en base cartésienne s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_z$$

★ Application de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, différent de $\overrightarrow{\text{grad}}$ et div !

★ Expression en coordonnées cartésiennes à connaître. Savoir utiliser les expressions fournies en coordonnées cylindriques ou sphériques.

prop : Considérons un contour orienté \mathcal{C} s'appuyant sur la surface orientée S . Le **théorème de Stokes** pour un champ de vecteur \vec{a} s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

prop :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \forall \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot}(\vec{E})(M) = \vec{0} \quad \forall M \quad \Leftrightarrow \quad \exists V \mid \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

prop⁶ : Pour tout champ scalaire f , on a : $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$.

3 Flux du champ électrique

Toutes les relations de cette section sont toujours valables, que le régime soit statique ou variable.

3.1 Théorème de Gauss

convention : Pour une surface fermée, le vecteur surface est orienté vers l'extérieur.

approche intuitive : Estimation qualitative du flux à travers une surface fermée englobant une charge ou non. exo : Exprimer le flux de \vec{E} à travers une sphère de rayon R centrée sur q .

6. CE : Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique.

Ce résultat se généralise à toute distribution de charge !

prop : Considérons une surface fermée S . D'après le **théorème de Gauss** :

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge contenue dans le volume enveloppé par la surface fermée S .

Elle se calcule par $Q_{\text{int}} = \iiint_{M \in V} \rho(M) \cdot dV$.

De nombreux exemples seront étudiés plus loin.

prop : Le flux de \vec{E} n'est pas toujours conservatif, seulement quand $Q_{\text{int}} = 0$.

3.2 Équation locale de flux : opérateur divergence

prop : Pour un champ de vecteur \vec{E} , **théorème de (Green)-Ostrogradsky** :

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iiint_{M \in V} \text{div}(\vec{E}(M, t)) \cdot dV$$

D'après le théorème d'Ostrogradsky, le flux sortant à travers la surface fermée S s'écrit : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{E}) \cdot dV$.

Donc, d'après le théorème de Gauss :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{E}) \cdot dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_{M \in V} \rho(M) \cdot dV}{\epsilon_0}$$

Cette dernière relation doit être valable pour tout choix de volume, on obtient donc :

prop : **Équation de Maxwell-Gauss** :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette relation est équivalente au théorème de Gauss.

3.3 Exemple d'utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss

exo : On modélise une plaque plane d'un condensateur par une plaque infinie d'épaisseur $2a$ uniformément chargée en volume. Considérons la distribution de charges à symétrie plane, infinie dans les directions (Oy) et (Oz) définie par la densité volumique de charges, avec $a > 0$: $\rho(x) = 0$ pour $x < -a$, $\rho(x) = \rho_0$ pour $-a < x < a$ et $\rho(x) = 0$ pour $a < x$.

1. Démontrer que $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$ avec $E(x)$ impair.
2. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$ dans les trois domaines en fonction de constantes d'intégrations.
3. Déterminer les constantes d'intégrations en utilisant : la valeur du champ en $x = 0$ ainsi que la continuité du champ dans une répartition volumique de charge.
4. Déterminer le potentiel électrique dans tout l'espace.

4 Application du théorème de Gauss

objectif⁷ : Connaissant la distribution de charges, en déduire le champ électrique en tout point M de l'espace.

4.1 Procédure à suivre

- définir un point M quelconque : Considérer un point M quelconque de l'espace. Placer en M le repère adapté au système.

7. CE : Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.

- symétries : Déterminer les plans de symétrie et/ou antisymétrie de la distribution de charges **qui passent par M**. En déduire **quel vecteur dirige le champ électrique en M**.
- invariances : Déterminer les invariances de la distribution de charges puis **de quelles coordonnées dépendent les composantes du champ électrique**.

(• *facultatif* : Pour un système à symétrie plane, la parité du champ est obtenue grâce au plan du milieu.)

- choix de la surface de Gauss : Choisir une surface **passant par M** pour que le calcul du flux de \vec{E} soit le plus simple possible. Est donc préférable une surface constituée de parties **orthogonales** à \vec{E} ou bien **tangentes** à \vec{E} telle que le champ a même norme sur cette partie.

