

PO1a : Propagation non dispersive : ondes mécaniques dans les solides déformables

Les ondes progressives ont déjà été abordées en PCSI et en Optique de PC. Elles concernent des **domaines de la physique très différents** (mécanique, électromagnétisme, mécanique quantique, électricité), mais présentent toujours des **phénomènes similaires** : ondes progressives ou stationnaires¹, célérité, interférences, réfraction, réflexion, diffraction, etc.

Dans certaines situations, par exemple pour une onde de tension dans un câble coaxial (cf image ci-contre et TP), on observe qu'un paquet d'onde ne se déforme pas au cours de la propagation, ce qui indique que la vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence. On parle alors de **propagation non dispersive**.

Dans ce chapitre, on traite d'exemples de telles ondes dans des domaines variés : ondes mécaniques dans un solide déformable (PO1a), ondes mécaniques dans un fluide (PO1b), ondes électromagnétiques dans le vide (PO1c).

Nous verrons que mathématiquement, l'**équation de d'Alembert**, déjà aperçue chapitre *E4-Équations de Maxwell*, rend compte de ce type de propagation².

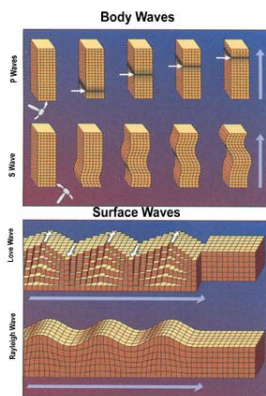


FIGURE 1 – Les ondes sismiques sont des exemples d'**ondes progressives** dans un solide déformable. Source : *Onde sismique*, Wiki, avec plusieurs animations.

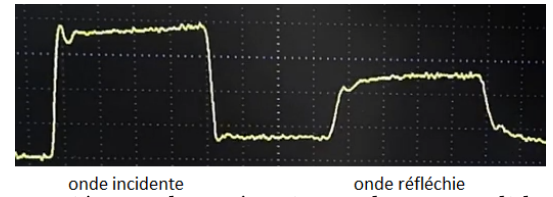


FIGURE 2 – **Ondes stationnaires** dans un cliché d'une corde de guitare en jouant *Tears in Heaven* d'Eric Clapton (*Guitar Oscillations Captured with iPhone 4*, <https://youtu.be/TKF6nFzpHBU>). Le mouvement de la corde dans la vidéo n'est évidemment pas observé à vitesse réelle mais par effet stroboscopique lié à la fréquence d'échantillonnage.

1 Vibration transverse d'une corde

On s'intéresse à la propagation des ondes dans des fils ou cordes tendus aux deux extrémités. Par exemple : corde de guitare, câble électrique aérien, etc.

1.1 Description d'une corde

Considérons une corde de longueur L et masse m . On définit sa masse linéique par $\mu = m/L$ en kg/m. ODG typique : $\mu \simeq 10^{-3}$ kg/m pour une corde de guitare classique (quelques grammes pour longueur proche du mètre).

rq : La lettre μ est souvent utilisée pour la masse *volumique* ou la masse *linéique* : attention aux unités.

def : La **tension d'une corde** en un point est la force exercée par la partie de corde d'un côté de ce point sur l'autre. Unité en Newton N. Il existe plusieurs manières de tendre une corde : vis d'une tête de guitare, masse pendue au fil après une poulie, etc. ODG typique : $T_0 \simeq 100$ N pour une corde de guitare classique.

| schéma : Direction et sens de la tension d'une corde en un point.

1.2 Observations expérimentales : différents types d'ondes transverses sur une corde

★ Ondes progressives : une perturbation appliquée à une extrémité d'une corde se propage vers l'autre extrémité. Sa célérité diminue avec la masse linéique et augmente avec la tension.

1. Cf animation <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondetran.html> avec ondes progressives ou stationnaires, longitudinales ou transverses.

2. Des exemples de propagation dispersive seront étudiés chapitre *PO2-Dispersion et absorption*.

★ Ondes stationnaires : une corde de guitare ne vibre qu'à des fréquences multiples d'une fréquence dite *fondamentale*. Cette fréquence augmente quand la corde est plus tendue (accordage guitare), ou quand la corde est plus légère, ou si elle est plus courte.

1.3 Modèle de corde infiniment souple pour de petits mouvements transverses

hypothèses de l'étude : ★ Corde homogène : masse linéique μ de même valeur en tout point et tout instant (on néglige l'influence de l'élongation sur la masse linéique).

