TDMF1 : Description d'un écoulement

Savoirs

• Champ eulérien des vitesses. Lignes et tubes de courant.
• Dérivée particulaire de masse volumique. Équation de conservation de la masse. Écoulement incompressible. Débit massique et volumique.
• Dérivée particulaire de la vitesse. Terme local, terme convectif. Écoulement irrotationel. Potentiel des vitesses.

Savoir-faire

• Démo de cours : établir l'expression de $D\mu/dt$.
• Démo de cours : établir l'équation de conservation de la masse en cartésien 1D.
• Démo de cours : établir l'expression de $D\overrightarrow{v}/Dt$ en cartésien.
• Caractériser un écoulement incompressible par $\mathrm{div}\overrightarrow{v} = 0$. Appliquer la conservation du débit.
• Connaître, interpréter et utiliser les différents termes de $D\overrightarrow{v}/Dt$. Utiliser l'expression fournie $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v}$.
• Caractériser un écoulement irrotationnel par $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou l'existence d'un potentiel des vitesses.

Interro de cours

1. Pour un écoulement incompressible, quelle relation simple vérifie le champ de vitesse $\overrightarrow{v}$? Quel champ est à flux conservatif ?
2. Pour un écoulement stationnaire, quelle relation simple vérifie le champ de vitesse $\overrightarrow{v}$? Quel champ est à flux conservatif ?
3. Donner l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique $\dfrac{D\mu}{Dt}$ en fonction de μ et $\overrightarrow{v}$.
4. Donner l'équation de conservation de la masse.
5. Donner l'expression de l'accélération particulaire $\dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt}$ en fonction de $\overrightarrow{v}$.
6. Soit un champ de vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes (v_x, v_y, v_z) en base cartésienne. Donner l'expression de $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v})$ en fonction de v_x, v_y et v_z.
7. Soit un champ scalaire V. Donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ en base cartésienne.
8. Soit un champ de vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes (v_x, v_y, v_z) en base cartésienne. Donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{v})$ en fonction de v_x, v_y et v_z.
9. Soit deux champs de vecteur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ de composantes (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) en base cartésienne. Donner l'expression de $\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{b}$ en base cartésienne.
10. Donner l'expression de la circulation d'un champ de vecteur $\overrightarrow{v}$ sur un contour $\mathcal{C}$.
11. Dessiner un exemple de champ de vitesse d'un écoulement incompressible et d'un écoulement non incompressible. Même chose pour un écoulement irrotationnel et un écoulement non irrotationnel.
12. Donner les théorèmes de Stokes et de (Green-)Ostrogardsky.

Formulaire

⋆ Gradient d'un champ scalaire f :

cylindrique : $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

sphérique : $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

⋆ Divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{a}$:

cylindrique : $$\mathrm{div}(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

sphérique : $$\mathrm{div}(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

⋆ Rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{a}$ en cylindrique puis sphérique :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} \; + \; \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta . a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right).\overrightarrow{u_r} \; + \; \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r}\right).\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right).\overrightarrow{u_\varphi}$$

1 Caractéristiques d'un écoulement

On considère un écoulement dont le champ eulérien des vitesses est $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t) = -\Omega y \overrightarrow{u_x} + \Omega x \overrightarrow{u_y} + v_0 \overrightarrow{u_z}$.

1. Étude graphique.
   (a) Tracer l'allure de la projection des lignes de courant dans un plan (xy). Quelle est l'allure d'une ligne de champ complète ?
   (b) D'après ce schéma, l'écoulement est-il incompressible ? irrotationnel ? Quelle est l'accélération d'une particule de fluide ?
   (c) Effectuer une analogie avec la trajectoire d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, en précisant ce champ et les conditions pour avoir cette trajectoire.
2. Étude analytique.
   (a) Par le calcul, cet écoulement est-il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?
   (b) Exprimer l'accélération d'une particule de fluide.