- application du théorème de Gauss : Appliquer le théorème de Gauss à la surface de Gauss choisie. En déduire **l'expression du champ électrique**.

rq : Si \vec{E} est tangent à une surface, son flux est nul. S'il est orthogonal à la surface et de valeur homogène, le flux est le produit de E et S .

4.2 Exemple de géométrie plane

exo : On reprend le système de la section 3.3 pour calculer le champ d'une autre manière. Déterminer le champ créé par une surface infinie plane d'épaisseur $2a$ et densité de charge ρ_0 uniforme à l'aide du théorème de Gauss.

autres exemples : Modèle de plaque infiniment fine d'un condensateur partie 7.

4.3 Exemple de géométrie cylindrique

exo : Modélisons un cylindre de verre chargé d'électricité statique par un cylindre infini dont la charge est répartie sur sa surface. On note σ la densité surfacique de charge. Déterminer le champ créé à l'aide du théorème de Gauss.

autres exemples : Condensateur cylindrique (*), cylindre non uniformément chargé de rayon R : $\rho = \alpha r$ (**).

4.4 Exemple de géométrie sphérique

exemples : Champ créé par un noyau uniformément chargé partie 8 (*), sphère non uniformément chargée de rayon R : $\rho(r) = \frac{Q}{\pi R^4} r$ (**).

5 Équation de Poisson et laplacien scalaire

Pour calculer le potentiel électrique statique V , on peut d'abord calculer \vec{E} puis utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. Mais on peut aussi calculer directement V .

5.1 Équations de Poisson et équation de Laplace

prop : **L'équation de Poisson** est en électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

rq : Dans l'espace vide ($\rho = 0$), elle devient « l'équation de Laplace » : $\Delta V = 0$.

démo : D'après l'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$. Or, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ pour un champ statique. Donc $-\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \rho/\varepsilon_0$.

5.2 Laplacien scalaire

def : opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire $f(M, t)$:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f))$$

def : opérateur **laplacien scalaire** d'un champ scalaire $f(x, y, z, t)$ en cartésien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

★ opérateur de \mathbb{R} (scalaire) dans \mathbb{R} (scalaire).

★ unité de Δf : (unité de f /longueur²). ex : ΔV en $V.m^{-2}$.

★ Pour les autres géométries (cylindrique, sphérique) : connaissance non exigible de l'expression de Δ , mais savoir l'utiliser.

5.3 Application de l'équation de Poisson

exo : *Considérons deux plaques de potentiel électrique respectif V_1 et V_2 , séparées d'une distance L . L'espace entre les plaques est vide. Déterminer le potentiel V entre les plaques. Même question si l'espace entre V_1 et V_2 est de densité de charge $\rho = \rho_0$ uniforme.*

6 Topographie du champ électrique

- Conséquences du flux conservatif de \overrightarrow{E} dans le vide

| schéma : *Champ d'une charge ponctuelle positive ; champ entre les armatures d'un condensateur.*

prop : **Dans le vide, les lignes de champ s'écartent quand on s'éloigne des sources** (équivalent à une diminution de l'amplitude).⁸

analogie : \overrightarrow{v} pour écoulement incompressible, \overrightarrow{j}_N , \overrightarrow{j}_Q et \overrightarrow{j} en statique, champ magnétique \overrightarrow{B} .

- Conséquences de la non conservation du flux dans les zones chargées.

| schéma : *Champ d'une charge ponctuelle positive ou négative, d'un dipôle électrostatique.*

prop : **Les lignes de champ semblent provenir des charges positives, et se diriger vers les charges négatives.**⁹

analogie : écoulement de fluide où $q > 0$ est équivalent à une source, et $q < 0$ équivalent à un puits.

