ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2023 - 2024
Chapitre 1 :
Rappels de première année et compléments

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

Ce premier chapitre rappelle les concepts de base de l'algèbre linéaire vus en Sup.
Il contient quelques compléments au cours de Sup qui sont au programme de deuxième année.
C'est un préalable au cours sur la réduction des endomorphismes qui constitue le coeur du programme de seconde année.
Dans ce chapitre et dans toute la suite du cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

On appelle $\mathbb{K}$- espace vectoriel tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne appelée addition et notée + : $\begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$ et d'une loi de composition externe, appelée produit externe $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

- l'addition interne est associative :
  $\forall (x, y, z) \in E^3 \; x + (y + z) = (x + y) + z$
- l'addition possède un neutre :
  $\exists e \in E$ tq $\forall x \in E \; x + e = e + x = x$
  e s'appelle le vecteur nul de E et se note 0_E.
  Il est habituel de noter simplement 0 le vecteur nul de E mais il ne faut pas perdre de vue que c'est un élément de E et non le nombre 0.
- l'addition est commutative :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; x + y = y + x$
- tout élément de E possède un opposé :
  $\forall x \in E \; \exists y \in E$ tq $x + y = y + x = 0$
  y est unique et se note $-x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall (x, y) \in E^2 \; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \; \forall x \in E \; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \; \forall x \in E \; \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- $\forall x \in E \; 1x = x$

1.2 Exemples

Voici une liste,non exhaustive, d'espaces vectoriels classiques. Il est inutile de redémontrer qu'ils le sont.

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni des opérations usuelles sur les polynômes.
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n, muni des opérations usuelles sur les polynômes.
- $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$,noté aussi $\mathbb{K}^X$, l'ensemble des applications d'un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles.
  Pour $X=\mathbb{N}$, on a affaire à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des opérations usuelles sur les fonctions.

Lorsqu'on demande de montrer que tel ou tel ensemble est un espace vectoriel, on montre en général que c'est un sous-espace vectoriel (cf plus bas) d'un espace classique.
Néanmoins, il y a au programme de seconde année une situation où on est obligé de revenir à la définition.

1.3 Produit d'espaces vectoriels

- **Définition**
  Soient $E_1,\dots,E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
  On peut définir sur $E_1\times\cdots\times E_n$:
  — une addition interne par :
  $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\ \forall(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$
  $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
  — un produit externe par :
  $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\ \lambda\,(x_1,\dots,x_n)=(\lambda\,x_1,\dots,\lambda\,x_n)$
  Muni de ces deux opérations, $E_1\times\cdots\times E_n$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Démonstration
  — l'addition interne est associative :

$$\begin{array}{rl} & \forall(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\ \forall(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\ \forall(z_1,\dots,z_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\\ & ((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n))+(z_1,\dots,z_n)\\ = & (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)+(z_1,\dots,z_n)\\ = & ((x_1+y_1)+z_1,\dots,(x_n+y_n)+z_n)\\ = & (x_1+(y_1+z_1),\dots,x_n+(y_n+z_n)) \text{ car l'addition est associative dans chaque } E_i\\ = & (x_1,\dots,x_n)+(y_1+z_1,\dots,y_n+z_n)\\ = & (x_1,\dots,x_n)+((y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots,z_n)) \end{array}$$

  — l'addition possède un neutre : $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$:

$$\begin{array}{rcl} \forall(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\ (x_1,\dots,x_n)+(0_{E_1},\dots,0_{E_n}) & = & (x_1+0_{E_1},\dots,x_n+0_{E_n})\\ & = & (x_1,\dots,x_n)\\ (0_{E_1},\dots,0_{E_n})+(x_1,\dots,x_n) & = & (0_{E_1}+x_1,\dots,0_{E_n}+x_n)\\ & = & (x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

— tout élément $(x_1, \ldots, x_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ possède un opposé : $(-x_1, \ldots, -x_n)$:

$$\begin{array}{rcl}(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) & = & (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n}) \\ (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n) & = & (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})\end{array}$$

— l'addition est commutative :

$$\begin{array}{rl} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ \forall (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \\ & (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ = & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ = & (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \text{ car l'addition est commutative dans chaque } E_i \\ = & (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)\end{array}$$

—

$$\begin{array}{rl} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ \forall \lambda_1 \in \mathbb{K} \ \forall \lambda_2 \in \mathbb{K} \\ & (\lambda_1 + \lambda_2)\,(x_1, \ldots, x_n) \\ = & ((\lambda_1 + \lambda_2)\,x_1, \ldots, (\lambda_1 + \lambda_2)\,x_n) \\ = & (\lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_1, \ldots, \lambda_1\,x_n + \lambda_2\,x_n) \\ = & (\lambda_1\,x_1, \ldots, \lambda_1\,x_n) + (\lambda_2\,x_1, \ldots, \lambda_2\,x_n) \\ = & \lambda_1\,(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_2\,(x_1, \ldots, x_n)\end{array}$$

—

$$\begin{array}{rl} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ \forall (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ & \lambda\ ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) \\ = & \lambda\,(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ = & (\lambda\,(x_1 + y_1), \ldots, \lambda\,(x_n + y_n)) \\ = & (\lambda\,x_1 + \lambda\,y_1, \ldots, \lambda\,x_n + \lambda\,y_n) \\ = & (\lambda\,x_1, \ldots, \lambda\,x_n) + (\lambda\,y_1, \ldots, \lambda\,y_n) \\ = & \lambda\,(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\,(y_1, \ldots, y_n)\end{array}$$

— $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ 1\,(x_1, \ldots, x_n) = (1.x_1, \ldots, 1.x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

—

$$\begin{array}{rl} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall \mu \in \mathbb{K} \\ & \lambda\ (\mu\,(x_1, \ldots, x_n)) \\ = & \lambda\ (\mu\,x_1, \ldots, \mu\,x_n) \\ = & (\lambda\,(\mu\,x_1), \ldots, \lambda\,(\mu\,x_n)) \\ = & ((\lambda\,\mu)\,x_1, \ldots, (\lambda\,\mu)\,x_n) \\ = & (\lambda\,\mu)\,(x_1, \ldots, x_n)\end{array}$$

- **Remarque**
  En prenant $E_i = \mathbb{K}$, on retrouve les espaces $\mathbb{K}^n$ vus en Sup.

