

E3 : Magnétostatique

Le champ magnétique est noté \vec{B} et s'exprime¹ en **tesla T**, équivalent à l'unité SI : $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1}$, ainsi qu'à $\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ (utiliser force de Lorentz).

ODG² :

source	$\ \vec{B}\ $ (T)	commentaire
cerveau humain	10^{-15}	à la surface du crâne
Terre	$2\cdot 10^{-5}$	composante horizontale à Paris
Terre	$5\cdot 10^{-5}$	norme totale à Paris
fil rectiligne	10^{-4}	pour 10 A à 2 cm de l'axe du fil
aimant permanent	0,1 – 1	à la surface de l'aimant
électro-aimant non supraconducteur	< 2	
bobines d'IRM	< 3	pour examen de routine
fils d'alliage Nb-Ti supraconducteur		peut atteindre 10 T pour essais cliniques
dispositif à usage unique	> 100	source détruite après émission de l'impulsion
magnétar	> 10^{11}	type d'étoile à neutron

1 Propriétés du champ magnétostatique

1.1 Flux conservatif du champ magnétique

Les propriétés suivantes du flux de \vec{B} sont toujours valables, même pour un champ non statique.

prop : Le champ magnétique est « **à flux conservatif** » :

★ Équation locale (valable en tout point), dite « **Maxwell-Thomson** » ou « Maxwell-flux » : $\text{div}(\vec{B}) = 0$.

★ Forme intégrale, valable pour toute surface fermée S (loi des nœuds) : $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

important : **Savoir que ces deux propriétés sont équivalentes.** On passe de l'une à l'autre par le théorème d'Ostrogradsky $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) dV$.

application aux cartes de champ : **La norme de \vec{B} diminue dans les zones où les lignes de champ s'écartent.**³

ex : Exemples des lignes de champ d'une spire de courant. Illustration de la conservation du flux le long d'un tube de champ.

analogie : \vec{j} , \vec{j}_N et \vec{j}_Q en régime *stationnaire*, \vec{v} pour *écoulement incompressible*, \vec{E} dans *milieu neutre ou vide* ($\rho = 0$).

1.2 Circulation du champ magnétostatique et théorème d'Ampère

Attention, les propriétés suivantes de circulation de \vec{B} **ne sont exactes que pour un champ statique!**

prop : La circulation de \vec{B} n'est pas conservative en présence de courants :

★ Équation locale (valable en tout point), dite « **Maxwell-Ampère statique** » : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$.

avec la **perméabilité (magnétique) du vide** $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$.

★ Forme intégrale (valable pour tout contour fermé \mathcal{C} orienté), dit aussi **Théorème d'Ampère** :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$

où $I_{\text{enlacé}}$ est le courant traversant une surface enlacée par \mathcal{C} . L'orientation de I doit être cohérente avec l'orientation de \mathcal{C} .

1. On utilise parfois une autre unité, le Gauss G tel que : $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$.

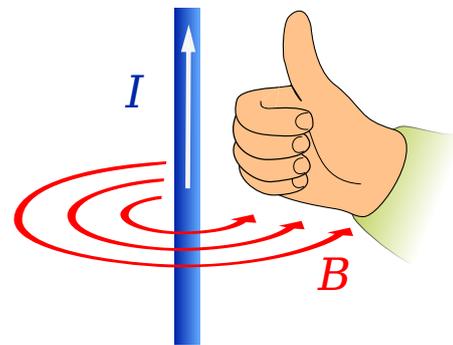
2. CE : Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.

3. CE : Associer l'évolution de la norme de \vec{B} à l'évasement des tubes de champ.

important : **Savoir que ces deux propriétés sont équivalentes.** On passe

de l'une à l'autre par le théorème de Stokes $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S}$.

application aux cartes de champ⁴ : Le champ magnétique tourne autour du courant selon la règle de « l'enroulement de la main droite ».



ex : Exemples des lignes de champ d'un câble infini. Illustration de la circulation dépendant des sources enlacées.

