# ALGEBRE LINEAIRE
# 2023-2024
# Correction
# Correction des exercices du premier chapitre du cours

941

**Exercice 1** *(X 2019, Ens 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tq $b_0 < b_1 < \cdots < b_n$.
Montrer :
$\exists!(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k P(b_k)$

**Correction**
Plusieurs méthodes sont possibles.

- **Première méthode : utilisation des polynômes de Lagrange**

  Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}} (X-b_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}} (b_i-b_j)}$.
  $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et :
  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(b_k)L_k$
  Par linéarité de l'intégrale :
  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} P(b_k)\int_0^1 f(x)L_k(x)\,\mathrm{d}x$
  D'où l'existence.

  Supposons :
  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k P(b_k)$
  On a :
  $\forall l \in [\![0;n]\!]$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)L_l(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_l(a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{k,l} = a_l$
  D'où l'unicité.

- **Deuxième méthode**
  Soit $E$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$. $E$ est un $\mathbb{R}$-ev de même

dimension que $\mathbb{R}_n[X]$ donc $n+1$.
Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$ soit $\phi_i \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a_i) \end{cases}$.
Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $\phi_i$ appartient à $E$.
La famille $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est libre : se donner une combinaison linéaire nulle et l'évaluer en $P_i = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (X - a_j)$.
Au vu de son cardinal, c'est une base de $E$.
On conclut en remarquant que $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ appartient à $E$.

- **Troisième méthode**
  $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.
  Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P(b_k) \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.
  Or , deux applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ sont égales si, et seulement si, elles coïncident sur une base.
  Si on prend comme base, $(1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$
\begin{aligned}
(a_0, \dots, a_n) \text{ convient} &\iff \forall i \in [\![0;n]\!] \sum_{k=0}^{n} a_k b_k^i = \int_0^1 x^i f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ a_0 b_0^n + a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + \dots + a_n b_n^n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}
\end{aligned}
$$

  La matrice du système est la transposée de la matrice de Vandermonde construite avec les nombres $b_0, \dots, b_n$.
  Elle est donc inversible. On en déduit que le système a une et une seule solution, ce qui achève l'exercice.

**Exercice 2** *(X 2016)*

Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie ; $x \in E$, $y \in F$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(x) = y$.

**Correction**
Si $x \ne 0$, la famille $(x)$ est libre et on la complète (si la dimension $n$ de $E$ est supérieure ou égale à 2) en $(x = e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de $E$.
$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $f(e_i) = y$

En particulier $f(x) = y$.
Si $x = 0$, l'existence de $f$ impose $y = 0$.
Réciproquement, si $y = 0$ toute application linéaire de $E$ dans $F$ (et il en existe toujours au moins une) envoie $x$ sur $y$.
La CNS cherchée est

$$(x \neq 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y = 0)$$

**Remarque**
On n'écrit pas $x = y = 0$ car $x$ vit dans $E$ et $y$ dans $F$.

**Exercice 3** *(X 2011)*

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \{0\}$.

**Correction**
$\mathrm{Im}(v \circ u) = (v \circ u)(E) = v(u(E)) = v(\mathrm{Im}\, u)$
La formule du rang appliquée à la restriction de $v$ à $\mathrm{Im}\, u$ donne :
$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v)$
On conclut facilement.

**Exercice 4**

Soit $E$ un ev de dimension finie.
Soient $F$ et $N$ 2 sev de $E$.
Trouver une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(u) = N \\ \mathrm{Im}\,(u) = F \end{cases}$.