1.4 Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide
- F est stable par combinaisons linéaires :
  $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ \forall(x,y)\in E^2\ \lambda x+\mu y\in E$

La première condition peut être remplacée par : $0\in F$.

F est alors lui-même un espace vectoriel.

1.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit A une partie de E.
On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par A et on note $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
Cela signifie :

- $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev de E qui contient A.
- Si F est un sev de E qui contient A alors $\mathrm{Vect}(A)\subset F$

On a si $x\in E$:

$$x\in\mathrm{Vect}(A)\iff\exists k\in\mathbb{N}^*\text{ tq }\exists(a_1,\ldots,a_k)\in A^k\ \exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k\text{ tq }x=\sum_{l=1}^{k}\alpha_l a_l$$

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles libres, familles liées

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est libre, ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont linéairement indépendants, si, et seulement si, la seule famille $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ est la famille nulle (ie telle que pour tout $i\in[\![1;n]\!]$ $\lambda_i=0$).
Dans le cas contraire, on dit que la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est liée, ou que les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ sont linéairement dépendants et on appelle alors relation de dépendance linéaire entre les $x_i, 1\le i\le n$ toute relation du type $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ où les λ_i sont des scalaires non tous nuls.

Remarque
Il peut arriver que les vecteurs d'une famille soient indexés par autre chose que les entiers compris entre 1 et n. Les définitions précédentes s'écrivent alors :
Soient I un ensemble fini non vide et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que les $x_i, i\in I$ sont linéairement indépendants ou que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si, la seule famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$ est la famille nulle (ie telle que pour tout $i\in I$ $\lambda_i=0$).
Dans le cas contraire on dit que les $x_i, i\in I$ sont linéairement dépendants ou liés et on appelle

alors relation de dépendance linéaire entre les $x_i, i \in I$ toute relation du type $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ où les λ_i sont des scalaires non tous nuls.

2.2 Familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.
Soient I un ensemble fini non vide et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que les $x_i, i \in I$ engendrent E ou que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right) = E$.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On dit que E est de dimension finie si, et seulement si, E possède une famille génératrice (finie puisqu'ici on se limite aux familles finies).

3.2 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si, et seulement si, elle est libre et génératrice.
On a pour $(x_1, \dots, x_n)$ famille de vecteurs de E :
$(x_1, \dots, x_n)$ base de $E \iff \forall x \in E\ \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$
Soient I un ensemble fini non vide et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si, et seulement si, elle est libre et génératrice.
On a donc :
$(x_i)_{i\in I}$ base de $E \iff$ pour tout $x \in E$ il existe une et une seule famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$
Les bases de E sont les familles libres de cardinal maximal.
Les bases de E sont les familles génératrices de cardinal minimal.

3.3 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev non réduit au vecteur nul et de dimension finie.
E possède des bases et elles comportent toutes le même nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de vecteurs.
n est appelé dimension de E et se note $\dim(E)$.
Par convention un $\mathbb{K}$-ev réduit à $\{0\}$, qui est bien de dimension finie car (0) est une famille génératrice, sera dit de dimension nulle.
Je ne parlerai pas de base dans ce cas, car parler de famille indexée par l'ensemble vide me paraît trop formel.

Exemple

Théorème

Soient $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tous de dimension finie.
Alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Démonstration

On va construire à partir d'une base de chaque E_i, une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$.
On commence donc par supposer :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ d_i = \dim E_i > 0$
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, soit $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ une base de E_i.
On va montrer que
$((e_{1,1}, 0, \dots, 0), \dots, (e_{1,d_1}, 0, \dots, 0), (0, e_{2,1}, 0, \dots, 0), \dots, (0, e_{2,d_2}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d_n}))$
est une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$.
Cette famille est génératrice :
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

$$\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, x_n) \\
&= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, x_n) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{d_1} x_{1,j} e_{1,j}, 0, \dots, 0\right) + \left(0, \sum_{j=1}^{d_2} x_{2,j} e_{2,j}, 0, \dots, 0\right) + \cdots + \left(0, \dots, 0, \sum_{j=1}^{d_n} x_{n,j} e_{n,j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d_1} x_{1,j}(e_{1,j}, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^{d_2} x_{2,j}(0, e_{2,j}, 0, \dots, 0) + \cdots + \sum_{j=1}^{d_n} x_{n,j}(0, \dots, 0, e_{n,j})
\end{aligned}$$

Cette famille est libre.
On considère une combinaison linéaire nulle :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{d_1} \lambda_{1,j}(e_{1,j}, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{2,j}(0, e_{2,j}, 0, \dots, 0) + \cdots + \sum_{j=1}^{d_n} \lambda_{n,j}(0, \dots, 0, e_{n,j}) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{d_1} \lambda_{1,j} e_{1,j}, \sum_{j=1}^{d_2} \lambda_{2,j} e_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^{d_n} \lambda_{n,j} e_{n,j}\right)
\end{aligned}$$

