ALGEBRE LINEAIRE
TD
2024-2025
Chapitre 4
Correction

941

1 Trigonalisation

Exercice 1 *(Mines 2021)*

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. CNS pour que M soit diagonalisable.
2. Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calcul de M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Correction
La matrice M est symétrique donc si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, elle est diagonalisable.
Par contre, dans le cas général on ne peut rien dire a priori.

1. Plusieurs solutions sont possibles, la remarque fondamentale étant que M est de rang 1.
   Je propose la solution suivante :
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   $M = XX^T$
   Par conséquent :
   $\forall Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})\ MY = (XX^T)Y = X(X^TY) = (X^TY)X = (xx_1 + yy_1 + zz_1)\, X$
   X étant non nul, $\mathrm{Ker}\,(M) = \left\{ Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \text{ tq } xx_1 + yy_1 + zz_1 \right\}$.
   0 est donc valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est de dimension 2, la multiplicité au moins 2.
   Il nous manque une valeur propre, c'est $\mathrm{tr}\,(M) = x^2 + y^2 + z^2$.
   On en déduit :
   M diagonalisable $\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

2. On suppose donc $x^2+y^2+z^2=0$.
$MX=(x^2+y^2+z^2)X=0$: $X\in\mathrm{Ker}\,(M)$.
X est non nul et $\mathrm{Ker}\,(M)$ est de dimension 2 donc il existe $Y\in\mathrm{Ker}\,(M)$ tel que (X,Y) est une base de $\mathrm{Ker}\,(M)$.
$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ donc $Z=\begin{pmatrix}1/x\\0\\0\end{pmatrix}$ ou $Z=\begin{pmatrix}0\\1/y\\0\end{pmatrix}$ ou $Z=\begin{pmatrix}0\\0\\1/z\end{pmatrix}$ est bien défini et c'est un antécédent de X.
Montrons que (X,Y,Z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tel que $aX+bY+cZ=0$.
On multiplie par M à gauche : il reste $cX=0$ avec $X\neq0$ donc $c=0$.
Il reste $aX+bY=0$ avec (X,Y) libre donc $a=b=0$.
(X,Y,Z) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc (X,Y,Z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à (X,Y,Z) alors $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
3. $M^2=(XX^T)(XX^T)=X(X^TX)X^T$ avec $X^TX\in\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ qu'on peut identifier à $\mathbb{C}$.
Donc $M^2=(X^TX)XX^T=(x^2+y^2+z^2)M$.
On peut en déduire par récurrence :
$\forall p\in\mathbb{N}^*\ M^p=(x^2+y^2+z^2)^{p-1}M$

Exercice 2

Soient $a>0$ et $S_a:\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe :
$S_a(f):x\mapsto\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Soit $f:t\mapsto\sin\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)$.
Calculer $S_a(f)$.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que S_a n'est ni injective ni surjective.
4. Soit $n\in\mathbb{N}$.
Montrer que S_a induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on notera s_a.
5. Montrer que s_a est un automorphisme.
6. Montrer que dans une base bien choisie la matrice de s_a est triangulaire supérieure.
7. L'endomorphisme s_a est-il diagonalisable ?

Correction

1.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ S_a(f)(x) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\left[\frac{-a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{a}\right)\right]_{x-a}^{x+a} \\ &= \frac{-1}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi(x+a)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(x-a)}{a}\right)\right) \\ &= \frac{-1}{2\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{a}+\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{a}-\pi\right)\right) \\ &= 0 \text{ car cos est } 2\pi \text{ périodique}\end{aligned}$$

$S_a(f)$ est la fonction nulle.

2. Soit F une primitive de f : c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ S_a(f)(x) = \dfrac{F(x+a)-F(x-a)}{2a}$
et sous cette forme, $S_a(f)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. **Attention :** la linéarité de S_a n'a pas encore été justifiée.
Soit $f : t \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)$.
$S_a(f) = S_a(0)$ avec $f_a \neq 0$: S_a n'est pas injective.
$S_a(\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc S_a n'est pas surjective.

