TDPO1a : Propagation non dispersive : ondes mécaniques dans les solides déformables

Savoirs

• Corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
• Ondes acoustiques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus. Loi de Hooke et module de Young.
• Équation de d'Alembert. Exemples de solutions en ondes progressives harmoniques et ondes stationnaires harmoniques. Applications au régime libre et forcé d'une corde.

Savoir-faire

• Corde vibrante transverse : établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal. *Exo 1.*

• Modèle mésoscopique de solide élastique : établir l'équation d'onde à partir du module de Young d'une tranche mésoscopique de solide de longueur dx. *Exo 3.*

• Modèle microscopique de solide élastique : en modélisant un solide comme un réseau 3D de ressorts, relier l'ordre de grandeur du module de Young au caractéristiques microscopiques. Établir l'équation d'onde sur une chaine unidimensionnelle de ressort. *Exo 2.*

• Associer qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.

• Corde vibrante transverse : en régime libre, décrire les modes propres ; en régime forcé, en négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé. *Exo 1.*

• Reconnaître une équation de d'Alembert (*exo 5*) ou des ondes stationnaires pour d'autres modélisations (*exos 4 et 6*).

Interro de cours

1. Donner la célérité des ondes transverses dans une corde de masse linéique μ et tension T_0.
2. Donner la loi de Hooke pour un matériau de section S initialement de longueur L allongé de ΔL sous la force de norme F.
3. Donner la célérité des ondes longitudinales dans un solide élastique de module de Young E et masse volumique μ.
4. Relier en ODG la raideur k, l'énergie $\mathcal{E}$ et la distance a pour une liaison entre deux atomes.
5. Donner l'équation de d'Alembert dans le cas général et le cas unidimensionnel cartésien pour une onde s de célérité c. Donner la relation de dispersion.
6. Donner le lien général entre c, raideur et inertie.
7. Pour une onde stationnaire confinée dans une cavité symétrique, donner le lien entre la longueur d'onde λ et la longueur L de la cavité. En déduire les valeurs des fréquences, pulsations, norme de vecteur d'onde.

1 Mesure de masse volumique par ondes stationnaires d'une corde

Une corde sans raideur de masse linéique μ_l est fixée en $x = 0$ et tendue sous une tension T_0 en $x = L$ par une boule de masse m et volume V.

1. Démontrer l'équation de propagation de l'onde de vibration transverse dans la carde dans l'approximation des petits mouvements. En déduire que la célérité est sous la forme $c = T_0^\alpha \mu_l^\beta$ où on précisera les valeurs de α et β.
2. Lorsqu'elle est excitée par un vibreur en $x = 0$ à pulsation ω, on observe une résonance avec deux ventres. Puis on immerge la boule dans de l'eau liquide. On observe alors une résonance avec quatre ventres. En déduire la masse volumique ρ de la boule.

2 Modèle microscopique du module de Young

On considère un cylindre solide macroscopique de longueur L et section S. On le modélise comme un réseau cubique simple d'atomes reliés par des ressorts de raideur k. La distance au repos entre atomes est notée a. En appliquant une force de norme F orthogonale à la section, le solide s'allonge de ΔL. On rappelle la loi de Hooke $F/S = E\Delta L/L$ avec le module de Young E.

1. Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison entre atomes voisins dans un solide ? Quel est l'ordre de grandeur de la distance entre atomes ? En déduire par analyse dimensionnelle un ordre de grandeur de la raideur k.
2. Exprimer le nombre d'atomes N_{face} sur la face de section S, en fonction de S et a.
3. Exprimer le nombre d'atomes N_{longueur} sur une ligne de ressort le long de la longueur L du cylindre, en fonction de L et a.
4. Relier l'élongation ΔL du solide à N_{longueur} et à l'élongation microscopique Δx d'une liaison entre deux atomes voisins.
5. Relier la force F à N_{face} et à l'élongation microscopique Δx d'une liaison entre deux atomes voisins.
6. En déduire que le module de Young vaut $E = k/a$ et calculer son ordre de grandeur.

3 Vibration longitudinale d'un ressort : au delà de l'ARQS (**)

On considère un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile M est reliée à une masse ponctuelle m libre se déplaçant sans frottements le long de l'axe (Ox). On note μ la masse linéique du ressort. On assimile ce ressort à un solide élastique. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke :

$$\overrightarrow{F} = K\frac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$$

1. En appliquant le PFD une tranche de ressort de longueur dx, montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante.

On fait l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), c'est-à-dire qu'on néglige les dérivées temporelles dans l'équation de d'Alembert. On note $L + X(t)$ la position de la masse m.

2. Quelles sont les conditions aux limites imposées à la fonction $\xi(x,t)$ d'une part par le mur en $x = 0$ et d'autre part par la masse m en $x = L$?
3. Déterminer que $\xi(x,t) = X(t)x/L$.
4. En déduire la force exercée par le ressort sur la masse m en fonction de K, L et X. En déduire la raideur k du ressort en fonction de K et L.
5. Déterminer la pulsation ω_{arqs} des oscillations de la masse. En déduire une condition sur μ, L et m pour que l'ARQS soit validée. *[Indice : l'ARQS est valide si la durée de propagation de l'onde sur la longueur du ressort est négligeable devant la période des oscillations de la masse.]*

On revient au cas général. Donc $\xi(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert.