Donc :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \sum_{j=1}^{d_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$
D'où :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \forall j \in [\![1; d_i]\!]\ \lambda_{i,j} = 0$ (car $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d_i}$ est une base de E_i)
On a bien affaire à une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$.
En comptant le nombre de vecteurs, on a bien $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.
Si un ou plusieurs des E_i sont réduits à $\{0\}$, on adapte le raisonnement, en ne mettant aucun des $e_{\boxed{i},j}$.
Bien sûr, il y a aussi le cas où tous les E_i sont réduits à $\{0\}$.
Mais alors $\{0\} \times \cdots \times \{0\} = \{(0, \dots, 0)\}$ et la formule est banale.

Remarque
En pratique, on pourra rencontrer des produits d'espaces vectoriels indexés par un ensemble quelconque et pas forcément par $[\![1;n]\!]$.
Aux changements de notation près, on a les mêmes définitions et les mêmes propriétés que précédemment :

Soient I un ensemble fini non vide et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Le produit cartésien des E_i, noté $\mathrm{X}_{i\in I}\, E_i$ est l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ où pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.
L'addition interne est définie par :
$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$
Le produit externe est défini par :
$\lambda\,(x_i)_{i\in I} = (\lambda\, x_i)_{i\in I}$
Muni de ces deux opérations, $\mathrm{X}_{i\in I}\, E_i$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
De plus, si tous les E_i sont de dimension finie, $\mathrm{X}_{i\in I}\, E_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\mathrm{X}_{i\in I}\, E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim\left(E_i\right)$$

3.4 Comment démontrer qu'une famille est une base ?

En pratique, E est souvent un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle dont on connaît déjà la dimension n.
Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E on peut utiliser les arguments suivants :
- $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs
- $\mathcal{F}$ est génératrice et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs

Cela ne s'applique pas dans l'exemple précédent, car on cherche justement à déterminer la dimension du produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$.
Un exemple à connaître
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$.
La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Pour le démontrer, on commence par remarquer que ces polynômes sont tous de degré n donc appartiennent tous à $\mathbb{K}_n[X]$.

Au vu de leur forme factorisée, on remarque également :
$\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2\ i \neq j \Longrightarrow L_i(a_j) = 0$
Le calcul de $L_i(a_i)$ est trivial donc :

$$\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2\ L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Ensuite plusieurs méthodes sont possibles :

- La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre et a le bon cardinal.
  Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k=0$.
  Il s'agit d'une égalité entre polynômes.
  Si on évalue ces polynômes en a_i, on obtient :
  $\forall i\in[\![0;n]\!]\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k(a_i)=0$
  On en déduit :
  $\forall i\in[\![0;n]\!]\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\delta_{k,i}=0$
  Puis :
  $\forall i\in[\![0;n]\!]\ \lambda_i=0$
  La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est donc libre. Comme elle est constituée de $n+1=\dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  Considérons alors un polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$.
  $\exists!(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tq $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k$
  Si on évalue ces polynômes en a_i, on obtient :
  $\forall i\in[\![0;n]\!]\ P(a_i)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k L_k(a_i)=\lambda_i$ comme ci-dessus.
  On a donc :
  $\forall P\in\mathbb{K}_n[X]\ P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(a_k)L_k$
  En particulier si on prend P le polynôme constant égal à 1 :
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}L_k=1$
  (égalité mentionnée dans le programme)
- La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est génératrice et a le bon cardinal.
  Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$.
  Soit $Q=P-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(a_k)L_k$.

$$\begin{aligned}\forall i\in[\![0;n]\!]\ Q(a_i) &= P(a_i)-\sum_{k=0}^{n}P(a_k)L_k(a_i)=P(a_i)-\sum_{k=0}^{n}P(a_k)\delta_{k,i}\\ &= P(a_i)-P(a_i)=0\end{aligned}$$

  On a donc trouvé $n+1$ racines deux à deux distinctes de Q qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
  On en déduit que Q est le polynôme nul.
  Donc $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(a_k)L_k$.
  Et on a montré que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle est constituée de $n+1=\dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre et génératrice.

En utilisant la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$, on peut résoudre le problème de l'interpolation de Lagrange :
Soient $a_0,\dots,a_n$ $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Soient $b_0, \ldots, b_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$.
Il existe un, et un seul, polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i compris entre 0 et n, $P(a_i) = b_i$.

En effet si P existe alors :
$P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$
D'où l'unicité.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k$
$\forall i \in [\![0; n]\!]$ $P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \delta_{k,i} = b_i$
D'où l'existence.
Quels sont les polynômes Q tels que pour tout i compris entre 0 et n, $Q(a_i) = b_i$?

$$\begin{aligned}
(\forall i \in [\![0; n]\!]\ Q(a_i) = b_i) &\iff (\forall i \in [\![0; n]\!]\ Q(a_i) = P(a_i)) \\
&\iff (\forall i \in [\![0; n]\!]\ (Q - P)(a_i)) \\
&\iff \prod_{i=0}^{n}(X - a_i) \text{ divise } Q - P \text{ car les } a_i \text{ sont deux à deux distincts} \\
&\iff \exists R \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } Q(X) = P(X) + R(X) \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)
\end{aligned}$$

Exercice 1 *(X 2019)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tq $b_0 < b_1 < \cdots < b_n$.
Montrer :
$\exists!(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k P(b_k)$