4. On vérifie facilement avec la linéarité de l'intégrale que S_a est linéaire.
On montre ensuite que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $S_a(P)$ est aussi un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
Pour ce faire le plus simple est de calculer $S_a(X^k)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ S_a(f)(x) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{x-a}^{x+a} \\ &= \frac{1}{2a(k+1)}\left((x+a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2a(k+1)}\left(x^{k+1} + (k+1)ax^k + \dots - x^{k+1} - (k+1)x^k(-a) - \dots\right) = x^k + \dots\end{aligned}$$

Donc :
$S_a(X^k) = \dfrac{1}{2a(k+1)}\left((X+a)^{k+1} - (X-a)^{k+1}\right) = X^k + \dots$
On a donc :
$\forall k \in [\![0;n]\!]\ S_a(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$
Donc $S_a(\mathbb{R}_n[X]) = \mathrm{Vect}(S_a(1), \dots, S_a(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$

5. On déduit de la question précédente que la matrice de s_a dans la base canonique est triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale.Elle est donc inversible et s_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. La base canonique convient.

7. Il n'y a que des 1 sur la diagonale. Donc $Sp(s_a) = \{1\}$ et :
s_a diagonalisable $\iff s_a = id_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Attention :
$s_a(1) = 1$
$s_a(X) = X$

Donc si $n = 0$ ou 1 alors $s_a = id_{\mathbb{R}_n[X]}$ et s_a diagonalisable.

Par contre $s_a(X^2) = X^2 + \frac{a^2}{3} \neq X^2$

Exercice 3 *(Centrale 2009)*

On rappelle que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

1. Montrer que f est un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}\ f(z) = a\,z + b\,\overline{z}$$
2. Exprimer simplement le déterminant de f.
3. Caractériser les $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$ trigonalisables.

Correction

1. On suppose que f est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}\ f(z) = a\,z + b\,\overline{z}$$
Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned} f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= a\,(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + b\left(\overline{\lambda_1}\overline{z_1} + \overline{\lambda_2}\overline{z_2}\right) \\ &= a\,(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + b\,(\lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2}) \\ &= \lambda_1(a z_1 + b\overline{z_1}) + \lambda_2(a z_2 + b\overline{z_2}) = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) \end{aligned}$$
f est bien $\mathbb{R}$-linéaire.

Réciproquement, on suppose que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}\ f(z) &= f(x + iy) = x f(1) + y f(i) \\ &= \frac{z + \overline{z}}{2} f(1) + \frac{z - \overline{z}}{2i} f(i) \\ &= \frac{1}{2}\,(f(1) - i f(i))\,z + \frac{1}{2}\,(f(1) + i f(i))\,\overline{z} \\ &\quad \text{de la forme } az + b\overline{z} \end{aligned}$$

2. On note a_x la partie réelle de a, a_y sa partie imaginaire.
On note b_x la partie réelle de b, b_y sa partie imaginaire.
$f(1) = a + b = (a_x + b_x) + i(a_y + b_y)$
$f(i) = (a - b)i = i(a_x - b_x) - (a_y - b_y)$
$Mat_{(1,i)} f = \begin{pmatrix} a_x + b_x & b_y - a_y \\ a_y + b_y & a_x - b_x \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} \det f &= (a_x + b_x)(a_x - b_x) - (b_y - a_y)(b_y + a_y) \\ &= a_x^2 - b_x^2 - b_y^2 + a_y^2 \\ &= |a|^2 - |b|^2 \end{aligned}$$

3. $\chi_f = X^2 - \operatorname{tr}(f)X + \det(f) = X^2 - 2a_x X + |a|^2 - |b|^2$

$$\begin{aligned} f \text{ trigonalisable} &\iff \chi_f \text{ scindé sur } \mathbb{R} \\ &\iff \Delta \geq 0 \\ &\iff 4a_x^2 - 4|a|^2 + 4|b|^2 \\ &\iff 4a_y^2 + 4|b|^2 \\ &\iff |b|^2 \geq a_y^2 \\ &\iff |b| \geq |\Im m(a)| \end{aligned}$$

Exercice 4 *(CCP 2013)*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (E_1, E_2, E_3).