**Correction**
Si $u$ existe alors, d'après la formule du rang, $\dim N + \dim F = \dim E$.
Réciproquement, on suppose $\dim N + \dim F = \dim E$.
Si $N = \{0\}$ alors $F = E$ et $u = Id_E$ convient.
Si $N = E$ alors $F = \{0\}$ et $u = 0$ convient.
On suppose désormais $d = \dim N \in \{1; \ldots; n-1\}$ (où $n = \dim E$) (ce qui suppose $n \geq 2$).
Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de $N$.
On la complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$.
Soit $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-d})$ une base de $F$.
$\exists(!)u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\begin{cases} \forall i \in \{1; \ldots; d\} \;\; u(e_i) = 0 \\ \forall i \in \{d+1; \ldots; n\} \;\; u(e_i) = \epsilon_{i-d} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, u &= \mathrm{Vect}(u(e_i), 1 \leq i \leq n) \\ &= \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-d}) = F \end{aligned}$$

On a trivialement $N \subset \ker u$.
De plus, d'après la formule du rang :
$\dim N = \dim E - \dim F = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, u = \dim \ker u$
donc $\ker u = N$.

Finalement la CNS cherchée est :

$$\boxed{\dim N + \dim F = \dim E}$$

**Exercice 5** *(Mines 2019)*

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$.
Soit $F$ un espace vectoriel de dimension $p$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang $r < n$.
Quelle est la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(F, E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ ?

**Correction**
Même si cela n'est pas demandé, on peut commencer par montrer que $G = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ est un espace vectoriel.
Pour cela on montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ :

- $G \subset \mathcal{L}(F, E)$ : clair
- $0_{\mathcal{L}(F,E)} \begin{cases} F \to E \\ x \mapsto 0_E \end{cases}$ appartient à $G$ : clair.
  En effet $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ donc $f(0_E) = 0_F$
- $G$ est stable par combinaisons linéaires :
  Soit $(g_1, g_2) \in G^2$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}^2$.
  $f \circ (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = \mu_1 f_1 \circ g + \mu_2 f_2 \circ g = \mu_1 0 + \mu_2 0 = 0$

Soit $g \in G$.
$f \circ g = 0$ donc :
$\forall x \in F \; f(g(x)) = 0$
Mais lorsque $x$ décrit $F$, $g(x)$ décrit $\mathrm{Im}\,(g)$ donc $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
On peut donc définir $\phi_g \begin{cases} F \to \mathrm{Ker}\,(f) \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$ .
$\phi_g$ est clairement une application linéaire de $F$ dans $\mathrm{Ker}\,(f)$, ce qui permet de définir :
$\phi \begin{cases} G \to \mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f)) \\ g \mapsto \phi_g \end{cases}$
$\phi$ elle-même est linéaire :
Soit $(g_1, g_2) \in G^2$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in F \; \phi(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2)(x) &= \phi_{\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2}(x) = (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2)(x) \\ &= \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) = \mu_1 \phi_{g_1}(x) + \mu_2 \phi_{g_2}(x) \\ &= \mu_1 \phi(g_1)(x) + \mu_2 \phi(g_2)(x) \end{aligned}$$

Donc $\phi(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = \mu_1 \phi(g_1) + \mu_2 \phi(g_2)$.

$\phi$ est injective :
Soit $g \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$.
$\forall x \in F \; 0 = \phi(g)(x) = g(x)$
donc $g$ est nulle.
Comme signalé dans le paragraphe précédent, le raisonnement suivant est faux :
$\phi$ est une application linéaire injective de $G$ dans $\mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f))$.
$\phi$ est un isomorphisme car on est en dimension finie.
En effet, il faudrait pour conclure ainsi que $G$ et $\mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f))$ soient de même dimension finie, ce qui est précisément ce qu'on cherche à démontrer.
Il faut donc prouver la surjectivité en revenant à la définition.
Soit $h \in \mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f))$.

Soit $g \begin{cases} F \to E \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$ : bien défini car $h(x) \in \mathrm{Ker}\,(f) \subset E$.
La linéarité de $g$ découle directement de celle de $h$.
$\forall x \in F\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(h(x)) = 0$ car $h(x) \in \mathrm{Ker}\,(f)$
Donc $g \in G$.
De plus, on a :
$\forall x \in F\ \phi(g)(x) = g(x) = h(x)$ ie $\phi(g) = h$ Donc $\phi$ est surjective.
$\phi$ est donc un isomorphisme de $G$ sur $\mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f))$.
On en déduit :
$\dim(G) = \dim(\mathcal{L}(F, \mathrm{Ker}\,(f)) = \dim(F) \times \dim(\mathrm{Ker}\,(f)$
Finalement, avec la formule du rang :
$\dim(G) = p(n-r)$.
Une solution matricielle sera vue plus tard.