3.5 Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Toute famille libre de E contient au plus n vecteurs.
Toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.
Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de E avec $p < n$.
(On a forcément $p \leq n$ et si $p = n$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E).
Soit $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_q)$ une famille génératrice de E (on a forcément $q \geq n$).
On peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en prenant $n - p$ vecteurs de $\mathcal{G}$:
$\exists (i_1, \ldots, i_{n-p}) \in [\![1; q]\!]^{n-p}$ avec $i_1 < \cdots < i_{n-p}$ tq $(f_1, \ldots, f_p, g_{i_1}, \ldots, g_{i_{n-p}})$ soit une base de E.
On peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E :
$\exists (j_1, \ldots, j_n) \in [\![1; q]\!]^n$ avec $j_1 < \cdots < j_n$ tq $(g_{j_1}, \ldots, g_{j_n})$ soit une base de E.

3.6 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sev de E qu'elle engendre :
$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p))$
$\mathcal{F}$ est libre $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$
Si E est de dimension finie :
$\mathcal{F}$ est génératrice $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

4 Applications linéaires

4.1 Définitions

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
Une application f de E dans F est dite linéaire si, et seulement si :
$\forall (x,y) \in E^2\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$. Muni des opérations usuelles, c'est un $\mathbb{K}$-ev.
On appelle isomorphisme de E sur F toute application linéaire u bijective de E sur F.
Dans ce cas, u^{-1}, la bijection réciproque de u, est également linéaire.
On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ (on a donc $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$). Muni des opérations usuelles, c'est un $\mathbb{K}$-ev.
On appelle automorphisme de E toute application linéaire bijective de E sur E.
On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

4.2 Construction d'applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-ev.
$\forall (f_1, \ldots, f_n) \in F^n\ \exists! u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall i \in [\![1;n]\!]\ u(e_i) = f_i$
De plus :
u injective $\Longleftrightarrow (f_1, \ldots, f_n)$ est libre
u surjective $\Longleftrightarrow (f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de F
u bijective $\Longleftrightarrow (f_1, \ldots, f_n)$ est une base de F

Exercice 2 *(X 2016)*

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie ; $x \in E$, $y \in F$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(x) = y$.

4.3 Noyaux et images

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
Soit u une application linéaire de E dans F.
On appelle noyau de u et on note $\ker(u)$ l'ensemble des antécédents de 0_F par u :
$\ker(u) = \{x \in E \text{ tq } u(x) = 0\}$
C'est un sous-espace vectoriel de E et on a :
u injective $\Longleftrightarrow \ker(u) = \{0_E\}$
On appelle image de u et on note $\mathrm{Im}(u)$ l'ensemble des images des vecteurs de E :

$\operatorname{Im}(u) = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F \text{ tq } \exists x \in E \text{ tq } u(x) = y\}$
C'est un sous-espace vectoriel de F et on a :
u surjective $\iff \operatorname{Im}(u) = F$
Lorsque $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie, on appelle rang de u la dimension de $\operatorname{Im}(u)$.

Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, son noyau $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E. Les seuls sous-espaces vectoriels de E qui contiennent H sont E et H.
Réciproquement, si H est un sous-espace vectoriel tel que les seuls sous-espaces vectoriels de E contenant H sont E et H, il existe une forme linéaire non nulle, φ, sur E telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.
φ est unique à un facteur multiplicatif près ie si H est le noyau d'une autre forme linéaire non nulle ψ alors il existe un scalaire non nul α tel que $\psi = \alpha\varphi$.

4.4 Formule du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Si E est de dimension finie alors le noyau et l'image de u le sont aussi et :

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u)) = \dim(\ker(u)) + \operatorname{rg}(u)$$

Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

Exercice 3 *(X 2011)*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

Exercice 4

Soit E un ev de dimension finie.
Soient F et N 2 sev de E.
Trouver une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\begin{cases} \operatorname{Ker}(u) = N \\ \operatorname{Im}(u) = F \end{cases}$.

4.5 Espaces vectoriels isomorphes

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
On dit que E et F sont isomorphes si, et seulement si, il existe un isomorphisme de E sur F.
Si E est de dimension finie alors :
F est isomorphe à $E \iff F$ est de dimension finie égale à E.
En particulier tout $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ qui apparaît donc comme le modèle d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarque
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P(0) = 0\}$.
F est un sev de E strictement contenu dans E mais F est isomorphe à E :
$\begin{cases} E \to F \\ P \mapsto XP \end{cases}$ est un isomorphisme.

4.6 Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev **de même dimension finie**.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit u une application linéaire de E dans F.

$$\begin{array}{rcl} u \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow & u \text{ est injective} \\ & \Longleftrightarrow & u \text{ est surjective} \\ & \Longleftrightarrow & (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } F \end{array}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit u un endomorphisme de E.

$$\begin{array}{rcl} u \text{ est un automorphisme de } E & \Longleftrightarrow & u \text{ est injective} \\ & \Longleftrightarrow & u \text{ est surjective} \\ & \Longleftrightarrow & (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } E \end{array}$$

Remarque
Le raisonnement qui suit est erroné :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit u une application linéaire injective de E dans F.
u est un isomorphisme car on est en dimension finie.

4.7 Retour sur l'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soient $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Soient $b_0, \ldots, b_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$.
Il existe un, et un seul, polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i compris entre 0 et n, $P(a_i) = b_i$.