1.3 Symétries et invariances du champ magnétostatique

ATTENTION : les symétries⁵ du champ \vec{B} sont le **contraire** des symétries de ses sources (courants \vec{j}). Au contraire du champ \vec{E} qui a les mêmes symétries que ses sources (densité de charge ρ).

prop : **Propriétés de symétries de \vec{B}** :

- ★ Un plan de symétrie des courants est un plan d'antisymétrie de \vec{B} .
- En particulier, en un point d'un plan de symétrie des courants, \vec{B} est orthogonal à ce plan.
- ★ Un plan d'antisymétrie des courants est un plan de symétrie de \vec{B} .
- En particulier, en un point d'un plan d'antisymétrie des courants, \vec{B} est colinéaire à ce plan.
- ★ Les invariances des courants se retrouvent celles des composantes de \vec{B} .

ex : Exemples du fil infini et de la spire.

1.4 Théorème de superposition

prop : Le champ magnétique total⁶ créé par une distribution de courant est la somme des champs créés par chacun des éléments de cette distribution. démo : Conséquence de la relation entre \vec{B} et \vec{j} qui est linéaire.

exo : Tracer le champ au milieu de deux fils parallèles parcourus par des intensités égales ou opposées.

2 Champs magnétiques de modèles de circuits électriques

Pour des distributions de courants de suffisamment haute symétrie⁷, on peut calculer le champ magnétique dans tout l'espace. La procédure est similaire à l'application du théorème de Gauss pour le calcul de champ électrique à partir des charges.

2.1 Procédure d'application du théorème d'Ampère

objectif : Connaissant la distribution de courants, en déduire le champ magnétique en tout point M de l'espace.⁸

- définir M quelconque : Choisir un point M quelconque et un repère adapté.
- symétries : Déterminer les plans de symétrie et/ou antisymétrie de la distribution de courants qui passent par M. En déduire **quel vecteur dirige le champ magnétique en M**.
- invariances : Déterminer les invariances de la distribution de courants, en déduire **de quelles coordonnées dépendent les composantes du champ magnétique**.
- choix du contour d'Ampère : Choisir un contour **passant par M** pour que le calcul de circulation de \vec{B} soit le plus simple possible. Est donc préférable un contour constitué de courbes **orthogonales** à \vec{B} ou bien **tangentes** à \vec{B} telle que le champ a même norme sur cette partie.
- application du théorème d'Ampère : Appliquer le théorème d'Ampère au contour d'Ampère choisi. En déduire **l'expression du champ magnétique**.

rq : Si \vec{B} est de norme constante et tangent à une courbe de longueur ℓ , sa circulation est le produit de B et ℓ . Si \vec{B} est orthogonal au contour, sa circulation est nulle.

4. CE : Repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens.

5. CE : Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.

6. Comme pour le champ électrique total d'une distribution de charge.

7. Dans le cas général, on utilise la loi de Biot et Savart qui n'est pas au programme de CPGE.

8. CE : Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère.

2.2 Champ créé par un fil : modèle du câble rectiligne infini

exo de cours : À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace par un câble rectiligne infini de rayon R et parcouru par I . Évaluer un ODG du champ produit à 1 m d'un fil parcouru par 1 A.

prop⁹ : À l'extérieur d'un fil infini rectiligne parcouru par I qui oriente \vec{e}_z : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

rq : À l'intérieur d'un fil infini rectiligne de rayon a parcouru par I qui oriente \vec{e}_z , on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \wedge \overrightarrow{OM}$$

où on a utilisé $I = j \cdot \pi R^2$ et $\vec{j} = j \vec{e}_z$. La dernière expression est utile pour s'affranchir du système de coordonnées.

limites du modèle : « infini » valable dans la limite $r \ll L$ où L est la longueur du fil, « rectiligne » valable dans la limite $\Delta x \ll r$ où Δx est l'écart radial maximal du fil.

2.3 Champ créé par une bobine : modèle du solénoïde infini

def : Un **solénoïde** est une bobine qui comporte suffisamment d'enroulement de fil pour ne pas pouvoir négliger sa longueur (due à l'épaisseur du fil), par opposition à « une bobine plate ». On le caractérise par le **nombre de spires par unité de longueur** souvent noté n (unité m^{-1}). ODG typique : $n = 500 \text{ m}^{-1}$.