1. On admet que 3 et -1 sont les seules valeurs propres de f.
   f est-il bijectif ? Donner une base de ses sous-espaces propres. A est-elle diagonalisable ?
2. On choisit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = E_1 + \lambda e_1$. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   Comment choisir λ et μ pour que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Correction

1. 0 n'est pas valeur propre de f donc f est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, f est bijectif.
   Après résolution des systèmes appropriés, on trouve : $E_3(f) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   A n'est pas diagonalisable : la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à la taille de la matrice.
2. Le déterminant dans la base canonique de la famille $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 1+\lambda \\ 2 & 2\mu & 2\lambda \\ 2 & \mu & 2\lambda \end{vmatrix} &= \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ 2 & 2 & 2\lambda \\ 2 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - \lambda C_1 \\ &= \mu \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mu \end{aligned}$$

   $\mathcal{B}$ base $\iff \mu \neq 0$.
   Vue la dernière colonne, λ doit être choisi pour que

$E_1 + \lambda e_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
$\lambda = -1$ convient.
On cherche ensuite μ tel que $Ae_2 = -e_2 + E_1 - e_1$ ie :
$\mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\mu = -1$ convient.
$A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Exercice 5 *(X 2015)*

Soit A une matrice carrée 2×2 complexe, inversible.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p soit diagonalisable.
Montrer que A est diagonalisable.

Correction
Dans le programme en vigueur en 2015, la solution était la suivante :
On suppose que A n'est pas diagonalisable.
A a donc une valeur propre double λ.
$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) < mul(\lambda) = 2$ donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.
Soit X_1 un vecteur non nul de $E_\lambda(A)$).
On complète (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathbb{C}^2$.
On note P la matrice de passage de Can vers (X_1, X_2).
$A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
λ étant valeur propre double des deux côtés, on a $\beta = \lambda$.
A n'est pas diagonalisable donc $\alpha \neq 0$.
Classiquement (on calcule les premiers termes, on intuite la forme de T^p et on rédige une récurrence) :
$T^p = \begin{pmatrix} \lambda^p & p\alpha\lambda^{p-1} \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix}$
A^p est diagonalisable donc T^p aussi et $p\alpha\lambda^{p-1} = 0$.
p et α sont non nuls donc $\lambda = 0$, ce qui contredit l'inversibilité de A.
On aboutit à une contradiction donc A est diagonalisable.

Dans le programme actuel, on peut énoncer :
Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
Si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq A^p est diagonalisable alors A est diagonalisable.
On suppose A^p diagonalisable.
Le polynôme $R = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^p)} (X - \lambda)$ annule A^p.
A est inversible donc A^p est inversible et $0 \notin \mathrm{Sp}(A^p)$.
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^p)$, $X^p - \lambda$ est donc scindé à racines simples.
De plus si λ et $\mu \in \mathrm{Sp}(A^p)$ avec $\lambda \neq \mu$, les polynôme $X^p - \lambda$ et $X^p - \mu$ n'ont pas de racine en commun.

Donc le polynôme $R(X^p) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^p)} (X^p - \lambda)$ est scindé à racines simples. Mais ce polynôme annule A donc A est diagonalisable.

Exercice 6 *(X 2011)*

Soit A une matrice carrée 2×2 complexe, inversible et telle que les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((A^{-1})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module égal à 1.

Correction

1. On suppose que A n'est pas diagonalisable.
   A a donc une valeur propre double λ.
   $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) < mul(\lambda) = 2$ donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.
   Soit X_1 un vecteur non nul de $E_\lambda(A))$.
   On complète (X_1) en une base (X_1, X_2) de $\mathbb{C}^2$.
   On note P la matrice de passage de Can vers (X_1, X_2).
   $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
   λ étant valeur propre double des deux côtés, on a $\beta = \lambda$.
   A n'est pas diagonalisable donc $\alpha \neq 0$.
   Classiquement (on calcule les premiers termes, on intuite la forme de T^n et on rédige une récurrence) :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\alpha\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$
   On inverse T, on trouve : $T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\alpha\lambda^{-2} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ et on vérifie que c'est la formule précédente avec $n = -1$.
   On calcule ensuite $(T^{-1})^n$
   $(T^{-1})^n = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\alpha\lambda^{-2} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\lambda^{-1})^n & -n\alpha\lambda^{-2}(\lambda^{-1})^{n-1} \\ 0 & (\lambda^{-1})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & -n\alpha\lambda^{-n-1} \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$
   On aboutit à :
   $\forall n \in \mathbb{Z}\ T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\alpha\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$
   $(T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant bornée (à détailler ?) la famille $(n\alpha\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.
   Cela n'est possible que pour $\alpha = 0$ (faire tendre n vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le module de λ)
   On aboutit à une contradiction donc A est diagonalisable.

2. Il existe P inversible et deux complexes λ_1 et λ_2 tels que $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   $\forall n \in \mathbb{Z}\ A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
   $(A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée donc les familles $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont bornées.
   On en déduit $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.