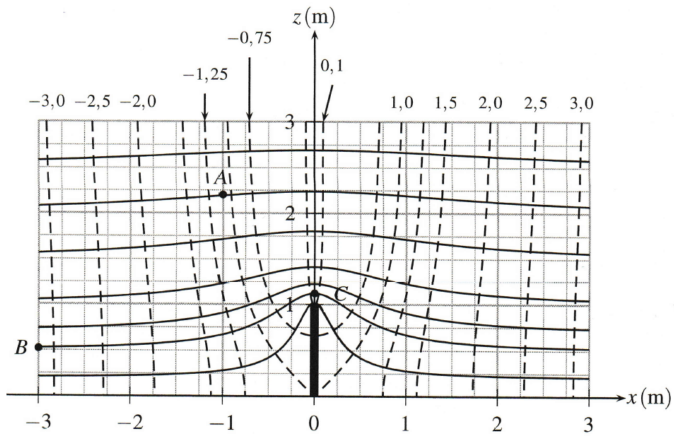
2 Conservation du débit

1. Quelle est la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510 g de ce gaz s'écoulent par demi-heure à travers une section du tuyau ? Le diamètre du tuyau est de 2 cm et la masse volumique du gaz est de $7,5$ kg.m^{-3}.
2. Le tuyau subit un élargissement. La nouvelle section a un diamètre de 5 cm. Quelle est la vitesse du gaz dans la section élargie ? L'écoulement est supposé incompressible.

3 Écoulement perturbé par un mur

On considère l'écoulement de l'air au dessus d'un mur de 1 m de hauteur. La base du mur est en $z = 0$ et suit l'axe (Oy) en $x = 0$. Il est supposé suffisamment long selon (Oy) pour que le champ des vitesses soit de composante nulle selon cet axe. L'écoulement est stationnaire, incompressible et irrotationnel.

La figure suivante représente les lignes de courants non orientées (traits pleins) et les équipotentielles (tirets). Les valeurs du potentiel sont données en m^2.s^{-1}.

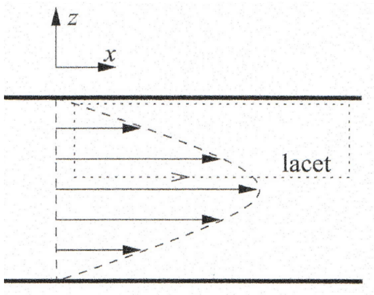


1. Pour un écoulement irrotationnel, comment sont reliés le champ des vitesse et celui des potentiels ? En déduire dans quel sens s'écoule le fluide.
2. Évaluer la vitesse du fluide au point A.
3. Évaluer le rapport des deux vitesses aux points B et C situés sur la même ligne de courant (C est juste au dessus du mur).

4 Description d'un écoulement de Poiseuille

Considérons l'écoulement stationnaire entre deux plaques situées dans les plans $z = 0$ et $z = a$. À suffisamment basse vitesse (cf chapitres ultérieurs), l'écoulement est dit « de Poiseuille », le champ de vitesse est donné par la formule ci-dessous, illustrée par le schéma.

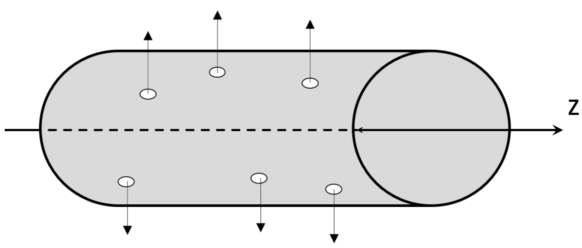
$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \vec{u_x} \quad (1)$$



1. (a) Calculer div$\vec{v}$. L'écoulement est-il incompressible ?
   (b) Interpréter ce résultat en terme de flux sur un tube de courant.
2. (a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. L'écoulement est-il irrotationnel ?
   (b) Interpréter ce résultat en terme de circulation sur un contour fermé.
3. (a) Calculer $D\vec{v}/Dt$. Interpréter la valeur des deux termes.
   (b) Vérifier la cohérence du résultat avec la formule $\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) \wedge \vec{v}$.
4. Calculer le débit volumique à travers une portion du système de longueur L selon (Oy).

5 Tuyau poreux

On considère un tuyau de rayon R dans lequel un écoulement est établi en régime permanent. Par la suite, on ne va considérer uniquement les fuites latérales de ce tuyau (voir dessin) qui constituent un écoulement incompressible.