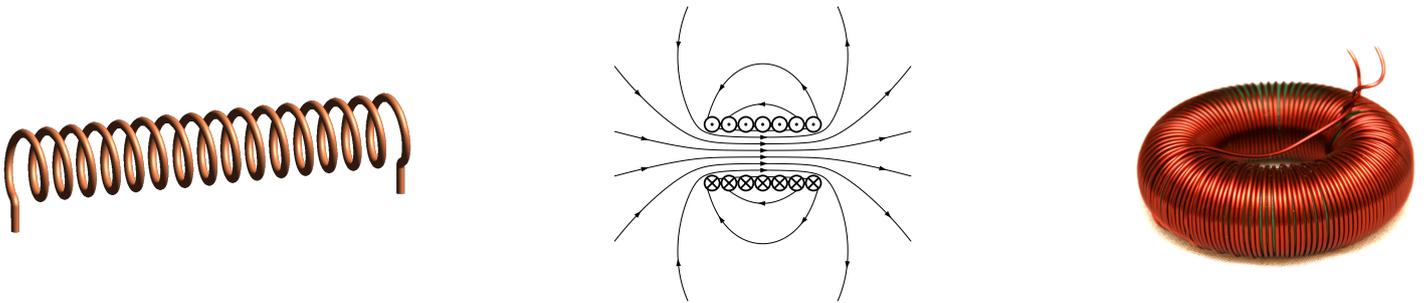


FIGURE 1 – Allure d'un solénoïde (gauche). Carte de champ d'un solénoïde court (milieu). Bobine torique (droite).

prop admise : Le champ créé à l'extérieur d'un solénoïde long est négligeable devant celui créé à l'intérieur. $\vec{B}_{\text{ext}} \simeq \vec{0}$.

exo de cours : À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique créé dans un solénoïde rectiligne infini de n spires par unité de longueur et parcouru par I .

prop¹⁰ : À l'intérieur d'un solénoïde infini rectiligne parcouru par I , avec \vec{e}_z l'axe orienté du solénoïde : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$.

limites du modèle : Discuter les limites du modèle pour une bobine réelle en se basant sur la carte de champ de la figure 1 et les hypothèses de calcul.

intérêt du dispositif : Produire un champ quasiment **uniforme** et **intense** (cumul des contributions des nombreuses spires) dans une **zone bien délimitée** (champ quasi nul à l'extérieur) !

exo : Montrer que le champ produit par une bobine torique vaut $\mu_0 N I / (2\pi r) \vec{u}_\theta$ à l'intérieur et nul à l'extérieur. Intérêt de cette géométrie ?

2.4 Inductance propre d'un solénoïde

rappel de PCSI : L'inductance propre L d'un circuit électrique est définie par la relation de proportionnalité entre le courant I parcourant le circuit, et son flux propre ϕ_p (le flux à travers le circuit du champ créé par I qui le parcourt) :

$$\phi_p = L \cdot I.$$

unité : Henry H. ODG de bobines de TP : des μH à H. Donc souvent autour des mH.

prop : intérêt du bobinage : Plus la densité de spires n d'une bobine est grande, plus le flux magnétique la traversant est grand, et donc plus son inductance propre L est grande.

9. CE : Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini.

10. CE : Établir et citer l'expression du champ à l'intérieur d'un solénoïde long, la nullité du champ extérieur étant admise.

exo de cours : Considérons une tranche de longueur ℓ d'un solénoïde de section S et de $n = N/\ell$ spires par unité de longueur. Le champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde parcouru par un courant I vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ avec \vec{e}_z orienté comme le vecteur surface.

1. Donner l'expression du flux propre $\phi_{p,spire}$ à travers une spire, puis du flux propre total ϕ_p à travers les N spires que comporte une tranche de longueur ℓ .
2. En déduire l'expression de l'inductance L et de l'inductance linéique $\mathcal{L} = L/\ell$.
3. En déduire l'ordre de grandeur pour des dimensions compatibles avec une utilisation en TP : $\ell = 50$ cm ; $N = 1000$; $R = 3$ cm ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

2.5 Énergie stockée dans un solénoïde

rappel de PCSI : L'énergie stockée dans un circuit isolé d'inductance propre L parcouru par I vaut : $\mathcal{E} = \frac{LI^2}{2}$

exo de cours : Associer cette énergie à une densité volumique d'énergie.

prop¹¹ : La **densité volumique d'énergie** u_B associée au champ magnétique de norme B est $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

rq : forte analogie avec l'énergie volumique du champ électrique : $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.

