ALGEBRE LINEAIRE
TD
2021-2022
Chapitre 1
Correction

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 *(Mines 2010)*

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_k(x) = \dfrac{1}{x^2+k^2}$
$(f_k)_{1\leq k\leq n}$ est-elle libre ou liée dans E ?

Correction

- **Première méthode**
  On intuite la liberté de la famille, ce qui impose la forme de la rédaction.
  Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$.
  A priori, cela signifie :
  $\forall x \in \mathbb{R}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$.
  Mais $\mathbb{R}$ est infini et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ est une fonction rationnelle donc :
  $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm ik; k \in [\![1;n]\!]\}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$.
  Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
  On multiplie par x^2+k^2 :
  $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm il; kl \in [\![1;n]\!]\}\ \lambda_k + \displaystyle\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \lambda_l \frac{x^2+k^2}{x^2+l^2} = 0$
  On fait tendre x vers ik et on obtient $\lambda_k = 0$.
- **Deuxième méthode**
  On n'intuite rien. On raisonne par équivalence.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 &\iff \forall x \in]-1;1[\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0 \text{ car }]-1;1[\text{ est infini et les } f_k \text{ rationnelles} \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^2} \frac{1}{1+x^2/k^2} = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{k^{2l}} \right) = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1;1[\ \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{2l+2}} \right) x^{2l} = 0 \\
&\iff \forall l \in \mathbb{N}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{2l+2}} = 0
\end{aligned}$$

Si on considère ces conditions comme un système d'inconnues les λ_k les premières lignes sont :
$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}$
$\frac{1}{1^{2+2}}, \frac{1}{2^{2+2}}, \dots, \frac{1}{n^{2+2}}$
....
$\frac{1}{1^{2+2(n-1)}}, \frac{1}{2^{2+2(n-1)}}, \dots, \frac{1}{n^{2+2(n-1)}}$
Si on se restreint aux n premières lignes, on obtient un système carré à n lignes et n colonnes.
Son déterminant est

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \dots & 1n^2 \\ \frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \dots & \frac{1}{n^2} \\ \dots & & & \\ \frac{1}{1^{2+2n}} & \frac{1}{2^{2+2n}} & \dots & \frac{1}{n^{2+2n}} \end{vmatrix} &= \frac{1}{1^2 2^2 \dots n^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \dots & \frac{1}{n^2} \\ \dots & & & \\ \frac{1}{1^{2(n-1)}} & \frac{1}{2^{2(n-1)}} & \dots & \frac{1}{n^{2(n-1)}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(n!)^2} VdM\left(1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Le déterminant du système est donc non nul et tous les λ_i sont nuls.
Si on veut éviter le recours aux séries entières et se limiter au cours de première année, on se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$.
On fait alors un développement limité à l'ordre $2n-2$.
On en déduit un système de n équations à n inconnues mais on a perdu de l'information.
Ici on a de la chance, car ces n équations suffisent à prouver que les λ_i sont nuls (cf ci-dessus).

Exercice 2 *(Mines 2022)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit E_p l'ensemble des suites complexes p-périodiques.

1. Montrer que E_p est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Donner une base de E_p formée de suites géométriques.

Correction

1. On commence par montrer que E_p est un espace vectoriel.
   - $E_p \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
   - E_p contient la suite nulle.
   - E_p est stable par combinaisons linéaires :
     Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
     $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\lambda u + \mu v)_{n+p} = \lambda u_{n+p} + \mu v_{n+p} = \lambda u_n + \mu v_n = (\lambda u + \mu v)_n$

   On en déduit que E_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

   On passe à la dimension de E_p.
   Soit $\Psi \begin{cases} E_p \to \mathbb{C}^p \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) \end{cases}$.
   Ψ est linéaire :
   Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

   $$\begin{aligned} \Psi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \ldots, \lambda u_p + \mu v_p) \\ &= \lambda(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}) + \mu(v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}) \\ &= \lambda\Psi(u) + \mu\Psi(v) \end{aligned}$$