La profil des vitesses à une distance r de l'axe en dehors du tuyau (pour $r > R$) est ainsi de la forme :

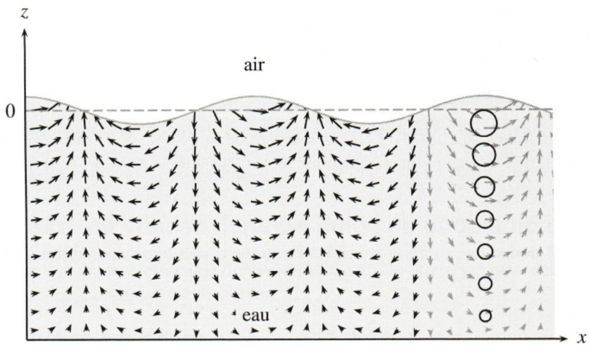
$$\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur radial en coordonnées cylindriques. La condition aux limites sur le cylindre est : $v(r = R) = v_0$.

1. En effectuant un bilan sur un cylindre de longueur dz et de rayon $r > R$, déterminer l'expression de $v(r)$ à l'extérieur du tuyau poreux.
2. Exprimer, s'il existe, le potentiel des vitesses.
3. Tracer les lignes de courant et les équipotentielles.

6 Modèle de houle

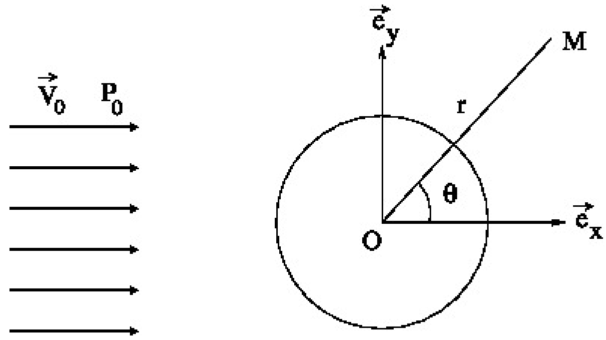
On considère le phénomène de propagation de la houle : ondes de gravitation à la surface d'un océan profond. Dans le cadre d'un modèle simple d'un écoulement invariant suivant y se propageant vers x croissant, on admet que le potentiel des vitesses s'écrit $\phi(\overrightarrow{r}, t) = \phi_0 \exp(kz) \cos(kx - \omega t)$.



1. Cet écoulement est-il stationnaire ?
2. Calculer le champ des vitesse $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t)$.
3. Cet écoulement est-il incompressible ?
4. Cet écoulement est-il irrotationnel ?

7 Écoulement autour d'un pilier

On s'intéresse à l'écoulement plan laminaire incompressible irrotationnel autour d'un cylindre solide de rayon a de hauteur infinie et d'axe (Oz).



1. Représenter schématiquement les lignes de courant d'un tel écoulement en indiquant les points remarquables. Préciser la condition que doit satisfaire le champ des vitesses sur les parois du cylindre.

   Le fluide est de l'air. On admettra que le potentiel de vitesse associé au champ de vitesse de l'écoulement est donné par l'équation :
   $$\varphi(M) = v_0 r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta$$
   en coordonnées polaires (voir le schéma).
2. Quelle relation lie le champ des vitesses au potentiel des vitesses ?
3. Déterminer les composantes polaires v_r et v_θ du vecteur vitesse. On rappelle les composantes du gradient d'une fonction f en coordonnées polaires :
   $$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}$$
4. Préciser les points d'arrêts (vitesse nulle).

5. On met maintenant le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec une vitesse angulaire ω uniforme, dans le sens horaire. Pour tenir compte de l'effet de rotation du cylindre sur l'écoulement du fluide, on ajoute dans l'expression générale du potentiel des vitesses une singularité tourbillonnaire de circulation Γ. La circulation du vecteur vitesse sur une courbe $\mathcal{C}$ est définie par $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dl}$. Le potentiel des vitesses devient alors :

$$\varphi(M) = v_0 r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

Déterminer les nouvelles composantes du champ des vitesses.