3 Le dipôle magnétique

3.1 Moment magnétique d'une spire de courant

Une spire de courant produit un champ magnétique dont l'orientation dépend de l'orientation de la spire (vecteur \vec{S}) et sa norme dépend de l'intensité I .

schéma : Moment magnétique de spires plates. Influence du signe du courant.

def : Les propriétés magnétiques d'une spire plate **orientée** sont caractérisées par son **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ défini par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \cdot \vec{S}$$

Unité SI : A.m²

ATTENTION : Comme en électrocinétique, orienter un contour ne détermine pas le sens du courant, on peut avoir $I < 0$!

3.2 Notion de dipôle magnétique

def : Un **dipôle magnétique** est un objet dont le spectre de champ magnétique est similaire à celui d'une spire plate.

prop : À des distances grandes devant leur taille, **de nombreux systèmes produisent un champ magnétique similaire à une spire** : les aimants permanents, électroaimants, astres, particules...

ODG :

Système	$\ \vec{\mathcal{M}}\ $ (A.m ²)
Terre	$8 \cdot 10^{22}$
Aimant moyen	de 1 à 10
Spire de rayon 1 m et 1 A	π
Neutron	$1 \cdot 10^{-26}$
Proton	$1,4 \cdot 10^{-26}$
Électron	10^{-23}

11. CE : Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Associer l'énergie d'une bobine à une densité volumique d'énergie magnétique.

3.3 Inexistence d'un monopôle magnétique

principe : Contrairement aux sources du champ électrique (qui peuvent être des charges de même signe, dites « monopôles » par opposition aux dipôles), **il n'existe pas de monopôle magnétique**¹² ! Donc les lignes de champ magnétique ne peuvent pas converger vers un point ni diverger depuis un point.

exo : Parmi les cartes de lignes de champ suivantes, lesquelles ne peuvent pas décrire un champ magnétostatique ? Pour celles pouvant décrire un champ, préciser quelles sources en sont à l'origine.

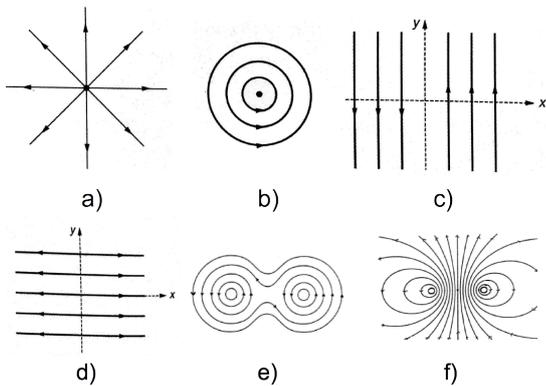


FIGURE 2 – Cartes invariantes par translation perpendiculairement au plan de la feuille.

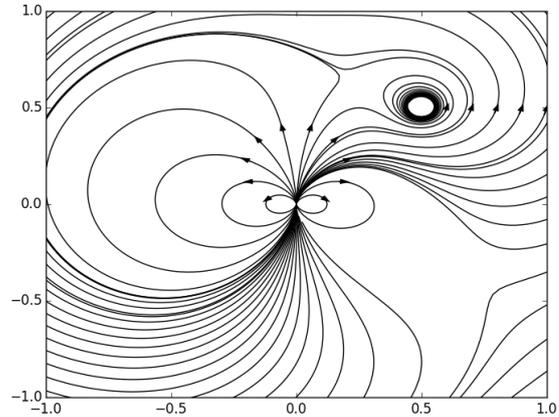


FIGURE 3 – Carte simulée par un script Python.