Soit $u \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{cases}$.
u est linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \forall (P,Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2 \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ u\left(\lambda P + \mu Q\right) & = & \left(\left(\lambda P + \mu Q\right)(a_0), \ldots, \left(\lambda P + \mu Q\right)(a_n)\right) \\ & = & \left(\lambda P(a_0) + \mu Q(a_0), \ldots, \lambda P(a_n) + \mu Q(a_n)\right) \\ & = & \lambda\left(P(a_0), \ldots, P(a_n)\right) + \mu\left(Q(a_0), \ldots, Q(a_n)\right) \\ & = & \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{array}$$

u est injective :
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $u(P) = 0$.
P a au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes (les a_i) et P est de degré au plus n donc P est le polynôme nul.
On a donc prouvé $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \{0\}$.
L'autre inclusion étant vraie pour toute application linéaire, $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$ et u est injective.
Or $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ ont la même dimension (n+1) donc u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier u est une bijection et tout éléments de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent par u, c'est exactement ce qu'affirme le théorème d'interpolation de Lagrange.
On peut aller plus loin.
Considérons la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. On la note $(e_0, \ldots, e_n)$ avec $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ le 1 étant en $(i+1)$-ème position.
u étant un isomorphisme d'espace vectoriel, $\left(u^{-1}(e_0), \ldots, u^{-1}(e_n)\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Explicitons L_i.
L_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :
$\forall j \in [\![0; n]\!]\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
Les a_j, $j \neq i$ sont n racines deux à deux distinctes de L_i de degré inférieur ou égal à n donc :
$\exists c_i \in \mathbb{K}$ tq $L_i(X) = c_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$
$L_i(a_i) = 1$ donne $c_i = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$ et on retrouve :
$\forall i \in [\![0; n]\!]\ L_i(X) = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$
Considérons alors un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\begin{aligned}
P &= u^{-1}\left(u(P)\right) = u^{-1}\left((P(a_0), \ldots, P(a_n))\right) \\
&= u^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} P(a_k) e_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) u^{-1}\left(e_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k
\end{aligned}$$

4.8 Un calcul de dimension classique

Exercice 5 *(Mines 2019)*

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit F un espace vectoriel de dimension p.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang $r < n$.
Quelle est la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(F, E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$?

5 Somme de sous-espaces vectoriels

5.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $E_1, \ldots, E_n$ n sev de E.
On appelle somme des n sev $E_1, \ldots, E_n$ et on note $E_1 + \cdots + E_n$ ou $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble des sommes $x_1 + \cdots + x_n$ où pour tout i dans $[\![1; n]\!]$ $x_i \in E_i$.

Plus généralement si I est un ensemble fini non vide et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E on appelle somme des sev E_i et on note $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ où pour tout i dans I $x_i \in E_i$.
Par convention si $I = \emptyset$, $\sum\limits_{i\in I} E_i = \{0_E\}$.

5.2 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sev de E.
Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ est un sev de E, c'est $\mathrm{Vect}(\bigcup\limits_{i\in I} E_i)$ ie le plus petit sev de E contenant tous les E_i.
(contenir tous les E_i revient à contenir leur réunion)

Démonstration

Soient $F = \displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ et $G = \mathrm{Vect}(\bigcup\limits_{i\in I} E_i)$.
On montre d'abord que F est un sev de E.
Soit $\varphi \begin{cases} \mathrm{X}_{i\in I}\, E_i \to E \\ (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum\limits_{i\in I} x_i \end{cases}$.
φ est linéaire.
En effet, soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I} \in \mathrm{X}_{i\in I}\, E_i$.
Soit λ et $\mu \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x_i)_{i\in I} + \mu(y_i)_{i\in I}) &= \varphi((\lambda x_i + \mu y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I}(\lambda x_i + \mu y_i) \\ &= \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i \\ &= \lambda\varphi((x_i)_{i\in I}) + \mu\varphi((y_i)_{i\in I}) \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \mathrm{Im}\,(\varphi)$ est un sev de E.

On montre ensuite que $F = G$.

- $\boxed{G \subset F}$
  G est le le plus petit sev de E contenant tous les E_i et F est un sev de E donc il suffit de prouver que F contient tous les E_i.
  Soient donc $i \in I$ et $x \in E_i$.
  On a $x = \displaystyle\sum_{j\in I} x_j$ avec $\begin{cases} x_j = 0 \in E_j \text{ si } j \neq i \\ x_j = x \in E_j \text{ si } j = i \end{cases}$
  D'où $x \in F$.
- $\boxed{F \subset G}$
  Soit $x \in F$.
  Il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E telle que $\begin{cases} x = \sum\limits_{i\in I} x_i \\ \forall i \in I\ x_i \in E_i \end{cases}$.
  $\forall i \in I\ x_i \in E_i \subset G$
  Mais G est stable par combinaisons linéaires donc $x = \displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in G$