- Conséquences de la circulation conservative du champ électrostatique.

| schéma : *Exemples impossibles pour le champ électrostatique.*

prop : **Les lignes de champ électrostatique ne peuvent pas se boucler sur elles-mêmes.**¹⁰

analogie : champ magnétique dans le vide.

prop : **Les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.**¹¹

prop : Soit deux équipotentielles de potentiels V_1 et $V_2 < V_1$ et séparées d'une distance L , le champ est en ODG de norme $\|\overrightarrow{E}\| = \frac{V_1 - V_2}{L}$.

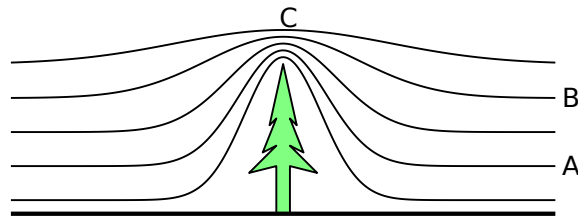
8. CE : Associer l'évolution de la norme de \overrightarrow{E} à l'évasement des tubes de champ loin des sources.

9. CE : Repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe.

10. CE : Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique.

11. CE : Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.

Les nuages sont chargés négativement et la terre positivement. Un éclair se forme lorsque le champ électrique dépasse une valeur limite pour le matériau isolant qu'est l'air : $E \simeq 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$. L'air se comporte alors comme un milieu conducteur.



Sur le schéma, les équipotentielles sont représentées avec la même variation de potentiel entre chacune d'elles. On mesure au point A la norme du champ électrique $E(A) = 130 \text{ V.m}^{-1}$.

1. Tracer les lignes de champ.
2. Déterminer la valeur des champs électriques au point B puis au point C
3. En cas d'orage, où le risque d'éclair est-il le plus important ?

7 Modèle de condensateur

7.1 Principe du condensateur

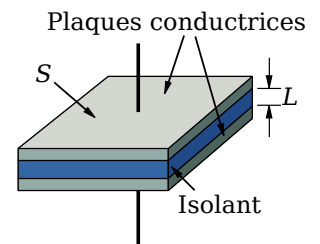
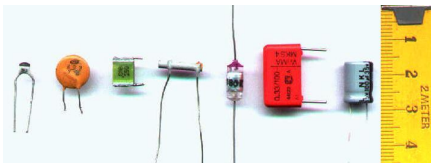


FIGURE 2 – (a) Différents modèles de condensateurs. (b) Condensateur artisanal (exp. de cours) : film plastique entre deux feuilles d'alu. (c) Modèle du condensateur plan.

Le matériau entre les plaques doit être isolant électrique. On dit aussi que ce milieu est « **diélectrique** ». Par exemple du PET (polytéréphtalate d'éthylène).

| schéma : Schéma électrique du condensateur idéal en convention récepteur.

prop : $q = C.u$, $i = C.\frac{du}{dt}$, énergie stockée $\mathcal{E} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$.

def : On définit la **charge surfacique** stockée par $\sigma = q/S$.

| expérience de cours : Condensateur constitué de deux feuilles d'aluminium séparées par un film plastique. On mesure la capacité C avec un capacimètre. Comment évolue C quand la surface des plaque diminue ? Quand la distance entre plaques diminue ? La partie 7.3 justifiera ces observations.

7.2 Champ dans un condensateur plan infini

- Champ créé par un seul plan infini uniformément chargé : À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ créé par un plan infini uniformément chargé par σ .
- Champ total : À l'aide du théorème de superposition, déterminer le champ créé par un condensateur plan infini.

prop¹² : On trouve que $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur, et $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z$ entre les plaques, dirigé du + vers le -.

12. CE : Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir l'expression du champ créé dans un condensateur.

7.3 Capacité du condensateur

exo : En déduire qu'on retrouve la loi $q = C.u$ et en déduire l'expression de la capacité en fonction de ε_0 , S et L .

prop¹³ : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{L}$. D'où l'unité de ε_0 en F.m⁻¹.

ODG : Pour $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹, $S = 1$ cm² (grand!), et $L = 0,1$ mm, on obtient $C = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F = 8,85 pF.

Plusieurs axes permettent d'obtenir de plus grandes capacité en choisissant :

* **un diélectrique de forte permittivité**, c'est-à-dire plus polarisable (qui revient à multiplier ε_0 par ε_r dans la formule).

