TDE4 : Équations de Maxwell

Savoirs

• Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales. Cas statique. Compatibilité avec conservation de la charge.
• Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.
• Équations de propagation des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide. Caractère non instantané des interactions électromagnétiques. Relation $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$.
• ARQS « magnétique » : loi des nœuds et théorème d'Ampère.

Savoir-faire

• Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale (*exos 2, 3, 4, 5*).
⋆ <u>démo de cours</u> : *Démontrer l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. On rappelle la propriété à connaître* $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A}\right) = 0$ *pour tout champ vectoriel* $\overrightarrow{A}$.

• Utiliser les grandeurs énergétiques pour faire des bilans d'énergie électromagnétique. *Tous les exos.*
⋆ <u>démo de cours</u> : *En effectuant un bilan sur une tranche dx d'un système à géométrie unidimensionnelle cartésienne, démontrer l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique* $\partial j_{em}/\partial x + \partial u_{em}/\partial t = -\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$.
⋆ <u>démo de cours</u> : *Utiliser les équations de Maxwell pour obtenir une équation de bilan local. On utilisera la relation* $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B}$.

• Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée en optique.
⋆ <u>ex</u> : *Par conservation du flux de* $\overrightarrow{R}$, *justifier que l'intensité lumineuse d'une onde sphérique s'atténue en* r^{-2}. *Que dire de l'atténuation avec la distance pour un système de chauffage, parfois utilisé dans des lieux publics, consistant en un cylindre chaud émettant principalement dans l'infra-rouge ?*

• Établir les équations de propagation. Interpréter c.
⋆ <u>démo de cours</u> : *Établir les équations de propagation de* $\overrightarrow{E}$ *et* $\overrightarrow{B}$ *dans le vide. On rappelle la relation* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}(\overrightarrow{A})\right) - \Delta\overrightarrow{A}$.

• Discuter la légitimité du régime quasistationnaire.
⋆ <u>ex</u> : *Pour un signal de fréquence* 1 MHz, *quelle est l'ODG de la taille maximale d'un circuit électrique pour que l'ARQS soit valide ?*

• Dans le cadre de l'ARQS magnétique, simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge, utiliser les formes simplifiées (*exos 2, 4*).

Interro de cours

1. Donner les équations de Maxwell sous forme locale et sous forme intégrale.
2. Soit un champ scalaire f, que vaut $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\right)$? Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$, que vaut $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\right)$?
3. Donner l'expression de la puissance volumique cédée par le champ aux charges.
4. Donner la densité volumique d'énergie du champ électromagnétique.
5. Donner l'expression du vecteur de Poynting et l'équation de conservation de l'énergie du champ.
6. Donner l'équation de propagation du champ électrique $\overrightarrow{E}$ dans le vide. Et pour $\overrightarrow{B}$? Quel est le nom de ce type d'équation ?
7. Donner une expression qui relie la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide aux grandeurs ε_0 et μ_0.
8. Donner l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1 Bilan d'énergie dans un câble en régime permanent

Considérons un câble cylindrique de rayon a d'axe z parcouru par une densité de courant $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_z}$ uniforme et constante. Le matériau est de conductivité électrique σ. L'objectif de l'exercice est d'interpréter la puissance reçue par le matériau en terme de bilan d'énergie électromagnétique.

1. Exprimer l'intensité I en fonction des données.
2. Exprimer le champ $\overrightarrow{E}$ dans tout l'espace.
3. Exprimer le champ $\overrightarrow{B}$ au bord du câble en $r = a$.
4. Exprimer le vecteur de Poynting puis calculer le flux d'énergie électromagnétique entrant dans un câble de longueur h.
5. Interpréter ce résultat en reconnaissant la résistance du câble.
6. Exprimer le champ $\overrightarrow{B}$ dans le câble. En déduire l'énergie électromagnétique totale contenue dans un câble de longueur h.

2 Bilan d'énergie dans un solénoïde

Un solénoïde de longueur ℓ et d'axe Oz comprend $N = n\ell$ spires circulaires de rayon a parcourues par un courant d'intensité $I(t)$. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et pour $\ell \gg a$.

1. Dans le cadre d'un courant statique, on montre que $\overrightarrow{B} = \mu_0 nI\overrightarrow{e_z}$ par le théorème d'Ampère. Cette relation est-elle toujours valable ? Est-elle valable dans le cadre de cet exercice ?
2. À partir d'invariance et de symétrie, déterminer que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E} = E_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$.
3. Rappeler la loi de Faraday sous la forme avec circulation de $\overrightarrow{E}$. Chercher le champ électrique en choisissant un contour judicieux.
4. Variante de la question précédente : calculer le champ électrique par une équation de Maxwell sous forme locale. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(E\overrightarrow{u_\theta}) = (-\partial E/\partial z)\overrightarrow{u_r} + ((1/r)\partial(rE)/\partial r)\overrightarrow{u_z}$.
5. En déduire la puissance électromagnétique entrante $\mathcal{P}_{em}$ dans le solénoïde.
6. Exprimer l'énergie magnétique U_m du solénoïde. Comparer dU_m/dt à $\mathcal{P}_{em}$ et commenter.