3.4 Moment magnétique atomique

3.4.1 Moment magnétique orbital de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, l'électron décrit une orbite autour du noyau. On considérera le cas simple où l'orbite est circulaire. Un électron qui orbite autour d'un noyau est assimilable à une spire de courant. On peut donc associer à cette orbite un moment magnétique.¹³

schéma : Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène. Expression du moment cinétique \vec{L}_o .

rappel : le moment cinétique d'une orbite \vec{L} joue un rôle important dans les propriétés des électrons d'un atome. En particulier, les nombres quantiques ℓ et m_ℓ y sont reliés.

exo de cours : Montrer que le moment magnétique associé à l'orbite est proportionnel au moment cinétique : $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_o$.

prop : Généralisation : Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ d'une orbite électronique est proportionnel au moment cinétique \vec{L} :

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \cdot \vec{L}$$

où γ est appelé **rapport gyromagnétique** de l'orbite.

prop, cas particulier : On a montré dans le cas d'une orbite circulaire électronique que $\gamma = -\frac{e}{2m}$.

3.4.2 Magnéton de Bohr

À l'échelle atomique, les valeurs de nombreuses grandeurs sont quantifiées. En particulier, la quantification de la norme ou projection de \vec{L} est un coefficient sans dimension multiplié par la constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}$ J.s.

12. CE : Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique.

13. CE : Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique.

| démo de cours : Déterminer un ODG de la quantification du moment magnétique orbital.

prop¹⁴ : L'ODG du moment magnétique \vec{M} d'une orbite électronique est évaluée par le magnéton de Bohr μ_B :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \simeq 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

| exo de cours : Déterminer l'expression du magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle (à un facteur près).

3.4.3 Moment magnétique de spin

Les particules élémentaires possèdent une propriété quantique appelée *spin*, appelée ainsi car tout ce passe comme si la particule chargée tournait sur elle-même, produisant alors un champ magnétique. On garde le nom de spin de nos jours même si on sait maintenant que c'est une propriété intrinsèque aux particules et que ce n'est pas la conséquence d'une rotation...

Finalement, le moment magnétique total d'un atome dépend des moments magnétiques des orbites électroniques, et des spins des particules.¹⁵

3.5 Moment magnétique d'un aimant

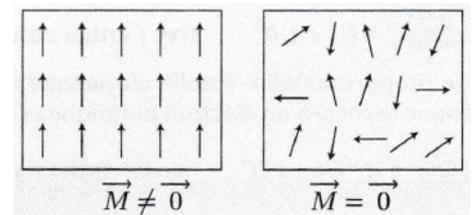
3.5.1 Matériau d'un aimant

La connaissance des différents termes diamagnétique/paramagnétique/ferromagnétique n'est pas exigible. Mais il faut avoir entendu parler des phénomènes d'aimantation induite ou permanente.

Pour de nombreux atomes/molécules/ions, les différents moments magnétiques se compensent à l'échelle de l'entité qui présente alors un moment magnétique microscopique négligeable. Il en est donc de même à l'échelle du matériau macroscopique qui sont alors peu sensibles au champ magnétique (ils ne sont que légèrement repoussés par le champ), on dit qu'ils sont *diamagnétiques*. Par exemple, l'eau, le cuivre, le graphite¹⁶.

Certains atomes ou molécules ont en revanche un moment magnétique atomique non nul. Pour la plupart des matériaux macroscopique, les moments magnétiques microscopiques sont d'orientation aléatoire, le moment résultant total du matériau est donc nul. Mais sous l'influence d'un champ magnétique extérieur, les moments microscopiques s'alignent, on parle d'**aimantation induite**. On dit que le matériau est *paramagnétique*¹⁷. Par exemple, dioxygène, aluminium, fer à $T > 770^\circ \text{C}$.

En revanche, à suffisamment basse température, certains matériaux ont des moments magnétiques microscopiques alignés même en l'absence de champ extérieur, on parle d'**aimantation permanente**. On dit que le matériau est *ferromagnétique*. Par exemple, fer à $T < 770^\circ \text{C}$. C'est avec ce genre de matériau qu'on fabrique des aimants permanent !



3.5.2 ODG maximal de \mathcal{M} d'un aimant

Le moment magnétique \vec{M} d'un aimant est la résultante des moments magnétiques microscopiques \vec{M}_{part} de toutes ses N particules. Alors le moment magnétique maximal est de l'ordre de $\mathcal{M}_{\text{max}} = 1 \text{ A.m}^2$ et le moment magnétique volumique¹⁸, appelé « aimantation », est de l'ordre de $M = d\mathcal{M}/dV = 10^6 \text{ A.m}^{-1}$.

| démo de cours : Déterminer l'ODG du moment magnétique volumique maximal d'un aimant. En déduire l'ODG du moment magnétique d'un aimant usuel.

