TDE4 : Équations de Maxwell - Correction

2 Bilan d'énergie dans un solénoïde

1. Le théorème d'Ampère n'est exact qu'en régime statique, cette relation n'est donc pas toujours valable. Mais dans le cadre de l'ARQS magnétique, le théorème d'Ampère devient approximativement valide.
2. La loi de Faraday s'écrit $\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = -d\phi_B/dt$. Contour : cercle de rayon r. Pour $r < a$: $E.2\pi r = -\mu_0 n \frac{dI}{dt}\pi r^2$, donc $\overrightarrow{E} = -\frac{\mu_0}{2} n \frac{dI}{dt} r \overrightarrow{e_\theta}$. On retrouve bien que des courants statiques ne produisent pas de $\overrightarrow{E}$ induit.
   Pour $r > a$: E décroît en $1/r$.
3. Le vecteur de Poyinting vaut : $\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\frac{\mu_0}{2} n^2 I \frac{dI}{dt} r \overrightarrow{e_r}$. Considérons le volume du solénoïde : cylindre de rayon a et longueur ℓ. Le flux de $\overrightarrow{R}$ sur les faces planes est nul. Le vecteur surface entrant en un point de la surface courbe est dirigé selon $-\overrightarrow{e_r}$. Donc le flux entrant vaut :

$$\mathcal{P}_{em} = \iint \overrightarrow{R}(r=a).\overrightarrow{dS} = \left(\frac{\mu_0}{2} n^2 I \frac{dI}{dt} a\right) \times (2\pi a \ell) = \mu_0 \pi a^2 \ell n^2 I \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

4. L'énergie magnétique U_m du solénoïde : $U_m = (\pi a^2 \ell) \times u_{em} = \pi a^2 \ell \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2}\pi a^2 \ell n^2 I^2(t)$. De dérivée : $\frac{dU_m}{dt} = \mu_0 \pi a^2 \ell n^2 I.\frac{dI}{dt}$. On remarque que $dU_m/dt = \mathcal{P}_{em}$. Toute la puissance entrante semble stockée dans l'énergie magnétique $B^2/2\mu_0$, l'énergie électrique $\varepsilon_0 E^2/2$ n'ayant aucun rôle. C'est une conséquence de l'ARQS magnétique.

3 Bilan de puissance dans un condensateur

On considère un condensateur plan formé de deux disques de rayon a distants de $e \ll a$, donc on négligera les effets de bords. Il est soumis à une tension variable $U(t)$. Dans ce cadre, on admet que le champ électrique est uniforme entre les plaques et vaut $\overrightarrow{E} = -(U/e)\overrightarrow{u_z}$ avec $\overrightarrow{u_z}$ dans le même sens que la tension $U(t)$.

1. Invariance de la ddch selon θ seulement. Plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ sym de ddch, donc antisym de $\overrightarrow{B}$ selon $\overrightarrow{u_\theta}$.
2. Contour d'Ampère : cercle de rayon a de vecteur surface selon $\overrightarrow{u_z}$. Maxwell-Ampère intégral : $\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 d\phi_E/dt$ qui donne $2\pi a B = \mu_0 \varepsilon_0 \pi a^2 \left(-\frac{1}{e} dU/dt\right)$.
3. $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}/\mu_0 = \frac{\varepsilon_0 a}{2e^2}\frac{d(U^2/2)}{dt}(-\overrightarrow{u_r})$. Si le condensateur se charge (U^2 augmente), alors le vecteur de Poyinting entre dans le condensateur, donc l'énergie du champ augmente dans le condensateur.
4. Soit le volume entre les armatures (cylindre rayon a et hauteur e). La puissance entrante (avec $\overrightarrow{dS} = -\overrightarrow{u_r}$ entrant) est $\oiint_S \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{dS} = \frac{\varepsilon_0 a}{2e^2}\frac{d(U^2/2)}{dt} \times 2\pi a e = \frac{d}{dt}\left(CU^2/2\right)$. On reconnait la formule habituelle de puissance reçue par un condensateur.

4 Câble coaxial

1. $\overrightarrow{B}(r < R_1) = \overrightarrow{0}$ (pas de courants enlacés). $\overrightarrow{B}(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ (équivalent au champ magnétique à l'extérieur d'un fil). $\overrightarrow{B}(R_2 < r) = \overrightarrow{0}$ (les courants enlacés I et $-I$ se compensent).
2. *[ATTENTION : le rotationnel n'est simple à exprimer qu'en cartésien ! Utiliser le formulaire.]*
   D'après l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\partial\overrightarrow{B}/\partial t$, dans la base cylindrique :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E}{\partial \theta} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

   Car $\overrightarrow{E}$ suivant $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{B}$ suivant $\overrightarrow{e_\theta}$. Alors la composante selon $\overrightarrow{e_z}$ donne $\partial E/\partial\theta = 0$, $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de θ. La composante suivant $\overrightarrow{e_\theta}$ donne : $\partial E/\partial z = -\partial B/\partial t$. Ainsi, pour $r < R_1$ et $r > R_2$ ($B = 0$), on obtient E indépendant de z. Pour $R_1 < r < R_2$: $\dfrac{\partial E}{\partial z} = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\omega I_0 \sin(\omega t - kz)$.