6. On cherche des solutions de la forme $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$. Établir l'équation dont est solution $f(x)$. En utilisant la condition aux limites en $x = 0$, déterminer sa forme à une constante multiplicative près en fonction de ω, x et c.
7. Appliquer le PFD à la masse pour montrer que ω est solution de : $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{m\omega c}$. Discuter graphiquement l'existence de solution pour ω.
8. Si on sait qu'il existe une seule solution ω dans l'intervalle $[\omega_a, \omega_b]$, et qu'on dispose des valeurs des paramètres `c`, `L`, `K`, `M`, écrire le code `Python` qui stockera la solution dans la variable `omega` à 10^{-4} près.

9. On suppose que $\mu L \ll m$ et que $\omega \ll c/L$. En utilisant le développement limité $\tan(u) \sim u + u^3/3$, déterminer ω à l'ordre 2 en $\mu L/m$ en fonction de K, μ, L et m. Vérifier que tout se passe comme si on accrochait à un ressort sans masse une masse ponctuelle fictive $m^* = m + \alpha\mu L$ où α est un nombre à déterminer.
   Données :
   développement limité à l'ordre 2 de $(1+x)^n$ pour $x << 1$: $(1+x)^n \sim 1 + nx + \dfrac{(n(n-1))}{2!}x^2$.

4 Mesure de module de Young d'un acier

Une tige cylindrique d'acier est suspendue horizontalement. On frappe d'un côté avec un marteau et on enregistre le son émis de l'autre côté. Le spectre du signal reçu contient les fréquences suivantes :

numéro	1	2	3	4	5
f_n (Hz)	$3649,9$	$7297,1$	$10944,3$	$14591,4$	$18235,9$

On suppose que les conditions aux limites des ondes dans la tige sont identiques de chaque côté. L'incertitude de mesure de fréquence est de $1,35$ Hz. Caractéristiques du barreau : longueur $L = 70,15 \pm 0,05$ cm, diamètre $D = 11,65 \pm 0,02$ mm, masse $M = 578,2 \pm 0,1$ g. En déduire le module de Young de cet acier.

5 Équation de d'Alembert dans un câble coaxial

Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire peut être modélisée par le schéma de la figure 15, comportant une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$ et une capacité élémentaire $dC = \Gamma dx$. On traite ce circuit de faible dimension dx dans l'ARQS en supposant $dx \ll \lambda$.

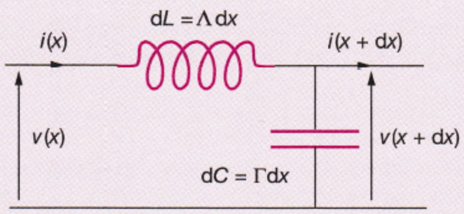

Figure 15

1. Établir les deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité $i(x,t)$ et la tension $v(x,t)$.

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (2)$$

2. En déduire que ces grandeurs sont solutions d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle et exprimer la célérité c correspondante.

3. Dans le cas d'une onde progressive harmonique de pulsation ω se propageant selon $+\overrightarrow{u_x}$, montrer que le rapport $v(x,t)/i(x,t)$ est une constante Z_c liée aux caractéristiques de la ligne. Que vaut le même rapport pour une onde plane progressive se propageant selon $-\overrightarrow{u_x}$?

6 Ondes stationnaires dans un câble coaxial

On considère un câble coaxial de longueur $L = 100$ m parcouru par des ondes de courants $i(x,t)$ et tension $u(x,t)$. On donne $\partial i/\partial x = -\Gamma \partial u/\partial t$ et $\partial u/\partial x = -\Lambda \partial i/\partial t$ avec la capacité linéique Γ et l'inductance linéique Λ.

1. Pour une solution de type onde stationnaire sur la tension $u(x,t) = a\cos(kx)\sin(\omega t)$, justifier qu'un nœud de tension correspond à un ventre de courant et réciproquement.
2. En une extrémité du câble en circuit ouvert, est-ce un nœud ou ventre de courant ?
3. En une extrémité du câble en court-circuit, est-ce un nœud ou ventre de courant ?
4. On place une extrémité du câble sur une résistance $R = 1$ kΩ reliée à un GBF en régime sinusoïdal. L'autre extrémité est reliée à une résistance $R' = 1$ MΩ aux bornes de laquelle on mesure la tension à l'oscilloscope. Comme les deux résistances sont grandes devant l'impédance caractéristique, on retrouve des conditions aux limites proches du circuit ouvert. On observe des résonances pour $f_1 = 0,99$ MHz, $f_2 = 1,98$ MHz. En déduire la vitesse de phase de l'onde.