14. CE : Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle.

15. CE : Interpréter sans calculs les sources microscopiques du champ magnétique.

16. Un IGNobel (Nobel parodique) a été attribué en 2000 à Andre Geim et Sir Michael Berry pour avoir fait léviter une grenouille de cette manière. Cela n'a pas empêché Geim d'obtenir aussi le vrai prix Nobel en 2010 avec Konstantin Novoselov pour la découverte et l'étude des propriétés électronique du graphène.

17. Analogie avec un milieu constitué de molécules polaires. En absence de champ électrique extérieur, le milieu n'est en général pas polarisé à l'échelle macroscopique

18. CE : Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.

3.6 Actions mécanique d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique

prop¹⁹ : La force \vec{F} subie par un moment magnétique \vec{M} dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$$

où on détaille l'opérateur vectoriel appliqué au champ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ en coordonnées cartésiennes :

$$(\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B} = \begin{pmatrix} M_x \cdot \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial B_x}{\partial y} + M_z \cdot \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ M_x \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial B_y}{\partial y} + M_z \cdot \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ M_x \cdot \frac{\partial B_z}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial B_z}{\partial y} + M_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

interprétation : Cette force est dirigée vers les champs magnétiques intenses.

prop : Le couple $\vec{\Gamma}$ subi par un moment magnétique \vec{M} dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

interprétation : Ce couple incite \vec{M} à s'aligner sur \vec{B} .

prop : L'énergie potentielle \mathcal{E}_p d'un moment magnétique rigide \vec{M} dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est :

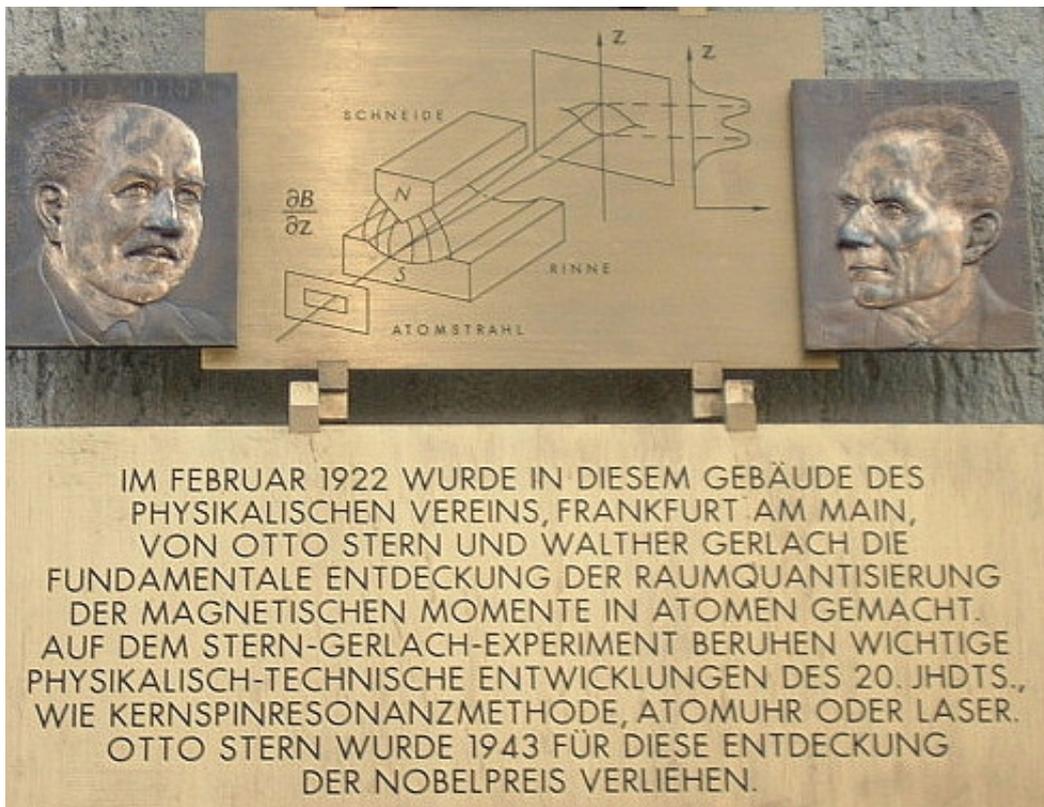
$$\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

interprétation : Cette énergie potentielle incite \vec{M} à s'aligner sur \vec{B} et à se diriger vers les champs intenses.