5.3 Formule de Grassman

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit F et G deux sev de E.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration
Soit $\varphi \begin{cases} F \times G \to E \\ (f,g) \mapsto f+g \end{cases}$.
φ est linéaire et $F + G = \operatorname{Im}(\varphi)$.
D'après la formule du rang :
$\dim(F+G) = \dim(F \times G) - \dim(\ker(\varphi)) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\ker(\varphi))$
Montrons que $\ker(\varphi) = \{(f,-f), f \in F \cap G\}$.
Soit $(f,g) \in F \times G$ un élément de $\ker(\varphi)$.
$f + g = \varphi((f,g)) = 0$ donc $g = -f$.
$f = -g$ avec $g \in G$ donc $f \in G$ et $f \in F \cap G$.
Donc $\ker(\varphi) \subset \{(f,-f), f \in F \cap G\}$.
Réciproquement, si $f \in F \cap G$ alors $(f,-f) \in F \times G$ et $\varphi((f,-f)) = 0$ donc $\{(f,-f), f \in F \cap G\} \subset \ker(\varphi)$.
On a bien $\ker(\varphi) = \{(f,-f), f \in F \cap G\}$.
Il faut en déterminer la dimension.
Soit $\psi \begin{cases} F \cap G \to \ker(\varphi) \\ f \mapsto (f,-f) \end{cases}$.
ψ est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall (f_1,f_2) \in F \cap G \ \forall (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{K}^2 \ \psi(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) &= (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2, -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2) \\ &= (\mu_1 f_1, -\mu_1 f_1) + (\mu_2 f_2, -\mu_2 f_2) \\ &= \mu_1 (f_1, -f_1) + \mu_2 (f_2, -f_2) \\ &= \mu_1 \psi(f_1) + \mu_2 \psi(f_2) \end{aligned}$$

ψ est injective :
soit $f \in \ker(\psi)$.
$(f,-f) = \psi(f) = (0,0)$ donc $f = 0$
Donc $\ker(\psi) \subset \{0\}$.
L'autre inclusion est triviale donc $\ker(\psi) = \{0\}$
ψ est clairement surjective donc ψ est bijective.
Donc ψ est un isomorphisme de$F \cap G$ sur $\ker(\varphi)$.
Donc $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(F \cap G)$ et on en déduit la formule de Grassman.

5.4 Réunions

Il ne faut pas confondre somme et réunion.
Une réunion de sev n'est pas en général un espace vectoriel.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Soient F et G deux sev de E.
Donner une CNS portant sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sev de E.
Proposer des généralisations de l'exercice.

5.5 Exemple

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille finie non vide de vecteurs de E.
Pour chaque $i \in I$ soit $E_i = \mathbb{K}e_i$ le sev de E engendré par e_i.
Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$.

6 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

6.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $E_1, \dots, E_n$ n sev de E.
On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si et seulement si :

$$\boxed{\forall x \in E_1 + \cdots + E_n\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ tq } x = x_1 + \cdots + x_n}$$

ie tout élément de $E_1 + \cdots + E_n$ s'écrit de manière *unique* comme somme d'un élément de E_1, d'un élément de $E_2 \dots$ et d'un élément de E_n.
Dans ce cas $E_1 + \cdots + E_n$ est notée $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ ou $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
Plus généralement, si I est un ensemble fini non vide et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E on dit que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ est directe si et seulement si pour tout x dans $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ il existe une et une seule famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E telle que :

- $x = \sum_{i\in I} x_i$
- $\forall i \in I\ x_i \in E_i$

Si $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ est directe on la note $\displaystyle\bigoplus_{i\in I} E_i$.
On peut observer que dire que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ est directe revient à dire que l'application linéaire $\varphi \begin{cases} \mathrm{X}_{i\in I} E_i \to E \\ (x_i)_{i\in I} \mapsto \displaystyle\sum_{i\in I} x_i \end{cases}$ est injective. Mais l'injectivité d'une application linéaire se caractérise à l'aide de son noyau. On en déduit la

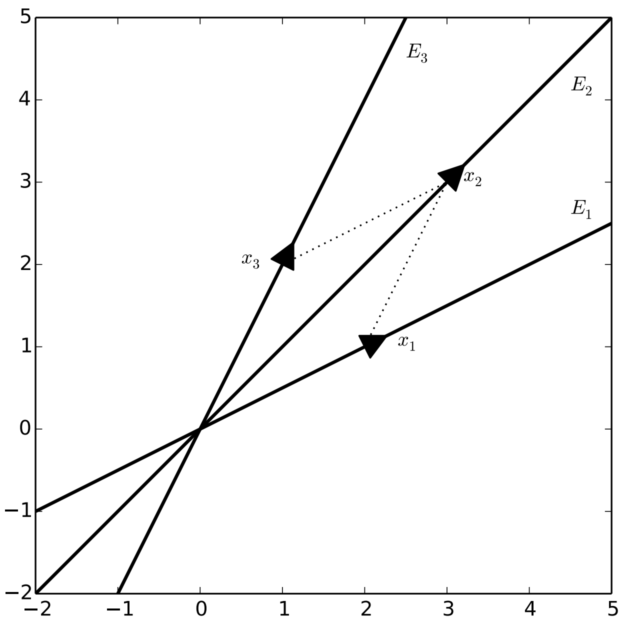
6.2 Condition nécessaire et suffisante

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $E_1, \dots, E_n$ n sev de E.
$E_1 + \cdots + E_n$ est directe $\iff$ la seule façon d'écrire 0 comme la somme d'un élément de E_1, d'un élément de $E_2 \dots$ et d'un élément de E_n est la décomposition triviale $0 = 0 + \cdots + 0$.
Plus généralement, si I est un ensemble fini non vide et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E, la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ est directe si et seulement si la seule façon d'écrire $0 = \displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ avec pour tout $i \in I$ $x_i \in E_i$ est la décomposition triviale $0 = \displaystyle\sum_{i\in I} 0$

6.3 A propos des intersections

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $E_1, \dots, E_n$ n sev de E avec $n \geq 2$.
Si $E_1 + \cdots + E_n$ est directe alors :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0\}$