**Exercice 6**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev.
Soient $F$ et $G$ deux sev de $E$.
Donner une CNS portant sur $F$ et $G$ pour que $F \cup G$ soit un sev de $E$.
Proposer des généralisations de l'exercice.

**Correction**
La CNS cherchée est $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$.
Cette condition est suffisante :
Si $F$ est inclus dans $G$ alors $F \cup G = G$ est un sev de $E$.
Si $G$ est inclus dans $F$ alors $F \cup G = F$ est un sev de $E$.
Cette condition est nécessaire :
On suppose que $F \cup G$ est un sev de $E$.
On veut montrer que $F$ est inclus dans $G$ ou que $G$ est inclus dans $F$.
On raisonne par l'absurde ie on suppose que $F$ n'est pas inclus dans $G$ et que $G$ n'est pas inclus dans $F$.
Par conséquent, il existe $x_F \in F \setminus G$ et $x_G \in G \setminus F$.
$x_F$ et $x_G$ appartiennent à $F \cup G$ sev de $E$ donc $x_F + x_G \in F \cup G$.
Si $x_F + x_G \in F$ alors $x_G = (x_F + x_G \in F) + (-x_F \in F) \in F$ : absurde
Si $x_F + x_G \in G$ alors $x_F = (x_F + x_G \in G) + (-x_G \in G) \in G$ : absurde
On a bien $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$.

Plus généralement soient $F_1, \ldots, F_n$ $n$ sev de $E$.
Si l'un des $F_i$, notons le $F_{i_0}$, contient tous les autres alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i = F_{i_0}$ est un sev de $E$.
Réciproquement supposons que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un sev de $E$.
On cherche à montrer que l'un des $F_i$ contient tous les autres.
Si $\displaystyle\bigcup_{i=2}^{n} F_i \subset F_1$ alors $F_1$ contient tous les autres et on a terminé.
On suppose donc que $\displaystyle\bigcup_{i=2}^{n} F_i$ n'est pas inclus dans $F_1$.

Si $F_1$ n'est pas contenu dans $\bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$ alors :

il existe $x_1 \in F_1 \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$ et $y \in \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i \setminus F_1$.

$x_1$ et $y$ appartiennent à $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ sev de $E$ donc pour tout $k$ compris entre 0 et $n$, $kx_1 + y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$
ie pour tout $k$ compris entre 0 et $n$, il existe $\sigma(k)$ compris entre 1 et $n$ tel que $kx_1 + y \in F_{\sigma(k)}$.
Il existe $k$ et $l \in [\![0; n]\!]$ tels que $k \neq l$ et $\sigma(k) = \sigma(l)$.
On a donc $(k - l)x_1 = (kx_1 + y) - (lx_1 + y) \in F_{\sigma(k)}$ car $F_{\sigma(k)}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
$k - l \neq 0$ donc $x_1 \in F_{\sigma(k)}$.
Or $x_1 \notin \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$ donc $\sigma(k) = 1$.
On a alors $kx_1 + y \in F_1$ donc $y = (kx_1 + y \in F_1) + (-kx_1 \in F_1) \in F_1$ : absurde
On a donc $F_1 \subset \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$.
On a alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = \bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$
Donc $\bigcup\limits_{i=2}^{n} F_i$ est un sev de $E$.
Il faudrait donc reprendre le raisonnement en rédigeant une récurrence sur $n$ mais on a prouvé :

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \text{ sev de } E \iff \exists i_0 \in [\![1; n]\!] \text{ tq } \forall i \in [\![1; n]\!]\ F_i \subset F_{i_0}$$

Par contre, la situation change avec un nombre infini de sev :
$\mathbb{K}[X] = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$ mais il n'existe pas de $\mathbb{K}_{n_0}[X]$ qui contienne tous les autres.