* **une distance L faible** entre plaques. En pratique, elle peut être très inférieure au micron dans certains condensateurs électrolytiques.

* **une plus grande surface S d'électrode**, par exemple par des feuillets imbriqués ou des milieux poreux comme dans certains supercondensateurs.

7.4 Énergie stockée dans un condensateur

exo : On rappelle l'énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_p = q.V$. Déterminer l'énergie stockée dans un condensateur de capacité C sous une tension U . En déduire la densité volumique d'énergie associée au champ électrique.

prop¹⁴ : La **densité volumique d'énergie** u_E associée au champ électrique de norme E est $u_E = \varepsilon_0 E^2 / 2$. Ce résultat se généralise à un champ électrique quelconque!

7.5 Condensateur cylindrique

En pratique de nombreux condensateurs sont à géométrie cylindrique. Modélisons un tel condensateur par deux cylindres concentriques : un cylindre de longueur L et de rayon R_1 de charge $+Q$, et un autre de rayon R_2 chargé $-Q$.

1. Démontrer que le champ électrique entre les cylindres vaut $\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \vec{u}_r$. Que vaut-il ailleurs ?
2. En déduire la capacité $C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(R_2/R_1)}$.

8 Modèle de noyau atomique

8.1 Constitution

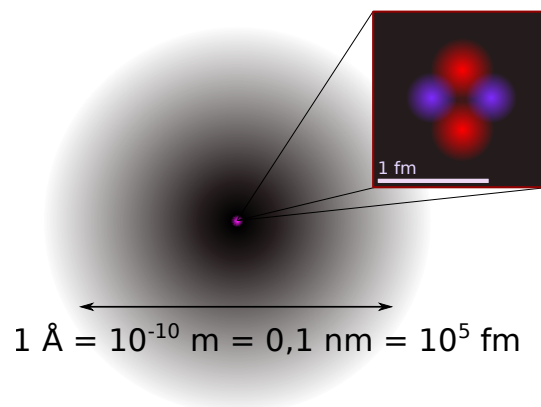


FIGURE 3 – Représentation d'un atome d'hélium 4 avec : le noyau atomique au centre, et le nuage électronique en dégradé de gris tout autour. Le noyau d'hélium 4, agrandi à droite, est formé de deux protons et de deux neutrons.

Le noyau atomique est constitué de Z protons et $(A - Z)$ neutrons. On le note A_ZX . Exemple : ${}^{14}_6C$.

13. CE : Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

14. CE : Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.

- Taille du noyau : $R_{\text{noyau}} \simeq 10^{-15} \text{ m} \ll a_0$
- Charge d'un neutron : $q_n = 0$
- Charge d'un proton : $q_p = +e = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse d'un neutron : $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- Masse d'un proton : $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
- $Z = \text{nb de protons}$
- $A = Z + N = \text{nb de nucléons}$
- $N = A - Z = \text{nb de neutrons}$

8.2 Champ et potentiel créé par une boule chargée

modélisation : On considérera le noyau comme une boule de rayon R chargée uniformément de densité volumique de charge ρ . On note la charge totale $Q = \rho \cdot 4\pi R^3 / 3$.

| exo : À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique créé par la sphère. En déduire le potentiel électrique dans tout l'espace.

prop : Pour une boule de charge Q à symétrie sphérique, le champ électrique créé en dehors de la boule est le même que celui par une charge ponctuelle Q situé au centre O .

8.3 ODG de l'énergie de constitution par analyse dimensionnelle

def : **L'énergie de constitution** d'un noyau atomique est l'énergie \mathcal{E} à fournir pour le construire à partir de charges infiniment éloignées.

prop : Comme des charges de même signe ont tendance à se repousser, il faut donc fournir du travail. Donc $\mathcal{E} > 0$.

rq : Pourquoi le noyau n'explose-t-il pas du fait de cette répulsion? C'est dû à une des quatre interactions fondamentales : gravitation, interaction électromagnétique, interaction faible, et **interaction forte**. Cette dernière est responsable de la cohésion du noyau, sa portée typique est de l'ordre de 10^{-15} m .

| exo : Par analyse dimensionnelle, déterminer l'énergie \mathcal{E} nécessaire pour former un noyau de charge Q de rayon R .

prop : On trouve $\mathcal{E} \propto \frac{Q^2}{\varepsilon_0 R}$.

| ODG : Déterminer un ODG de \mathcal{E} .

