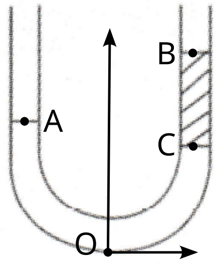
TDMF0 : Statique des fluides - Correction

1 Rappel PCSI : statique des fluides en référentiel galiléen

1.1 Mesure de densité



⋆ méthode 1 : Statique des fluide entre A et O dans l'eau de masse volumique μ_e donne : $p_O = p_{\text{atm}} + \mu_e g z_A$. De même entre B et C dans l'huile de masse volumique μ_h : $p_C = p_{\text{atm}} + \mu_h g(z_B - z_C)$. Et entre C et O dans l'eau : $p_O = p_C + \mu_e g z_C$. Combiner ces relations donne $\boxed{\mu_h = \mu_e Sh/V_h}$ avec $h = z_A - z_C$.

⋆ méthode 2 : À l'équilibre, le poids de la colonne de gauche est la même que la colonne de droite. Même résultat.

1.2 Modèle d'atmosphère isotherme

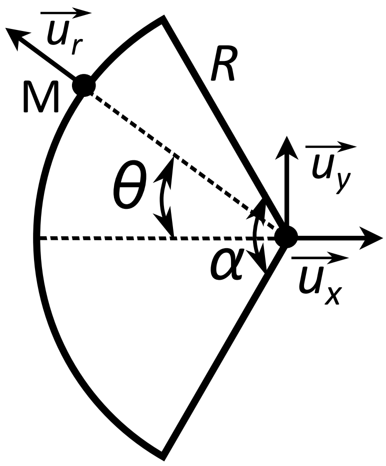
1. La masse volumique de l'air est $\mu = m/V = nM/V$. D'après la relation des gaz parfaits, $pV = nRT$ donne $\boxed{\mu = \dfrac{Mp}{RT}}$.
2. En orientant z vers le haut, la relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme est $\frac{dp}{dz} + \mu g = 0$. En remplaçant par l'expression de μ : $\frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT}p = 0$. Dans l'hypothèse de g et T uniforme, c'est une équation différentielle linéaire sans second membre à coefficients constants.

   On note $\boxed{H = \dfrac{RT}{Mg}}$ la longueur caractéristique intervenant dans l'équation qui devient : $\frac{dp}{dz} + \frac{p}{H} = 0$. La solution générale est donc du type : $p(z) = A\exp(-z/H)$ avec A constante. D'après la condition aux limites $p(z=0) = p_0$, on obtient $\boxed{p(z) = p_0 \exp(-z/H)}$.
3. H est une longueur d'après l'équation différentielle. AN : $\boxed{H = 8,3 \text{ km}}$. Même si l'atmosphère s'étend au delà de cette valeur, la pression est en effet déjà bien réduite à cette altitude. En pratique, l'hypothèse d'atmosphère isotherme n'est pas valide.
4. AN : $\boxed{p_{LP} = 0,61 \text{ bar}}$ avec $p_0 = 1$ bar. On a presque 40% de pression en moins à cette altitude ! Le manque d'oxygène peut être handicapant pour les non habitués.
5. La relation de la statique des fluides dans le mercure liquide s'écrit $dp/dz + \mu_{\text{Hg}} g = 0$. Donc dans le mercure, $p(z) = -\mu_{\text{Hg}} g z + B$ avec B constante. On dispose de deux conditions aux limites :
   - ⋆ en $z = 0$ au contact avec l'atmosphère, $p(0) = p_{\text{LP}}$ donc $p_{\text{LP}} = B$.
   - ⋆ en $z = h$, la pression est nulle car le tube contient du vide au dessus du liquide. Donc $0 = -\mu_{\text{Hg}} g h + p_{\text{LP}}$.

   Finalement, $\boxed{h = \dfrac{p_{\text{LP}}}{\mu_{\text{Hg}} g}}$. AN : $\boxed{h = 0,46 \text{ m}}$.
6. On a $\boxed{\mu(z) = \dfrac{Mp_0}{RT}\exp(-z/H)}$. La masse m contenu dans un volume V est $m = \iiint_{M\in V} \mu(M)dV$. Ici :
$$m_S = S\int_0^{+\infty} \frac{Mp_0}{RT}\exp(-z/H)dz \boxed{= \frac{Mp_0}{RT} \times SH} \qquad (1)$$
7. La surface S d'une sphère de rayon R_T vaut $S = 4\pi R_T^2$. Donc, avec le rayon de la Terre $R_T = 6400$ km :
$$m = \frac{Mp_0}{RT} \times 4\pi R_T^2 H \boxed{= 5,3.10^{18} \text{ kg}} \qquad (2)$$
   Malgré l'approximation du modèle isotherme, on trouve le bon ordre de grandeur.

2 Rappel PCSI : résultantes de forces de pression

2.1 Forces de pression sur un barrage courbe



Le pression du côté de l'air est $p_{\text{air}} = p_0$ et du côté de l'eau $p_{\text{eau}} = p_0 + \mu g z$. Alors la résultante sur le barrage est $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{\text{eau}} + \overrightarrow{F}_{\text{air}}$. Avec $\overrightarrow{dS}_{\text{eau}} = Rd\theta dz(-\overrightarrow{u_r}) = Rd\theta dz(\cos\theta\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\overrightarrow{u_y}) = -\overrightarrow{dS}_{\text{air}}$. Donc :

$$\overrightarrow{F} = \int_{z=0}^{h}\int_{\theta=-\alpha/2}^{\alpha/2} \mu g z R d\theta dz(\cos\theta\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\overrightarrow{u_y}) \boxed{= \mu g h^2 R\sin(\alpha/2)\overrightarrow{u_x}}$$

On trouve bien $\overrightarrow{F}$ maximum pour $\alpha = \pi$ et nulle pour $\alpha = 2\pi$.