★ Poids négligeable devant la tension de la corde, notée T_0 au repos. ODG typique : $T_0 \simeq 100$ N pour une corde de guitare classique (\gg poids $P \simeq 0,01$ N).

★ Corde infiniment souple : on néglige son aspect élastique (pas de force de rappel).

★ Petits mouvements transverses : $|y(x,t)| \ll L$, et $|\alpha(x,t)| \ll 1$:

| schéma : *Repérage du déplacement par $y(x,t)$ et $\alpha(x,t)$.*

prop : Dans l'approximation de petits mouvements transverses : $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = |\tan \alpha| \ll 1$.

1.4 Établissement de l'équation d'onde

prop : Dans l'approximation des petits mouvements, l'élongation transverse $y(x,t)$ de la corde vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

avec $c = \sqrt{T_0/\mu}$ homogène à une **célérité**. Cette équation est appelée « **équation de d'Alembert unidimensionnelle cartésienne** ».

ODG : Une corde aiguë de guitare de tension 100 N et masse linéique 0,57 g/m est siège d'ondes de célérité de l'ordre de 420 m/s.

démo³ : *Appliquer le PFD à une tranche de corde de longueur dx .*

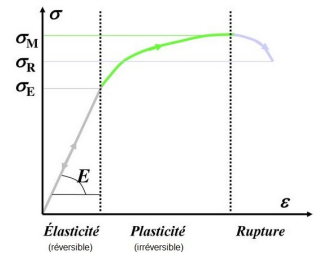
| limites du modèle : *Proposer des ODG crédibles pour commenter la validité de l'hypothèse de petits mouvements.*

2 Onde longitudinale dans un solide

2.1 Observations expérimentales

Considérons un matériau de section S et longueur L au repos. Soumis à une force de traction de norme F , il s'allonge de ΔL . On note la contrainte $\sigma = F/S$ et l'allongement relatif $\varepsilon = \Delta L/L$.

★ Figure ci-contre : graphe de contrainte en fonction de l'allongement relatif. À suffisamment faible allongement, σ et ε sont proportionnels (domaine dit « élastique ») et la déformation est réversible. Au delà d'un seuil de contrainte σ_E , la déformation est irréversible, jusqu'à éventuellement atteindre la rupture du matériau. *Schéma : Meriem Fournier, cours de propriétés du bois.*



★ La vitesse de propagation des ondes dans un solide est d'autant plus grande que le matériau est rigide ou de faible masse volumique.

2.2 Module de Young et loi de Hooke

Si on exerce une force de traction orthogonale à la face d'un matériau, celui-ci s'étire et peut se déchirer. Pour une force suffisamment faible, on observe que l'élongation est proportionnelle à la force appliquée et est réversible : relâcher la contrainte ramène le matériau à l'état initial. C'est la **loi de Hooke**.

def : Le **module de Young** d'un matériau, noté E ou Y , exprime à quel point un matériau peut s'étirer proportionnellement à une force de traction. Pour un matériau de longueur L étiré de ΔL sous l'action de la force F sur la section S :

$$\text{loi de Hooke : } \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \tag{2}$$

3. CE : Établir l'équation d'onde décrivant les ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.

unité : E homogène à force surfacique donc pression.

interprétation : Plus un matériau est élastique ($\Delta L/L$ grand à F donnée), plus E est faible. Plus un matériau est rigide ($\Delta L/L$ petit à F donnée), plus E est grand.

ODG :

matériau	caoutchouc	bois	béton	cuivre	acier	diamant
E (GPa)	0,01 – 0,1	10 – 20	20 – 50	124	200	1000

2.3 Établissement de l'équation d'onde dans l'approximation des milieux continus

On étudie les petites déformation d'un solide le long d'un axe (Ox), de section S orthogonale à cet axe, de masse volumique μ . À un instant t , une tranche de solide qui était en x au repos se trouve à l'abscisse $x + \xi(x, t)$. On néglige la pesanteur.

prop : Dans l'approximation des petits mouvements, l'élongation longitudinale $\xi(x, t)$ du solide vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

avec $c = \sqrt{E/\mu}$ homogène à une **célérité**. Cette équation est encore une « **équation de d'Alembert unidimensionnelle cartésienne** ».