8.4 Calcul de l'énergie de constitution

| exo : Exprimer \mathcal{E} par ajout progressif de charges provenant de l'infini.

prop¹⁵ : On trouve $\mathcal{E} = \frac{3}{20\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 R}$.

¹⁵ CE : Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.

9 Analogie avec la gravitation

9.1 Analogie entre champ électrostatique et champ de gravité

	Électrostatique	Gravitation
Sources du champ	charges q_0	masses m_0
Champ d'une source ponctuelle	Loi de Coulomb. Pour une source (O, q_0) : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r$ avec ϵ_0 permittivité du vide	Loi de Newton. Pour une source (O, m_0) : $\vec{G} = -\mathcal{G} \frac{m_0}{r^2} \vec{u}_r$ avec \mathcal{G} constante de gravitation universelle
Relation champ-force	$\vec{F} = q \vec{E}$	$\vec{F} = m \vec{G}$
Circulation	circulation conservative donc \vec{E} dérive d'un potentiel : $V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$	circulation conservative donc \vec{G} dérive d'un potentiel : $V(r) = \mathcal{G} \frac{m_0}{r}$
Flux	Non conservatif : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ (théorème de Gauss)	Non conservatif : $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{int}$ (théorème de Gauss)
Énergie de constitution	Boule q, R . $\mathcal{E} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} > 0$	Boule m, R . $\mathcal{E} = -\frac{3}{5} \frac{\mathcal{G} m^2}{R} < 0$

16

prop : On passe des expressions électrostatiques aux expressions gravitationnelles par :

$$q \leftrightarrow m \quad \text{et} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}$$

9.2 Applications du théorème de Gauss à la gravitation

exo : Déterminer le champ gravitationnel créé par une boule de rayon R et masse volumique $\mu = M/(4\pi R^3/3)$ uniforme à l'aide du théorème de Gauss.

10 Champ et potentiel d'un dipôle électrostatique

La matière est globalement neutre. Mais le barycentre de toutes les charges positives n'est pas toujours confondu avec celui des charges négatives. Plusieurs causes possibles :

- ★ Différence d'électronégativité entre atomes d'une molécule, par exemple dans la molécule d'eau.
- ★ Sous l'action d'un champ électrique extérieur, une molécule se déforme car les charges négatives subissent une force opposée à celle subie par les charges positives. C'est la phénomène de polarisabilité.
- ★ Les fluctuations thermiques déforment en permanence les molécules.

10.1 Définition du dipôle électrostatique

On note N le barycentre des charges négatives, et P le barycentre des charges positives, séparés de $a = NP$. En pratique, la distance d'observation est souvent très grande devant a (proche de la taille d'une molécule). Dans ce cas, tout se passera comme si les charges positives étaient concentrées en P et les négatives en N.

def : Un **dipôle électrostatique** est un ensemble de deux charges ponctuelles opposées $q > 0$ et $-q < 0$.

| schéma : Dipôle électrostatique.

approximation dipolaire¹⁷ : On se placera dans le cas $r \gg a$.

ODG : $a \simeq 10^{-10}$ m pour une molécule polaire.

def : Le **moment dipolaire** d'un dipôle est le vecteur $\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{NP}$.

★ Dirigé de la charge négative vers la charge positive.

★ Unité SI de $p = \|\vec{p}\|$ en C.m. = A.s.m.

★ ODG : $a \simeq 10^{-10}$ m et $q \simeq e \simeq 10^{-19}$ C. Donc $p \simeq 10^{-29}$ C.m.

★ Unité courante pratique : le Debye D. 1 D $\simeq 3,3 \cdot 10^{-30}$ C.m.