Donc en intégrant par rapport à z : $E(r,z,t) = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\frac{\omega}{k} I_0 \cos(\omega t - kz) + f(r,t)$ où $f(r,t) = 0$ pour retrouver un champ nul partout si le courant est d'amplitude nulle.

3. On applique la relation de Maxwell-Ampère dans la zone entre les deux cylindres. Alors : $-\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$. Qui donne ensuite $k = \mu_0\varepsilon_0\omega^2/k$ Donc : $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$. On trouve la relation typique d'onde plane progressive non dispersive de célérité c.
4. Le vecteur de Poynting est : $\overrightarrow{R} = \mu_0 c\frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}$. La projection $\overrightarrow{R}.\overrightarrow{e_z}$ est positive. L'énergie se propage donc selon $\overrightarrow{e_z}$. Le flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du câble :

$$\mathcal{P} = \iint \overrightarrow{R}.\overrightarrow{dS} = \mu_0 c\frac{I_0^2}{4\pi^2}\cos^2(\omega t - kz)\int_{r=R_1}^{r=R_2}\frac{1}{r^2}.2\pi r dr = \mu_0 c\frac{I_0^2}{2\pi}\cos^2(\omega t - kz)\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{3}$$

5. La densité volumique d'énergie vaut : $u_{em} = \mu_0\frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz)$. On remarque que le vecteur densité de courant d'énergie est $\overrightarrow{R} = u_{em}c\overrightarrow{e_z}$. Par analogie avec la densité de courant $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$, on en déduit que la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{e_z}$.

5 Courants de Foucault et feuilletage

1. $\partial E/\partial z = -B_0\omega\sin(\omega t)$ donne $E(z) = -B_0\omega z\sin(\omega t) + f(t)$. Avec $f(t) = 0$ pour avoir un champ électrique nul si $B_0 = 0$. Alors $\overrightarrow{E} = -B_0\omega z\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}$.
2. $\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}$.
3. $\mathcal{P}_v = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} = \sigma B_0^2\omega^2 z^2\sin^2(\omega t)$. Or, $<\sin^2(\omega t)>= 1/2$. Donc $<\mathcal{P}_v>= \sigma B_0^2\omega^2 z^2/2$.
4. $\mathcal{P} = \iint_V <\mathcal{P}_v> dV = \int_{z=-a}^{a}\sigma B_0^2\omega^2 z^2/2 \times bLdz$. Alors : $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\sigma B_0^2\omega^2 bLa^3$.
5. La puissance totale dissipée $\mathcal{P}_{\text{tot}}$ est la somme des puissances dissipée dans chaque tranche d'épaisseur $2a/N$:

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{3}\sigma B_0^2\omega^2 bL(a/N)^3 = \frac{1}{3}\sigma B_0^2\omega^2 bLa^3 \times \frac{1}{N^2} \tag{4}$$

Plus on feuillette le matériau, plus la puissance dissipée est faible ! C'est pourquoi les matériaux ferromagnétiques des transformateurs, soumis à des champs magnétiques variables, sont feuilletés.

6 Rayonnement d'une particule radioactive

1. À t, les électrons occupent une boule de rayon $r = v_0 t$, le reste est vide donc $\rho(r > v_0 t, t) = 0$.
[Attention : comme les électrons s'étalent dans l'espace, la densité de charge n'est pas uniforme, on ne peut pas dire simplement $\rho = q/V$.] On considère maintenant $r < v_0 t$. La couche sphérique entre r et $r + dr$ contient les électrons émis entre t et $t + dt = (r + dr)/v_0$. Elle contient donc $dN = \alpha dr/v_0$ électrons, donc charge $dq = -edN = -e\alpha dr/v_0$. La charge vaut aussi $dq = \rho dV = \rho(r)4\pi r^2 dr$. Ce qui donne le résultat attendu.
2. On a $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$.
3. Invariance de ddch et ddco selon θ et φ. Donc $\overrightarrow{E}(r,t)$ et $\overrightarrow{B}(r,t)$. Pour $M(r,\theta,\varphi)$ quelconque, tous les plans contenant $(M,\overrightarrow{u_r})$ sont plans de sym de ddch et ddco, donc $\overrightarrow{E} = E(r,t)\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ (orthogonal à tous ces plans).
[Ne pas oublier que la bille est initialement neutre, donc il y a autant de charges positives fixes ($e\alpha t$) en O que d'électrons émis.] Surface Gauss sphérique. $Q_{\text{int}} = 0$ pour $r > v_0 t$. et $Q_{\text{int}}(r,t) = e\alpha t + \int_0^r 4\pi r^2\rho dr$. Donc $\overrightarrow{E}(r,t) = \frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(t - r/v_0)\overrightarrow{u_r}$ pour $r < v_0 t$.
4. $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ donc $\partial u/\partial t = (\varepsilon_0/2)\partial E^2/\partial t = \frac{\alpha^2 e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 r^4}(t - r/v_0)$.
La puissance volumique cédée aux charges est $\mathcal{P}_V = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$. Après calcul, on trouve $\partial u/\partial t = -\mathcal{P}_V$. Compatible avec l'équation de bilan local de Poyinting car ici $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.