En effet soit i et j deux éléments distincts de $[\![1;n]\!]$.
Soit $x \in E_i \cap E_j$.
On pose $x_k = \begin{cases} x \text{ si } k = i \\ -x \text{ si } k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
On a $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$
Comme la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ x_k = 0$
En particulier $x = x_i = 0$
Donc $E_i \cap E_j \subset \{0\}$
Mais $E_i \cap E_j$ est un sev de E donc $\{0\} \subset E_i \cap E_j$.
D'où : $E_i \cap E_j = \{0\}$
Si $n = 2$, la réciproque est vraie :
Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tq $x_1 + x_2 = 0$
$x_1 = -x_2$ avec $x_2 \in E_2$ sev de E donc $x_1 \in E_2$.
Donc $x_1 \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $x_1 = 0$.
On en déduit $x_2 = -x_1 = 0$.
La somme $E_1 + E_2$ est bien directe.
Par contre, si $n \geq 3$, la réciproque est fausse ie :
on peut avoir :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0\}$
sans que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ soit directe.



Les graduations sont sans pertinence.
On a $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{0\}$

Pourtant la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe car :

$$\begin{aligned} x_2 &= (0 \in E_1) + (x_2 \in E_2) + (0 \in E_3) \\ &= (x_1 \in E_1) + (0 \in E_2) + (x_3 \in E_3) \end{aligned}$$

6.4 Propriétés

Soient E un $\mathbb{K}$ ev et $E_1, \dots, E_n$ n sev de E

- si $E_1 + \dots + E_n$ est directe alors pour tout $p \in \{2; \dots; n\}$ $E_1 + \dots + E_p$ est directe.
- si $E_1 + \dots + E_n$ est directe alors pour tout $p \in \{2; \dots; n-1\}$ $(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) + (E_{p+1} \oplus \dots \oplus E_n)$ est directe.

6.5 Exemples

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs non nuls de E.
  $\sum\limits_{i\in I} \mathbb{K}e_i$ est directe $\Longleftrightarrow$ $(e_i)_{i\in I}$ est libre
- **Remarque pour les 5/2**
  Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
- Soit E un espace euclidien (ou préhilbertien réel).
  Soient $F_1, \dots, F_p$ p sev de E deux à deux orthogonaux :
  $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ $i \neq j \Longrightarrow F_i \perp F_j$
  La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.
  Démonstration
  Soit $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots F_p$ tq $x_1 + \dots + x_p = 0$.

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;p]\!] \quad \left(x_i | \sum_{j=1}^{p} x_j\right) &= (x_i|0) = 0 \\ &= \sum_{j=1}^{p} ((x_i|x_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ car } F_i \perp F_j) \\ &= (x_i|x_i) = \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

  Donc :
  $\forall i \in [\![1;p]\!]$ $x_i = 0$
  $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est bien une somme directe.
  Dans ce cas, on note $F_1 + \dots + F_p = F_1 \oplus \dots \oplus F_p = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_p$ et on dit que c'est une somme directe orthogonale.

7 Sous-espaces supplémentaires

Il s'agit d'un rappel du cours de première année.

7.1 Définition et CNS

Soient E un $\mathbb{K}$ ev, de dimension finie ou infinie et E_1, E_2 deux sev de E, eux même de dimension finie ou infinie.
On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si $E_1 \oplus E_2 = E$.
On peut expliciter cette définition :
E_1 et E_2 sont supplémentaires $\iff \forall x \in E\, \exists !(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tq $x = x_1 + x_2$
Attention
Il ne faut surtout confondre supplémentaires et complémentaires.
Si $E_1 \oplus E_2 = E$, en général $E_1 \cup E_2$ est strictement contenu dans E.
Par exemple le rayonnement suivant est grossièrement faux :
$\begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \\ x \notin E_1 \end{cases} \implies x \in E_2$
Revenons à la notion de sous-espaces supplémentaires.
Pour montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires, on procède donc par analyse-synthèse :
On se donne $x \in E$.
On suppose que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
On cherche à exprimer x_1 et x_2 en fonction de x, ce qui assure l'unicité.
On définit ensuite x_1 et x_2 avec les expressions trouvées lors de l'analyse et on vérifie, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_1 + x_2 = x$.
On a la CNS suivante :
E_1 et E_2 sont supplémentaires $\iff \begin{cases} E_1 + E_2 = E \text{ ie } \forall x \in E\, \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \text{ tq } x = x_1 + x_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0\} \end{cases}$
$E_1 \cap E_2 = \{0\}$ est en général facile à prouver.
Par contre pour montrer $E = E_1 + E_2$, on se donne $x \in E$ et on cherche $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tq $x = x_1 + x_2$. En l'absence d'informations complémentaires, cela conduit à un raisonnement par analyse synthèse et on démontre deux fois l'unicité.
En dimension finie, on peut gagner du temps en utilisant les dimensions :

$$\begin{aligned} E = E_1 \oplus E_2 \quad &\iff \quad \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E) \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} E_1 + E_2 = E \\ \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E) \end{cases} \end{aligned}$$

mais la deuxième CNS est moins utile puisqu'on retrouve le problème de la démonstration de $E = E_1 + E_2$.