   E_p peut être vu comme l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de récurrence $u_{n+p} = u_n$.
   La donnée des p premières valeurs définit une et une seule suite vérifiant cette relation de récurrence. En d'autres termes, tout élément de $\mathbb{C}^p$ a un et un seul antécédent par Ψ.
   Ψ est donc bijective.
   On en déduit que Ψ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels .
   Finalement, $\dim(E_p) = \dim(\mathbb{C}^p) = p$.
2. Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$.
   $\omega^p = 1$
   Pour tout $r \in [\![0; n-1]\!]$, soit U_r la suite géométrique de raison ω^r et de premier terme 1 :
   $\forall r \in [\![0; n-1]\!]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_r(n) = (\omega^r)^n = \omega^{rn}$
   Pour tout $r \in [\![0; n-1]\!]$, $U_r \in E_p$:
   $\forall r \in [\![0; n-1]\!]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_r(n+p) = \omega^{r(n+p)} = \omega^{rn} + (\omega^p)^n = \omega^{rn} = U_r(n)$.
   $\forall r \in [\![0; n-1]\!]$ $\Psi(U_r) = (1, \omega^r, \omega^{2r}, \ldots, \omega^{r(p-1)}$
   Le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$ de cette famille est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \ldots & \omega^{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{p-1} & \ldots & (\omega^{p-1})^{p-1} \end{vmatrix}$.
   On reconnaît le transposé d'un déterminant de Vandermonde.
   Les ω^r, $r \in [\![0; p-1]\!]$ étant deux à deux distincts, ce déterminant est non nul.
   On en déduit que $(\Psi(U_0), \ldots, \Psi(U_{p-1}))$ est une base de $\mathbb{C}^p$.
   Ψ étant un isomorphisme, $(U_0, \ldots, U_{p-1})$ est une base de E_p.

Exercice 3 *(Centrale 2010)*

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
La famille $(e_1 + u, \ldots, e_n + u)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^n$?

Correction
Pas toujours, cf $u = -e_i$.

Dans le cas général, on écrit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i + u) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) u = 0$

On a donc :

$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

On somme ces n relations :

$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$

- **Premier cas :** $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq -1$

  $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

  $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i = \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

  La famille $(e_1 + u, \ldots, e_n + u)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

- **Deuxième cas :** $\sum_{i=1}^{n} x_i = -1$

  Le système :

  $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

  n'est pas un système de Cramer puisque la somme de ses lignes est nulle.

  On prend (ou encore on pose) $\lambda_i = -x_i$ pour i compris entre 1 et $n-1$ et $\lambda_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

  On a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et par conséquent :

  $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\ \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

  De plus :

  $\lambda_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1 + (-1 - x_n) = -x_n$ de sorte que :

  $\lambda_n + x_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

  et donc :

  $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$

  Mais ces nombres sont les coordonnées de $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i + u)$ donc :

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i + u) = 0$

Les λ_i ne sont pas tous nuls car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ donc la famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ est liée.

La famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 *(CCP 2017)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que si P appartient au noyau de f, alors le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   En déduire le noyau de f.
2. En utilisant le théorème du rang, montrer que $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-elle surjective ?

Correction

1. Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$.
   $P(X + 1) - P(X) = 0$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n + 1) - P(n) = 0$
   On en déduit (par une récurrence triviale) :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) = P(0)$.
   Donc le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   C'est donc le polynôme nul et $P = P(0)$ est un polynôme constant.
   Réciproquement si P est un polynôme constant $P(X + 1) - P(X) = 0$.
   Finalement $\operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
   $P(X) = a_{n+1}X^{n+1} + Q(X)$ avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Il me semble qu'on peut affirmer ici sans justification que $Q(X + 1) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :
   $P(X+1)-P(X) = a_{n+1}\left((X + 1)^{n+1} - X^{n+1}\right)+Q(X+1)-Q(X)$ avec $Q(X+1)-Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$(X + 1)^{n+1} - X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^k - X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

   Donc $P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Donc $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
   D'après la formule du rang :

$$\begin{aligned}
\dim(f(\mathbb{R}_{n+1}[X])) &= \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \mathbb{R}_{n+1}[X]) \\
&= \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathbb{R}_0[X] \cap \mathbb{R}_{n+1}[X]) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathbb{R}_0[X]) \\
&= n + 2 - 1 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])
\end{aligned}$$

   Avec l'inclusion précédente, on a $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

3. f n'est pas injective. Si f était un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on pourrait en déduire que f n'est pas surjective mais $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.
   En fait f est surjective.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (prendre n le degré de P si P est non nul et $n = 0$ si P est nul).
   D'après la question précédente, P a un antécédent par f.

Exercice 5 *(Banque CCP MP)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Correction

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)
   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.

   Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
   Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)
   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

   $\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
   Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 6 *(X 2015)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, s une symétrie de E et p un projecteur de E.
Montrer : $(s - p) \circ (s + p) = 0 \Longrightarrow p = Id_E$

Correction
On suppose $(s-p)\circ(s+p)=0$.
On en déduit $s^2+sp-ps-p^2=id_E+sp-ps-p=0$ donc :
$ps-sp+p=id$
On compose par p à gauche :
$ps-psp+p=p$ ie $ps=psp$.
On compose par p à droite :
$psp-sp+p=p$ ie $sp=psp$.
On en déduit $ps=sp$ puis $p=id_E$.

Exercice 7 *(Centrale 2015)*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
On note n la dimension de E et p celle de F.
Soient $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,E)$ telles que $u\circ v=Id_F$.
Montrer que $v\circ u$ est un projecteur.
Donner son noyau, son image et leurs dimensions.

Correction
$(v\circ u)^2=v\circ u\circ v\circ u=v\circ(u\circ v)\circ u=v\circ u$.
Donc $v\circ u$ est un projecteur.
$\ker(u)\subset\ker(v\circ u)$.
Réciproquement, soit $x\in\ker(v\circ u)$.
En particulier $x\in E$ et $u(x)\in F$.
$u(x)=(u\circ v)(u(x))=u\left(v\circ u(x)\right)=u(0)=0$ et $x\in\ker u$.
On a donc $\ker(v\circ u)=\ker(u)$.
$\mathrm{Im}\,(v\circ u)\subset\mathrm{Im}\,(v)$.
Réciproquement, soit $x\in\mathrm{Im}\,(v)$.
$\exists y\in F$ tq $x=v(y)$.
$x=v(y)=v\left((u\circ v)(y)\right)=(v\circ u)(v(y))\in\mathrm{Im}\,(v\circ u)$
On a donc $\mathrm{Im}\,(v\circ u)=\mathrm{Im}\,(v)$.
$u\circ v=Id_F$ est injective donc v est injective.
On en déduit $\dim\left(\mathrm{Im}\,(v\circ u)\right)=\dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right)=p$ par la formule du rang.
$u\circ v=Id_F$ est surjective donc u est surjective.
On en déduit $\dim\left(\ker(v\circ u)\right)=\dim\left(\ker(u)\right)=n-p$ par la formule du rang appliquée à u.
On vérifie que la formule du rang appliquée à $v\circ u$ est juste.

Exercice 8 *(Mines 2012, 2017)*

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer :
$f\circ f=0\Longleftrightarrow\exists p\in\mathcal{L}(E)$ projecteur tel que $f=f\circ p-p\circ f$

Correction

- $\Longleftarrow$
  On compose par p à droite :
  $f\circ p=f\circ p-p\circ f\circ p$
  Donc $p\circ f\circ p=0$
  On compose par p à gauche :
  $p\circ f=p\circ f\circ p-p\circ f=0-p\circ f=-p\circ f$

Donc : $\boxed{p \circ f = 0}$
Donc $\boxed{f = f \circ p}$ et $f^2 = f \circ p \circ f \circ p = f \circ 0 = 0$

- $\Longrightarrow$
On a vu dans le sens $\Longleftarrow$ que si p existe on a $p \circ f = 0$ et $f = f \circ p$.
Or :
$p \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(p)$
et :
$f = f \circ p \Longleftrightarrow f \circ (id_E - p) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(id_E - p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$
Mais $id_E - p$ est le projecteur associé à p son image est égale au noyau de p.
On peut passer à la démonstration du sens $\Longrightarrow$:
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ f = 0$.
$f \circ f = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$
Il existe donc un projecteur p tel que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(p) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
D'après les équivalences ci-dessus, $p \circ f = 0$ et $f \circ p = f$ donc $f = f \circ p - p \circ f$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel de dimension n et u, $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u + v \in GL(E)$ et $u \circ v = 0$.
Montrer que $r(u) + r(v) = n$.

Correction
$u \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$.
Donc $r(v) \leq \dim \mathrm{Ker}\, u = n - r(u)$.
Donc $r(u) + r(v) \leq n$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u + v)$.
$\exists x \in E$ tq $y = (u + v)(x)$
D'où $y = u(x) + v(x) \in \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.
Donc $\mathrm{Im}\,(u + v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.
Donc :

$$\begin{aligned} r(u+v) = n &\leq \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) \\ &\leq \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, v) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) \\ &\leq r(u) + r(v) \end{aligned}$$

D'où $r(u) + r(v) = n$.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 10 *(Mines 2016)*

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).
Soit f un endomorphisme de de E tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Montrer :
f bijective $\Longleftrightarrow f^2 + id = 0$
3. ?
4. ?