ODG : Le cuivre de module de Young 124 GPa et masse volumique 9 kg/L est siège d'ondes de célérité de l'ordre de 3700 m/s.

démo⁴ : Appliquer le PFD à une tranche de solide entre x et $x + dx$. Montrer que la force subie du côté de x est $d\vec{F}(x) = -SE \frac{\xi(x) - \xi(x+dx)}{dx} \vec{u}_x$ et de même $d\vec{F}(x+dx) = +SE \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} \vec{u}_x$.

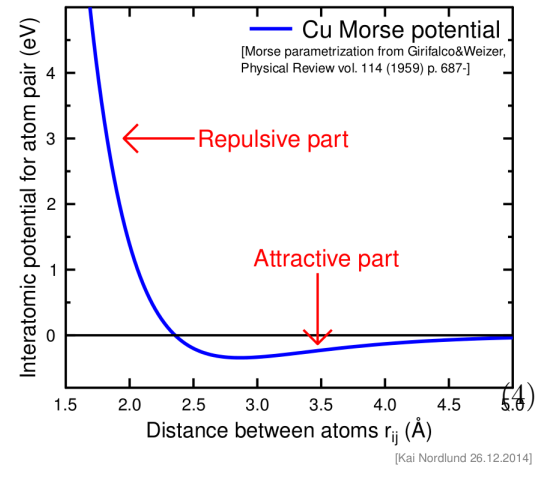
2.4 Modélisation microscopique d'un solide élastique

Dans un solide, la distance interatomique moyenne a résulte de la compétition entre forces attractives et répulsives entre atomes (électrostatique ou effets purement quantiques). Cette distance moyenne correspond au minimum de l'énergie potentielle d'interaction \mathcal{E}_p , cf figure.

ODG : énergie de liaison $|\mathcal{E}_l| \simeq$ quelques eV, distance moyenne $a \simeq 10^{-10}$ m.

Au voisinage de la distance d'équilibre stable, on peut approcher l'énergie potentielle par une fonction quadratique, ce qui correspond à l'approximation de l'oscillateur harmonique :

$$\mathcal{E}_p(a+x) \simeq \underbrace{\mathcal{E}_p(a)}_{-\mathcal{E}_l} + \underbrace{\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2}}_k \Big|_{x=a} \times \frac{x^2}{2}$$



Ce qui définit la « **raideur** » k de l'interaction entre atomes, modélisée formellement comme un système masse-ressort.

prop : En ordre de grandeur, on montre⁵ que le module de Young d'un solide vaut $E = k/a$ avec la raideur k de l'interaction atomique et la distance a entre atomes.

démo : « Relier la raideur des ressorts fictifs à l'énergie de liaison et évaluer l'ordre de grandeur du module d'Young. »

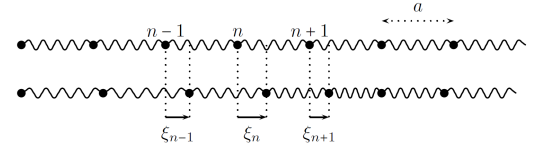
1. Par analyse dimensionnelle, relier la raideur k de l'interaction interatomique à l'énergie de liaison $|\mathcal{E}_l|$ et la distance a . En déduire l'ODG de k . Comparer à l'ODG d'un ressort usuel.
2. En modélisant un solide comme un réseau 3D de ressorts, déterminer que le module de Young est donné par $E \simeq k/a$. Estimer son ODG et comparer aux valeurs expérimentales.

4. CE : Établir l'équation d'onde décrivant les ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide.

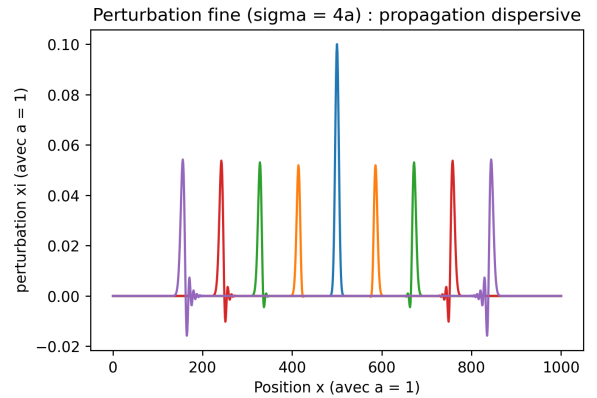
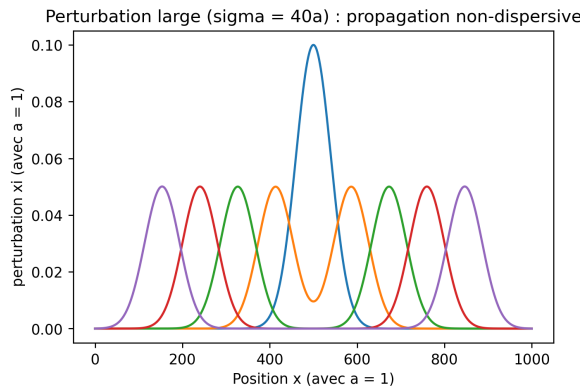
5. CE : Exploiter le modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés pour relier le module d'Young d'un solide élastique à ses caractéristiques microscopiques.