prop : Qualitativement, un dipôle magnétique tend à s'aligner sur le champ magnétique et à se diriger vers les champs intenses.

analogie : Le comportement de \vec{M} dans \vec{B} est similaire à celui de \vec{p} dans \vec{E} !

3.7 Expérience de Stern et Gerlach

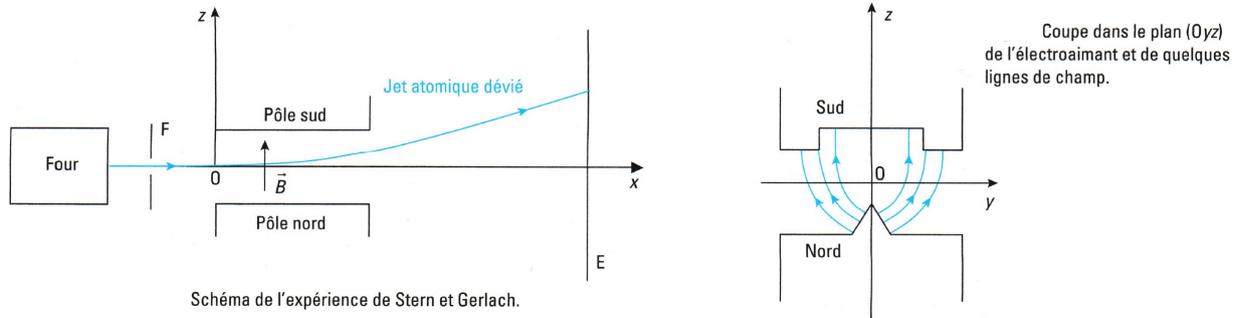


19. CE : Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Idem pour l'énergie potentielle d'un dipôle rigide. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.

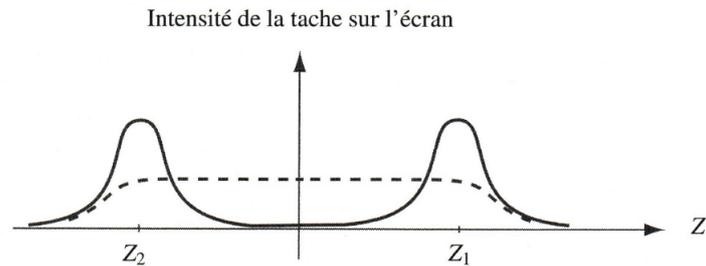
Traduction :

En février 1922, dans ce bâtiment de l'Association de Physique de Francfort-sur-le-Main, Otto Stern et Walther Gerlach firent la découverte fondamentale²⁰ de la quantification spatiale du moment magnétique de l'atome. Sur l'expérience de Stern-Gerlach reposent des développements physiques et techniques importants du 20e siècle, tels la résonance magnétique nucléaire, l'horloge atomique ou le laser. Pour cette découverte, Otto Stern reçut le prix Nobel en 1943.

L'expérience consiste à faire passer un jet d'atome d'argent dans l'entrefer d'un aimant produisant un champ magnétique inhomogène. On place ensuite un écran où des taches se forment aux points d'impact des atomes.



1. Si les atomes étaient assimilables à des aimants classiques, expliquer pourquoi on aurait observé sur l'écran une tache continue.
2. Mais l'expérience de Stern et Gerlach a donné deux taches fines distinctes ! Interpréter ce résultat.
3. Dans leur état fondamental, les atomes d'argent ont un moment magnétique orbital nul²¹. D'où vient alors le moment magnétique de l'atome d'argent ? Interpréter alors le nombre de taches.



20. CE : Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux.

21. Configuration électronique $[\text{Kr}]4d^{10}5s^1$, les sous-couches pleines sont de moment magnétique nul, et l'électron 5s est de nombre quantique orbital $\ell = 0$.