5. ?

Correction

1. Soit $x \in E$.
On suppose $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}\,(f)$ et $z \in \text{Ker}\,(f)$.
$y \in \text{Im}\,(f)$ donc il existe $y_1 \in E$ tel que $y = f(y_1)$.
$x = f(y_1) + z$
$f(x) = f^2(y_1)$ car $z \in \text{Ker}\,(f)$
$f^2(x) = f^3(y_1) = -f(y_1) = -y$
$y = -f^2(x)$ et $z = x - y = x + f^2(x)$
D'où l'unicité en cas d'existence.
Réciproquement, on pose $y = -f^2(x)$ et $z = x - y = x + f^2(x)$.
$y + z = x$
$y = -f^2(x) = f(-f(x)) \in \text{Im}\,(f)$
$f(z) = f(x) + f^3(x) = 0$ car $f + f^3 = 0$
2. $\Longrightarrow$: trivial, il suffit de composer par f^{-1}.
$\Longleftarrow$: Soit $x \in \text{Ker}\,(f)$.
$x = -f^2(x) = -f(f(x)) = -f(0) = 0$
$\text{Ker}\,(f) = \{0\}$.
f est donc injective.
En utilisant la première question, on voit que f est surjective.
On peut aussi remarquer que $f \circ (-f) = (-f) \circ f = Id$ (attention la dimension est quelconque).

Exercice 11 *(Mines 2011)*

Soit E de dimension finie n.
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = id_E$ et $rg(f) + rg(g) \leq n$.
Montrer que $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Im}\, g$ puis que f et g sont des projecteurs.

Correction
$E = \text{Im}\,(id_E) = \text{Im}\,(f + g) \subset \text{Im}\,(f) + \text{Im}\,(g) \subset E$ donc $E = \text{Im}\,(f) + \text{Im}\,(g)$.
Donc $n = rg(f) + rg(g) - \dim\,(\text{Im}\,(f) \cap \text{Im}\,(g))$
Donc $\dim\,(\text{Im}\,(f) \cap \text{Im}\,(g)) = rg(f) + rg(g) - n \leq 0$.
Donc $\text{Im}\,(f) \cap \text{Im}\,(g) = \{0\}$ et $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Im}\, g$.

Soit $x \in E$.
$E = \text{Im}\, f \oplus \text{Im}\, g$ donc :
$\exists!(x_{\text{Im}\, f}, x_{\text{Im}\, g}) \in \text{Im}\, f \times \text{Im}\, g$ tq $x = x_{\text{Im}\, f} + x_{\text{Im}\, g}$.
$x_{\text{Im}\, f}$ est le projeté de x sur $\text{Im}\, f$ parallèlement à $\text{Im}\, g$.
$f + g = id_E$ donc $x = f(x) + g(x)$.
Mais $f(x) \in \text{Im}\, f$ et $g(x) \in \text{Im}\, g$ donc $f(x) = x_{\text{Im}\, f}$ et $g(x) = x_{\text{Im}\, g}$.
On en déduit que f et g sont des projecteurs.

Exercice 12 *(Mines 2012)*

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$
Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.
On note $H = f^{-1}(F)$.

1. H est-il un espace vectoriel ?
2. Quelle est la dimension de H ?

Correction

1. Oui car H est un sev de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:
   - $H \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: clair
   - $0 + 0 = 0 \in F$ car F est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc $(0, 0) \in H$.
   - H est stable par combinaisons linéaires :
     Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de H et λ_1 λ_2 deux réels.
     $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ et :
     $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 (x_1 + y_1 \in F) + \lambda_2 (x_2 + y_2 \in F) \in F$ car F est un sev de $\mathbb{R}^n$.
     Donc $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in H$
2. Soit $g \begin{cases} H \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto f((x, y)) = x + y \end{cases}$
   $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}^n\}$ est de dimension n.
   $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f \cap F = F$ car F est surjective.
   Donc $\dim H = n + \dim F$

   Autre méthode envisageable :
   $H = \{(x; x_F - x), x \in \mathbb{R}^n, x_F \in F\}$
   D'où un isomorphisme de H sur $\mathbb{R}^n \times F$:
   $\varphi \begin{cases} H \to \mathbb{R}^n \times F \\ (x, y) \mapsto (x, y + x) \end{cases}$