10.2 Symétrie et invariance

| schéma : Dipôle électrostatique. Repère sphérique.

• symétries : $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de ddch. Donc le champ $\vec{E}(M)$ est dirigé seulement selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

• invariances : par rotation suivant φ . Donc $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta$, et $V(M) = V(r, \theta)$.

rq : On peut trouver la direction du champ dans les cas particuliers où M est sur le plan d'antisymétrie ou sur l'axe du dipôle :

• Le plan $\theta = \pi/2$ est un plan d'antisymétrie des charges. Donc le champ y est orthogonal au plan, donc suivant $\pm \vec{e}_\theta$.

• Les plans contenant l'axe et O sont des plans de symétrie des charges. Donc le champ y est selon $\pm \vec{e}_z$.

10.3 Potentiel créé par un dipôle électrostatique

D'après le thm. de superposition, le potentiel créé en M est la somme de celui créé par q et de celui créé par $-q$:

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 MN} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 MP} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

| démo de cours : On suppose $r \gg a$. À l'aide de développements limités de $1/MN$ et $1/MP$, déterminer l'expression de $V(M)$.

prop¹⁸ : Dans le cadre de l'approximation dipolaire, le potentiel électrique créé par un dipôle électrostatique est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

rq : La dernière expression est plus générale car ne dépend pas du repère utilisé.

10.4 Champ créé par un dipôle électrostatique

On rappelle qu'en électrostatique, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. On donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

| démo de cours : Déterminer l'expression de $\vec{E}(M)$.

prop : Le champ électrique créé par un dipôle électrostatique est :

$$\vec{E}(M) = \frac{2p \cdot \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \cdot \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

rq : En remarquant que $\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$, on obtient $2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta = 3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}$. Puis l'expression générale suivante :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot OM^5} \left(3 \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM} \right) \overrightarrow{OM} - OM^2 \vec{p} \right)$$

17. CE : Citer les conditions de l'approximation dipolaire.

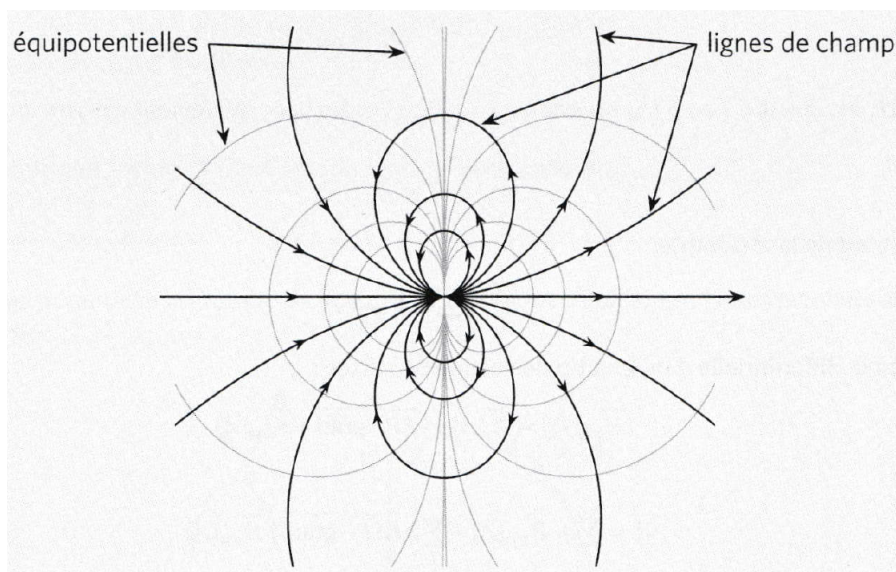
18. CE : Établir l'expression du potentiel V . Comparer la décroissance du champ et du potentiel avec la distance dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ électrostatique engendrées par un dipôle.

10.5 Comparaison à la portée du champ d'une charge ponctuelle

	charge q	dipôle \vec{p}
champ $\vec{E}(M) \propto$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^3}$
potentiel $V(M) \propto$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$

prop : **Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique décroissent plus rapidement que ceux d'une charge ponctuelle.** Les effets à grande distance sont donc plus faible pour un dipôle électrostatique que pour une charge.