3 Rappel PCSI : poussée d'Archimède

3.1 Rafraichissement

Avec le PFD à l'équilibre, remarquer que la masse du glaçon est exactement celle du « volume déplacé d'eau ». Donc en fondant, le niveau d'eau reste identique !

3.2 Tension

PFD statique sur chaque boule donne deux équations : $mg + T = \mu_e V g/2$ et $3mg = \mu_e V g + T$ en notant T la norme de la tension du fil, V le volume des boules et μ_e la masse volumique du fluide. Combiner ces équations donne $\boxed{T = mg/3}$.

3.3 Densimètre

PFD à l'équilibre si le cylindre ne coule pas : $mg = \mu_e dgs(h - \ell)$ avec la longueur ℓ à déterminer. On trouve $\boxed{\ell = h - \dfrac{m}{\mu_e ds}}$.

4 Camion-citerne

1. D'après la statique des fluides appliquée au fluide dans le référentiel de la citerne : $\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu\overrightarrow{g} - \mu\overrightarrow{a_e}$ donc $\boxed{\partial P/\partial x = -\mu a_0}$, $\boxed{\partial P/\partial y = 0}$, $\boxed{\partial P/\partial z = -\mu g}$.
2. $\star$ $\partial P/\partial y = 0$ donc $P(x, z)$ ne dépende que de x et z.
   $\star$ $\partial P/\partial x = -\mu a_0$ donc $P(x, z) = -\mu a_0 x + f(z)$.
   $\star$ $\partial P/\partial z = -\mu g$ donne $f'(z) = -\mu g$ donc $f(z) = -\mu g z + A$ avec A constante.
   $\star$ Alors $P(x, z) = -\mu g z - \mu a_0 x + A$. Avec $P(0, y, z_0) = P_{\text{atm}}$, on obtient $\boxed{P(x, z) = P_{\text{atm}} - \mu g(z - z_0) - \mu a_0 x}$
3. La pression vaut P_{atm} sur la surface donc $\boxed{z(x) = z_0 - x a_0/g}$
4. On utilise la conservation du volume. Au repos, $V = hLl$ où l est l'épaisseur selon y.
   En mouvement, dans l'hypothèse où on n'accélère pas trop (ie $z(L) > 0$), l'eau est (dans le plan du schéma) dans un trapèze de hauteur L et de bases z_0 et $z_0 - a_0 L/g$. Donc sa surface (moyenne des bases fois hauteur) est $L(z_0 - a_0 L/(2g))$. Donc volume $V = lL(z_0 - a_0 L/(2g))$. Par égalité au volume initial, on aboutit à $\boxed{z_0 = h + a_0 L/(2g)}$.
5. On définit $\beta > 0$ vers la droite de la verticale ascendante. ATTENTION ! La poussée d'Archimède n'est pas ici suivant la verticale ! En effet, l'origine physique de cette force est la résultante des forces de pression sur la sphère, qui contient le terme dû à $\overrightarrow{g}$ mais aussi celui de $\overrightarrow{a_e}$.
   Bilan des forces : Poussée $\overrightarrow{\Pi} = \mu V_1 g\overrightarrow{u_z} + \mu V_1 a_0\overrightarrow{u_x}$, tension $\overrightarrow{T} = -T\sin\beta\overrightarrow{u_x} - T\cos\beta\overrightarrow{u_z}$, poids $\overrightarrow{P} = -\mu_1 V_1 g\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{F_{ie}} = -\mu_1 V_1 a_0\overrightarrow{u_x}$.
   PFD dans le ref du réservoir en statique :
   $$-T\sin\beta - \mu_1 V_1 a_0 + \mu V_1 a_0 = 0, \qquad -T\cos\beta - \mu_1 V_1 g + \mu V_1 g = 0 \tag{3}$$
   Le rapport des deux équations donne $\boxed{\tan\beta = a_0/g > 0}$, la balle n'est pas attirée vers l'arrière mais vers l'avant car elle est moins dense que le fluide ! La direction du fil est exactement colinéaire à la poussée d'Archimède et à la pesanteur apparente avec effet d'inertie $\overrightarrow{g_{\text{app}}} = \overrightarrow{g} - \overrightarrow{a_e}$.
   La somme au carré des deux équations donne $\boxed{T = (\mu - \mu_1)V_1\sqrt{a_0^2 + g^2}}$.

5 Récipient en rotation

1. $\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = mr\omega^2\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{\text{grad}}(mr^2\omega^2/2)}$
2. Statique des fluides appliqué au fluide dans le ref tournant : $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \mu\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\text{grad}}(\mu r^2\omega^2/2)$ donc :

   $\boxed{p + \mu g z - \mu r^2\omega^2/2 = \text{cte}}$.
3. $\boxed{z(r) = \omega^2 r^2/(2g) + \alpha}$.
4. $V = \int_0^R z(r).2\pi r.dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi\alpha R^2$. Par conservation du volume, $V = \pi R^2 h$. Donc ... $\boxed{\alpha = H - \omega^2 R^2/(4g)}$.
5. Alors $z(r) = \frac{\omega^2}{4g}(2r^2 - R^2) + H$ qui donne $\boxed{z_{min} = H - \dfrac{\omega^2 R^2}{4g}}$ et $\boxed{z_{max} = H + \dfrac{\omega^2 R^2}{4g}}$.

   Le fond ne se découvre pas si $z_{min} > 0$ donc $\boxed{\omega < \dfrac{\sqrt{4gH}}{R}}$