2.5 Développement du modèle microscopique

Le principe est de modéliser le solide comme une chaîne infinie de masses identiques m reliées par des ressorts identiques de longueur à vide a et raideur k . On note $x_n(t)$ la position de la n -ième masse, et $\xi_n(t) = x_n(t) - x_{n,eq}$ son déplacement à t par rapport à sa position au repos. À l'équilibre, $x_{n,eq} = na$.



- mise en équation : La masse n est reliée à deux ressorts. Exprimer les deux forces subies en fonction de $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$. En déduire : $m \frac{d^2 \xi_n(t)}{dt^2} = k (\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) - 2\xi_n(t))$.
- résolution numérique : Proposer le schéma de la résolution numérique par la méthode d'Euler.
- résultat de la simulation : La résolution a été effectuée dans le cadre d'une excitation initiale au centre du système. Les figures suivantes sont les résultats pour une perturbation très large devant a et plus fine. Commentaire.



- approximation des milieux continus : Si la distance interatomique a est très faible devant les distances caractéristiques des phénomènes de propagation (par exemple longueur d'onde ou étalement d'une perturbation), on procède alors à une approximation des milieux continus : $\xi_n(t) = \xi(x = na, t)$ (la suite ξ_n est donc approchée par la fonction à deux variables $\xi(x, t)$). Après avoir effectué un développement limité à l'ordre 2, montrer que le PFD devient : $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.
- Exprimer la célérité de l'onde et remarquer qu'on trouve une relation compatible avec $\sqrt{E/\mu}$ obtenue par l'autre méthode.

rq : Le cas de la propagation dispersive sera développé chapitre PO2, et notamment une autre manière⁶ de coder la simulation.

3 Propriétés de l'équation de d'Alembert

De nombreuses situations différentes sont décrites par un modèle régi par l'équation de d'Alembert⁷

3.1 Équation de d'Alembert

def : Pour une grandeur physique unidimensionnelle cartésienne $s(x, t)$, l'équation de d'Alembert unidimensionnelle cartésienne est $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$ avec c homogène à une célérité.

def : Dans le cas général, pour une grandeur physique $s(\vec{r}, t)$, l'équation de d'Alembert est :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \Delta s = 0 \tag{5}$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

rq : L'équation de d'Alembert peut aussi concerner des champs de vecteurs, cf électromagnétisme.

6. Le script utilisé dans ce chapitre-ci est comme d'habitude sur le Cahier de Prépa sous le nom script_P01_propagation_ressort.

7. CE : Identifier l'équation de d'Alembert.

prop : L'équation de d'Alembert est linéaire.

prop : La célérité d'une onde mécanique vérifie qualitativement ⁸ :

$$c^2 = \frac{\text{raideur}}{\text{inertie}} \quad (6)$$

ex : $c^2 = T_0/\mu$ (corde), $c^2 = E/\mu$ (solide).

interprétation : L'onde se propage d'autant plus vite que la raideur est grande (chaque portion tire beaucoup sur ses voisins). L'onde se propage d'autant plus vite que l'inertie est faible (chaque portion se déplace facilement).

3.2 Exemple de solution : onde plane progressive (OPP)

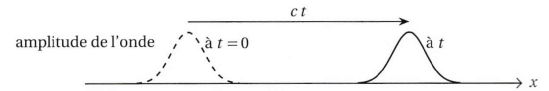
prop : Soit **une onde plane progressive** $s(x, t)$ se propageant à célérité c . Son expression générale est du type :

- si propagation suivant x croissant : $s(x, t) = f(t - x/c)$
- si propagation suivant x décroissant : $s(x, t) = g(t + x/c)$

rq : de manière équivalente, on peut utiliser les écritures $s(x, t) = f(x - ct)$ et $s(x, t) = g(x + ct)$.

exo : Injecter l'expression générale d'une onde plane progressive dans l'équation de d'Alembert pour vérifier que c'est bien une solution.

prop : Une onde progressive unidimensionnelle régit par l'équation de d'Alembert ne se déforme pas au cours de la propagation. La propagation est dite **non dispersive**.