10.6 Topographie du champ d'un dipôle électrostatique



11 Actions d'un champ extérieur sur un dipôle rigide

position du problème¹⁹ Considérons un dipôle électrostatique \vec{p} rigide : il peut subir translation et rotation mais pas de déformation. Quelle est l'influence d'un champ extérieur \vec{E} ?

11.1 Résultante des forces électrostatiques

| schéma : Forces électrostatiques sur un dipôle aligné sur un champ homogène et non homogène.

prop : La résultante des forces sur un dipôle est nulle si le champ est homogène.

Qualitativement, un dipôle est attiré vers les zones de champ électrique plus intense.

• Expression non exigible à savoir utiliser : La résultante \vec{F} des forces électriques subies par un dipôle \vec{p} rigide dans \vec{E} extérieur est :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$$

où l'opérateur $(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$, qui est vu aussi en mécanique des fluides, s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) = p_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

19. CE : Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle \mathcal{E}_p , de la résultante \vec{F} et du moment $\vec{\Gamma}$. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ d'origine extérieure \vec{E} .

11.2 Couple résultant des forces électriques

| schéma : Forces électrostatiques sur un dipôle dans un champ homogène.

prop : Qualitativement, un dipôle tend à s'aligner sur le champ avec \vec{p} et \vec{E} dans le même sens.

* $\theta_{\text{eq}} = 0$ correspond à un équilibre stable.

* $\theta_{\text{eq}} = \pi$ correspond à un équilibre instable.

• Expression : Le couple résultant $\vec{\Gamma}$ des forces électriques subies par un dipôle \vec{p} dans \vec{E} extérieur est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

| démo : Écrire que ce couple est somme des moments des forces électriques sur chaque charge du dipôle.

analogie : Le couple $\vec{\Gamma}$ subit par un dipôle magnétique \vec{M} dans un champ magnétique \vec{B} est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

11.3 Énergie potentielle d'un dipôle rigide

Considérons un champ \vec{E} uniforme à l'échelle du dipôle rigide \vec{p} . Alors l'énergie potentielle du dipôle est la somme des énergies potentielles électriques (du type qV). En utilisant $V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \vec{AB}$, on arrive au résultat suivant :

• Expression : L'énergie potentielle \mathcal{E}_p d'un dipôle rigide \vec{p} dans \vec{E} extérieur est :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

prop : Qualitativement, un dipôle tend à s'aligner sur le champ avec \vec{p} et \vec{E} dans le même sens.

* $\theta_{\text{eq}} = 0$ correspond à un équilibre stable (\mathcal{E}_p min).

* $\theta_{\text{eq}} = \pi$ correspond à un équilibre instable (\mathcal{E}_p max).

prop : Qualitativement, un dipôle est attiré vers les zones de champ électrique plus intense (\mathcal{E}_p min si dipôle aligné sur le champ).

11.4 Exercice

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S , situées en $x = 0$ et en $x = e$. L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ϵ_0 . On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées.

Pour un dipôle rigide \vec{p} placé dans un champ électrique extérieur \vec{E} , l'énergie potentielle est $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ et le couple subi par ce dipôle est $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

1. Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.
2. On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = e/2$. Il peut tourner autour de l'axe Oz mais pas se déplacer. Déterminer par deux méthodes les positions d'équilibre.
3. Étudier par deux méthodes la stabilité de l'équilibre.
4. Établir par deux méthodes l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz . Déterminer la période des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

12 Description des interactions intermoléculaires et ioniques

12.1 Interaction de Van der Waals

Certaines molécules sans centre de symétrie ont un moment dipolaire permanent non nul, on peut donc les assimiler grossièrement à des dipôles électrostatiques, qui génèrent donc un champ électrostatique.