3 Bilan de puissance dans un condensateur

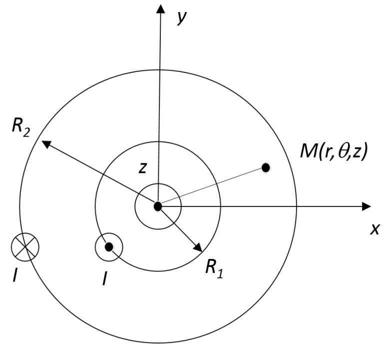
On considère un condensateur plan formé de deux disques de rayon a distants de $e \ll a$, donc on négligera les effets de bords. Il est soumis à une tension variable $U(t)$. Dans ce cadre, on admet que le champ électrique est uniforme entre les plaques et vaut $\overrightarrow{E} = -(U/e)\overrightarrow{u_z}$ avec $\overrightarrow{u_z}$ dans le même sens que la tension $U(t)$.

1. Justifier que $\overrightarrow{B}(M) = B(r,z)\overrightarrow{u_\theta}$ entre les armatures du condensateur.
2. Démontrer que sur le bord du condensateur ($r = a$), le champ magnétique vaut : $\overrightarrow{B} = -\frac{\varepsilon_0\mu_0 a}{2e}\frac{dU}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$.
3. Calculer le vecteur de Poynting et interpréter sons sens.
4. Calculer la puissance totale entrante et interpréter.

4 Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres métalliques creux, de même axe Oz, de rayons R_1 et R_2. Ailleurs que sur les deux conducteurs, on considère que le milieu a les propriétés magnétiques du vide. Les cylindres sont parcourus par des courants répartis de façon uniforme sur sur leur surface et en sens inverse l'un de l'autre : $I(t,z) = I_0 \cos(\omega t - kz)$. Il existe alors dans tout l'espace un champ électromagnétique de la forme suivante :

$$\overrightarrow{B} = B(r,\theta,z,t)\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E} = E(r,\theta,z,t)\overrightarrow{e_r}$$



1. Justifier les vecteurs directeurs des champs.
2. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique dans les trois régions de l'espace. Pour cette question, on se placera dans l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).
3. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, trouver une relation entre $\dfrac{\partial B}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial z}$. En déduire l'expression du champ électrique.
4. Montrer que la relation de Maxwell-Ampère est vérifiée si k et ω vérifient une relation simple à déterminer.
5. Déterminer le vecteur de Poynting et en déduire la direction de propagation de l'énergie. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble.
6. Déterminer la densité volumique d'énergie et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

Données :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v}(M)) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

5 Courants de Foucault et feuilletage

Un flux magnétique variable à travers une masse de matériau conducteur y génère des courants, appelés courants de Foucault, qui dissipent alors de l'énergie par effet Joule. Le chauffage par induction fait partie des applications où on tire profit de ce phénomène. Au contraire, les courants de Foucault génèrent des pertes dans les dispositifs conducteurs soumis à des champs magnétiques variables (comme par exemple les matériaux ferromagnétiques au cœur des transformateurs).

Considérons une plaque infinie entre les plans $z = -a$ et $z = a$ constituée d'un matériau de conductivité σ. Elles est soumise à un champ magnétique extérieur uniforme $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$ devant lequel on négligera le champ induit généré par les courants de Foucault. On admet que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E} = E(z)\overrightarrow{u_y}$.

1. Déterminer $E(z)$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.
2. En déduire la densité de courant induite $\overrightarrow{j}$.
3. Montrer que la valeur moyenne de la puissance volumique transmise au matériau par le champ vaut $< \mathcal{P}_v >= \sigma B_0^2 \omega^2 z^2/2$.
4. En déduire la puissance totale dissipée dans un bloc de métal d'épaisseur $2a$ suivant z, de largeur $b \gg a$ suivant x, et de longueur $L \gg a$ suivant y. On trouve $\mathcal{P} \propto a^3$.
5. On feuillette le matériau en le coupant en N tranches d'épaisseur $2a/N$ séparées par une très mince couche d'isolant. Expliquer l'intérêt de ce feuilletage.

6 Rayonnement d'une particule radioactive

Une petite bille de césium radioactive assimilée à un point et initialement neutre, émet à compter de $t = 0$, des électrons de manière isotrope (équiprobable dans toutes les directions de l'espace) avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_r}$ avec v_0 constante. Le nombre d'électrons émis par unité de temps (supposé constant) est noté α. On néglige toute force subie par les électrons après leur émission.

1. Montrer que la densité de charge volumique s'écrit : $\rho(r > v_0 t, t) = 0$, $\rho(r < v_0 t, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0}$.
2. Montrer que la densité de courant volumique s'écrit : $\overrightarrow{j}(r > v_0 t, t) = 0$, $\overrightarrow{j}(r < v_0 t, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2}\overrightarrow{u_r}$.
3. Déterminer l'expression des champs électrique et magnétique en étudiant d'abord leurs symétrie/invariance.
4. calculer $\partial u/\partial t$ et comparer à la puissance volumique cédée aux charges.