3.3 Exemple de solution : onde plane progressive harmonique (OPPH)

rappel : Un signal quelconque se décompose en somme de signaux sinusoïdaux par décomposition de Fourier.

prop : Comme l'équation de d'Alembert est linéaire, il suffit alors de chercher les solutions sinusoïdales.

prop : Soit **une onde plane progressive sinusoïdale** $s(x, t)$ de pulsation ω se propageant à la célérité c . Son expression générale est du type :

- si propagation suivant x croissant : $s(x, t) = f_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$. Ou $s(x, t) = f_0 \exp(j(\omega t - kx + \phi))$
- si propagation suivant x décroissant : $s(x, t) = g_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$. Ou $s(x, t) = g_0 \exp(j(\omega t + kx + \phi))$

prop : Généralisation pour une propagation selon \vec{k} , avec vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$:

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \quad (7)$$

def : « **Vecteur d'onde** » $\vec{k} = k\vec{u}$, avec k de dimension $[k] = L^{-1}$, et \vec{u} vecteur unitaire dirigeant la propagation.

Double périodicité spatiale et temporelle

• Qu'enregistre un capteur placé en x_0 ? Vibration locale $s(x_0, t) = f_0 \cos(\omega t - kx_0)$.

prop : Vibration de période (temporelle) $T = 2\pi/\omega$.

• Qu'enregistre une photo à un instant t_0 ? Allure spatiale de vibration : $s(x, t_0) = f_0 \cos(\omega t_0 - kx)$.

prop : Vibration de « période spatiale » $\lambda = 2\pi/k$, appelée « **longueur d'onde** ».

Relation de dispersion

démo de cours : Injecter la solution OPPH selon x dans l'équation de d'Alembert unidimensionnelle et en déduire la relation $\omega^2 = c^2 k^2$.

8. CE : Relier qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.

def : On appelle **relation de dispersion**, la relation entre k et ω d'une onde progressive.

prop : Dans le cas d'une onde vérifiant l'équation de d'Alembert, la relation de dispersion est $k = \pm\omega/c$.

def : On appelle **vitesse de phase** $v_\varphi = \omega/k$. On dit que la propagation est non-dispersive si v_φ est identique pour toutes les composantes de Fourier, donc si v_φ ne dépend pas de ω (ou k).

prop : Pour l'équation de d'Alembert, on trouve $v_\varphi = \pm c$ donc constante. Le signe indique le sens de propagation $\pm\vec{u}_x$. Comme v_φ ne dépend pas de ω , on montre encore que **la propagation d'une onde régie par l'équation de d'Alembert est non-dispersive**.

prop : La relation de dispersion donne alors : $\lambda = cT = \frac{c}{f}$.

3.4 Exemple de solution : onde stationnaire harmonique

def : Une onde réelle $s(x, t)$ est dite « **onde stationnaire** » si les dépendances spatiales et temporelles sont factorisées dans son expression réelle :

$$s(x, t) = f(x) \cdot g(t) \quad (8)$$

Cette onde n'est pas progressive, pas de terme couplant t et x en $(t \pm x/c)$.

rq : En notation complexe, une OPPH d'une grandeur réelle peut se factoriser : $e^{j(\omega t - kx)} = e^{j\omega t} e^{-jkx}$ mais ne sera pas appelée *stationnaire*⁹.

prop : On peut montrer¹⁰ que les solutions en ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

$$s(x, t) = s_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) \cos(\omega t + \psi) \quad (9)$$

exemples : traités dans la sous-partie suivante sur la corde vibrante.

démo :

1. Injecter une onde stationnaire $s(x, t) = f(x)g(t)$ dans l'équation de d'Alembert pour montrer que $c^2 \frac{f''}{f} = \frac{\ddot{g}}{g}$.
2. En analysant de quelles variables dépendent les termes de l'équation précédentes, démontrer que $g(t) = A \cos(\omega t + \psi)$ et $f(x) = B \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)$.
3. Conclure sur l'expression générale des ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert.