De plus, toutes les molécules peuvent (plus ou moins) se déformer sous l'action du champ électrostatique créé par les autres entités (ions et molécules), ce qui forme un dipôle électrostatique induit. **On peut donc assimiler toutes les molécules à des dipôles électrostatiques.**

prop : La cohésion de la matière s'explique en partie par les propriétés des interactions entre dipôles électriques (permanent ou induit) : **ils s'attirent et s'alignent.**

Trois composantes :

— Interaction dipôle permanent - dipôle permanent, dite de Keesom.

Interactions *seulement entre molécules polaires*. Dépend de la valeur des dipôles $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ et de la température T (l'agitation thermique tend à désorganiser l'alignement des dipôles).

— Interaction dipôle permanent - dipôle induit, dite de Debye.

Le dipôle permanent $\vec{\mu}$ d'une molécule crée un champ électrique qui polarise une autre molécule de polarisabilité α . Dépend de $\vec{\mu}$, α et T .

— Interaction dipôle induit - dipôle induit, dite de London.

Dépend de α_1 et α_2 . *Présente pour toutes entités. Il existe donc des interactions même entre molécules apolaires.*

rq : Sauf pour les molécules très polaires (par ex H_2O), l'interaction de London est prépondérante.

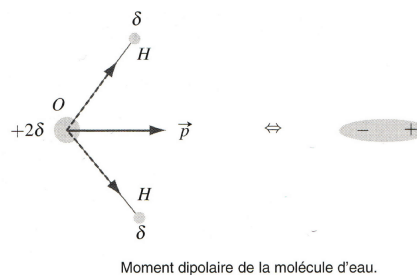
ODG en kJ/mol :

Molécules	E_K	E_D	E_L
Très polaire : H_2O	36,3	1,9	9,0
Polaire : HCl	3,3	1,0	16,8
Peu polaires : CO	$5,7 \cdot 10^{-4}$	0,011	12,9
HI	0,07	0,3	73,1
Apolaires : He	0	0	0,2
Ar	0	0	8,5

rq : E_K d'autant plus fort que la polarité est grande. E_L d'autant plus fort que la polarisabilité est grande.

12.2 Géométrie de solvation des ions

Molécule	Moment dipolaire permanent (D)
chlorure d'hydrogène HCl	1,08
eau H_2O	1,85
monoxyde de carbone CO	0,11
ammoniac NH_3	1,49
acide nitrique HNO_3	2,17
propène CH_3CHCH_2	0,35
éthanol $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	1,70
éthanal CH_3CHO	2,70



20

| schéma : Orientation des molécules polaires autour d'un ion.

12.3 Modèle de polarisabilité d'un atome

Sous l'influence d'un champ extérieur \vec{E} , un atome ou molécule se polarise et acquiert un moment dipolaire \vec{p} non nul.

Phénoménologiquement, on a souvent $\vec{p} \propto \vec{E}$.

• def : On définit alors la **polarisabilité** $\alpha > 0$ d'une entité par :

$$\vec{p} = \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

• unité et ODG : α est homogène à un volume, donc en m^3 . En ODG, il est proche du volume de la molécule, donc vers $(10^{-10} \text{ m})^3 = 10^{-30} \text{ m}^3$.

| exo : Démontrer l'unité de α .

- Modèle de Thomson de α pour l'atome d'hydrogène.²¹



FIGURE 4 – Modèle de Thomson de l'atome, dit aussi *Plum pudding model* (gâteau irlandais contenant souvent des raisins). La charge électrique positive du noyau est supposée répartie uniformément dans l'atome.

L'atome est modélisé par une boule de rayon R dont la charge positive $+e$ est répartie uniformément dans la boule. Elle contient un électron mobile de charge $-e$ et de taille négligeable.

On rappelle que le théorème de Gauss permet de montrer (à savoir refaire) que le champ électrique créé par la boule positive pour $r < R$ vaut :

$$\vec{E} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \overrightarrow{OM}$$

Le champ est donc nul au centre. À l'équilibre, l'électron se trouve donc au centre de l'atome (force subie nulle $\vec{F} = -e\vec{E}$).

| exo de cours : En appliquant un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} , démontrer que la polarisabilité α de l'atome vaut :
 $\alpha = 4\pi R^3$.

21. CE : Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.