7.2 Cas des hyperplans

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit H un hyperplan de E.
Toute droite D de E non contenue dans H est un supplémentaire de H.
En d'autres termes :
$\forall x \in E \setminus H\ E = H \oplus \mathbb{K}x$

7.3 Définition d'un endomorphisme par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et E_1, E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
$\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E_1, E) \times \mathcal{L}(E_2, E)\ \exists! u \in \mathcal{L}(E)$ tq $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$

7.4 Forme géométrique du théorème du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de dimensions finies ou infinies.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$ (dans E).
L'application $\begin{cases} S \to \mathrm{Im}\,(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

8 Sommes directes et dimension finie

8.1 Dimension d'une somme directe

Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
Alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim\,(F_i)$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Démonstration
Soit $\varphi \begin{cases} F_1 \times \cdots \times F_p \to E \\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \end{cases}$

φ est linéaire et $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$.
La formule du rang donne donc :
$\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \dim\,(F_1 \times \cdots \times F_p) - \dim\ker(\varphi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\,(F_i) - \dim\ker(\varphi)$
D'où :
$\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\,(F_i)$
avec égalité si, et seulement si, φ est injective ie si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe comme remarqué ci-dessus.

Remarque
Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E alors :
$\dim\left(\displaystyle\sum_{i \in I} F_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i \in I} \dim\,(F_i)$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

8.2 Base de E adaptée à une décomposition $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $F_1, \ldots, F_p$ p sev de E tels que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.
Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ on pose $d_i = \dim F_i$ qu'on suppose ≥ 1.
Soit $(e_1, \ldots, e_{d_1})$ une base de F_1.
Soit $(e_{d_1+1}, \ldots, e_{d_1+d_2})$ une base de F_2.
$\vdots$
Soit $(e_{d_1+\cdots+d_{p-1}+1}, \ldots, e_{d_1+\cdots+d_p} = e_{\dim E})$ une base de F_p.
Alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{\dim E})$ est une base de E.
Une telle base est dite adaptée à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Démonstration
On commence par montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_1+\cdots+d_p}) \in \mathbb{K}^{d_1+\cdots+d_p}$ tq $\sum\limits_{j=1}^{d_1+\cdots+d_p} \lambda_j e_j = 0$.
On a :
$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{d_1} e_{d_1} \in F_1) + \cdots + \left(\lambda_{d_1+\cdots+d_{p-1}+1} e_{d_1+\cdots+d_{p-1}+1} + \cdots + \lambda_{d_1+\cdots+d_p} e_{d_1+\cdots+d_p} \in F_p\right) = 0$
La somme est directe donc :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{d_1} e_{d_1} &= 0 \\
\vdots &= \vdots \\
\lambda_{d_1+\cdots+d_{p-1}+1} e_{d_1+\cdots+d_{p-1}+1} + \cdots + \lambda_{d_1+\cdots+d_p} e_{d_1+\cdots+d_p} &= 0
\end{aligned}$$

$(e_1, \ldots, e_{d_1})$ est libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{d_1} = 0$
Idem pour les autres.
$\mathcal{B}$ est donc une famille libre comportant $d_1 + \cdots + d_p = \dim E$ vecteurs. C'est bien une base de E.

Exemples
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 2$.

- Soit p un projecteur de E de rang $r \in \{1; \ldots; n-1\}$.
  Dans une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \ker(p)$, la matrice de p est :
  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Soit s une symétrie de E différente de Id_E et de $-Id_E$.
  Dans une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$, la matrice de s est :
  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $p = \dim \mathrm{Ker}\,(s - Id_E)$

Cas particulier d'une somme directe orthogonale
Soit E un espace euclidien et $F_1, \ldots, F_p$ p sev de E tels que $E = \mathop{\overset{\perp}{\bigoplus}}\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Soit $(e_1, \dots, e_{d_1})$ une base orthonormée de F_1.
Soit $(e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2})$ une base orthonormée de F_2.
$\vdots$
Soit $(e_{d_1+\dots+d_{p-1}+1}, \dots, e_{d_1+\dots+d_p} = e_{\dim E})$ une base orthonormée de F_p.
Comme les F_i sont deux à deux orthogonaux, on vérifie facilement que le famille $(e_1, \dots, e_{\dim E})$ est orthonormée.
Au vu de son nombre de vecteurs, c'est une base orthonormée de E.

8.3 Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.
Soit $(J_1, \dots, J_p)$ une partition de I :

- $\forall k \in [\![1;p]\!]\ J_k \neq \emptyset$
- $\forall (k,l) \in [\![1;p]\!]\ J_k \cap J_l = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} J_k = I$

Alors $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$

Démonstration

On commence par montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$ est directe :
On considère donc une famille $(x_1, \dots, x_p)$ telle que :

- $\forall k \in [\![1;p]\!]\ x_k \in \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$

Pour tout k compris entre 1 et p, il existe donc une famille de scalaires $(\lambda_{k,i})_{i\in J_k}$ telle que $x_k = \displaystyle\sum_{i\in J_k} \lambda_{k,i} e_i$.

On a alors : $0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i\in J_k} \lambda_{k,i} e_i \right)$
Comme $(J_1, \dots, J_p)$ une partition de I, chaque vecteur de la famille $(e_i)_{i\in I}$ apparaît une fois et une seule. Comme cette famille est libre (c'est une base de E), on en déduit que tous les $\lambda_{k,i}$ sont nuls.
Par conséquent, tous x_k sont nuls et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$ est bien directe.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right) \right) &= \sum_{k=1}^{p} \dim\left(\operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Card}(J_k)
\end{aligned}$$

En effet la famille $(e_i)_{i\in J_k}$ est libre (car extraite d'une famille libre) et génératrice de $\operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$. C'est donc une base de cet espace et la dimension d'un espace est égale au nombre de vecteurs de ses bases.

Les J_k étant deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}
\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)\right) &= \operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} J_k\right) = \operatorname{Card}(I) \\
&= \dim(E)
\end{aligned}$$

et finalement : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in J_k}\right)$