4 Ondes stationnaires dans une corde vibrante

4.1 Régime libre : modes propres d'une corde vibrante

Considérons une corde de longueur L fixée aux deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. Exemples : instrument à cordes, câble électrique aérien, etc. On repère par $y(x, t)$ le déplacement transverse de la corde par rapport au repos. Les conditions aux limites s'écrivent alors : $y(0, t) = 0$, et $y(L, t) = 0$ pour tout instant t .

Modes propres

Cherchons des solutions de l'équation d'onde sous la forme d'onde stationnaire harmonique :

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \quad (10)$$

exo de cours : Démontrer que les conditions aux limites imposent une quantification de k et ω .

prop : Le **confinement** de l'onde dans un domaine de taille finie impose une **quantification** de k et ω :

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n = n \frac{\pi c}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (11)$$

9. Contrairement à un état stationnaire de mécanique quantique qui est de base une onde à valeur complexe, cf cours PO5.

10. CE : Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive.

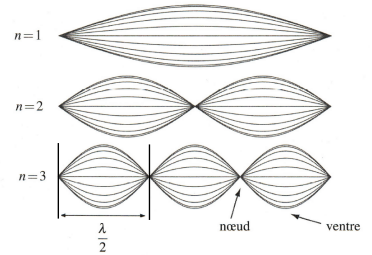
prop : Les fréquences ν_n sont des multiples entiers d'une fréquence ν_1 appelée **fréquence fondamentale** : $\nu_n = n\nu_1$

avec $\nu_1 = \frac{c}{2L}$.

prop : La longueur L de corde est un multiple de demi-longueurs d'onde : $L = n \frac{\lambda_n}{2}$.

prop : Les solutions en ondes stationnaires de la corde fixée sont dits « **modes propres** » de la corde vibrante¹¹ :

$$y_n(x, t) = C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^* \quad (12)$$



Les fréquences $\nu_n = nc/(2L)$ sont dites « fréquences propres ». Le mode $n = 1$ est dit « mode fondamental », le mode $n > 1$ est dit « n -ième harmonique ».

prop : De manière générale, **confiner une onde dans un domaine de taille finie impose une quantification** de certaines propriétés de l'onde, et donne des solutions en ondes stationnaires.

ex : corde, onde lumineuse dans cavité Fabry-Pérot (cf TP câble coaxial), particule dans un puits de potentiel (cf cours PO5), etc.

Solution générale

La solution générale est combinaison linéaire de tous les modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^* \quad (13)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) \right) \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (14)$$

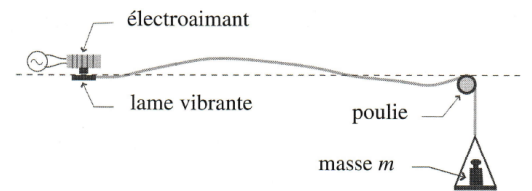
Les différents coefficients A_n et B_n sont déterminés par les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(x, 0) = a(x) & \text{avec } a(x) \text{ non nul si on lâche initialement la corde hors-équilibre (guitare)} \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = b(x) & \text{avec } b(x) \text{ non nul si on frappe initialement la corde (piano)} \end{cases} \quad (15)$$

Ainsi, les A_n sont reliés à $a(x)$ et les B_n à $b(x)$, et pourrait être quantitativement déterminés par développement en série de Fourier de a et b (hors programme en PC).

4.2 Régime forcé : résonances de la corde de Melde

Considérons le dispositif dit « corde de Melde » vu en TP où une corde de longueur L est tendue à une extrémité par une masse et une poulie, et est soumise à l'autre extrémité à une excitation sinusoïdale à ω variable. Cette fois, les conditions aux limites sont :



$$y(0, t) = y_0 \cos(\omega t), \quad \text{et } y(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (16)$$

exo de cours : Considérons une solution d'onde stationnaire à même pulsation que l'excitation. En l'absence de dissipation, démontrer que les conditions aux limites conduisent à un phénomène de résonance quand ω vaut une pulsation propre.

prop¹² : Pour une corde sous excitation sinusoïdale, on observe une résonance de l'onde stationnaire quand la pulsation d'excitation est accordée sur une pulsation propre.

11. CE : Décrire les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

12. CE : Interpréter quantitativement les résonances observées avec la corde de Melde en négligeant l'amortissement.