

Thermo 3 : Transferts thermiques

I. Différents modes de transferts thermiques

Il existe trois différents modes de transfert thermique : la conduction, la convection et le rayonnement thermique.

1. Conduction thermique

Lorsque l'on place une casserole sur une plaque chauffante (par effet Joule), l'énergie thermique est transmise de proche en proche dans le milieu matériel immobile, c'est la **conduction thermique**. Elle se produit dans tous les solides par vibration du réseau cristallin et dans les fluides (liquide ou gaz) sous forme d'énergie cinétique microscopique (agitation désordonnée de molécule : mouvement brownien $U = \frac{1}{2} N_{dal} k_B T = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$). C'est le seul mécanisme dans les solides homogènes et opaques.

2. Convection thermique

L'eau chauffée dans la casserole se met en mouvement macroscopiquement et décrit des cycles de convection, le transfert thermique se fait alors par **convection thermique**. En fait, dans le fluide, une variation de température modifie localement la masse volumique du fluide qui devient plus légère et s'élève. Le fluide peut aussi être mis en mouvement artificiellement par pompage ou agitation mécanique. Le fluide est dans ces deux cas, un vecteur de transfert de l'énergie thermique.

3. Rayonnement thermique

Un corps chaud (tel que le soleil) émet un **rayonnement électromagnétique** qui transporte de l'énergie susceptible d'échauffer le corps qui la reçoit. Il s'agit du seul mode de transfert thermique qui ne nécessite pas de milieu matériel et peut donc se produire dans le vide.

En général, le transfert thermique se fait simultanément par les trois modes.

II. Conduction ou diffusion thermique

1. Loi de Fourier

Considérons un corps dont la température T ne dépend que la coordonnée x et du temps. (exemple barre métallique chauffée à une extrémité).

La quantité d'énergie δQ qui traverse par conduction thermique une surface élémentaire $d\vec{S}$ pendant dt est proportionnelle à dS et dt , on définit le **vecteur densité d'énergie thermique** \vec{j}_{th} (en $W \cdot m^{-2}$) par $\delta^2 Q = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} dt$ et le **flux thermique** par :

$$d\mathcal{P}_{th} = \frac{\delta^2 Q}{dt} = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \mathcal{P}_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

Dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique, en présence d'une inhomogénéité de température, on constate que la conduction thermique :

- va des zones chaudes vers les zones froides
- est proportionnelle à la surface sur laquelle on calcule le flux
- est proportionnelle aux variations spatiales de température

d'où, on déduit la **loi de Fourier**, à trois dimensions : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ avec λ la **conductivité thermique** en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

Matériaux à 20°C	λ en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Cuivre	390
Fer	82
Verre – béton	≈ 1
Bois	0,25
Polystyrène	0,004
Eau	0,6
Air (1 bar, 20°C)	0,026

Conductivité thermique

2. Analogie entre les lois de Fick, de Fourier et d'Ohm

Diffusion de particules	Diffusion thermique	Conduction électrique
$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$; en $m^{-2} s^{-1}$	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$; en $W \cdot m^{-2}$	$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$; en $A \cdot m^{-2}$
$\Phi_n = \iint \vec{j}_n \cdot d\vec{S}$	$\Phi_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$	$i = \iint \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$
Densité moléculaire n en m^{-3}	Température T en K	Potentiel électrique V en V
Constante de diffusion D	Conductivité thermique λ	Conductivité électrique γ
Flux de particules Φ_n	Flux thermique Φ_{th}	Courant électrique i

Analogie entre phénomènes de transport

Les lois de Fick, de Fourier et d'Ohm sont phénoménologiques, elles représentent des phénomènes analogues. En effet, dans un métal, les électrons de conduction participent aussi à la conduction électrique. $\vec{j}_e \propto \langle \vec{v}_e \rangle$ et $\vec{j}_{th} \propto \langle \vec{v}_e^2 \rangle$

3. Équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur

Bilan thermique unidimensionnel

Considérons une tige homogène calorifugée latéralement de masse volumique μ , de capacité thermique massique c_p et de conductivité thermique λ . On étudie l'évolution de la température par un bilan enthalpique.

On peut établir (à savoir démontrer) : $\mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} = 0$

Équation de la chaleur avec terme source

On définit p_{th} la puissance thermique dégagée ou consommée **localement** par unité de volume dans le milieu, il peut s'agir d'un effet Joule, d'une réaction chimique ou nucléaire. On peut ainsi généraliser l'**équation de la chaleur** (à savoir démontrer):

$$\underbrace{\mu c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} = \underbrace{\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x^2}}_{\text{variation spatiale}} + \underbrace{p_{th}}_{\text{terme source}}$$

III. Résolution de l'équation de la chaleur

1. Diffusion thermique dans une barre calorifugée

Étudions l'évolution de la température dans une barre homogène calorifugée de longueur L , de section S , en l'absence de source de chaleur. Il s'agit d'un problème de diffusion à une dimension, la température obéit à l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (*)$$

Les conditions aux limites sont liées à l'absence de flux thermique en $x = 0$ et $x = L$:

$$j_{th}(x = 0, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad j_{th}(x = L, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (**)$$

Et on prend comme conditions initiales, le profil de température affine tel que :

$$T(x, t = 0) = T_i(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} x$$

C'est pour résoudre ce genre de problème que J. Fourier a mis en place la décomposition en série de Fourier.

2. Solution stationnaire

En l'absence d'échange d'énergie avec l'extérieur, l'enthalpie totale doit rester constante et la conduction thermique va mener à l'homogénéisation de la température jusqu'à la température finale T_∞ .

Pour une transformation isobare, la conservation de l'enthalpie donne :

$$\Delta H = H(t = \infty) - H(t = 0) = Q = 0 \Rightarrow \int_0^L \mu c_p [T_\infty - T_i(x)] dx = 0 \Rightarrow T_\infty = \frac{1}{L} \int_0^L T_i(x) dx = \langle T_i \rangle_x$$

La température finale est alors la moyenne spatiale de la température initiale :

$$T_\infty = \frac{1}{L} \left[T_0 L + \frac{T_1 - T_0}{L} \frac{L^2}{2} \right] = \frac{T_1 + T_0}{2}$$

3. Solution en série de Fourier

4. Résistance thermique (régime stationnaire)

Considérons désormais que la barre est calorifugée latéralement et que ses extrémités sont maintenues aux températures (thermostat) $T(x = 0) = T_0$ et $T(x = L) = T_1$.

Après le régime transitoire et en l'absence de source de chaleur dans la barre, on a le flux thermique :

$$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad (*) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

On retrouve un profil affine du type : $T(x, t = 0) = T_i(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} x$ et le flux $\Phi_{th} = \lambda S \frac{T_0 - T_1}{L}$.

Il s'agit d'une relation analogue à la **loi d'Ohm intégrale** $U = V_0 - V_1 = Ri$

Déf : on définit donc une **résistance thermique** par $T_0 - T_1 = R_{th} \Phi_{th}$ avec dans le cas axial $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$
la résistance thermique dépend de la géométrie (L, S) et du matériau (λ). L'analogie avec l'électrocinétique permet aussi de définir des associations de **résistances en série** $R_{th}^{série} = R_{th1} + R_{th2}$ et **en parallèles** $R_{th}^{\parallel} = \frac{R_{th1} R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}$.

On peut ainsi modéliser le double vitrage (série verre/air/verre) ou comparer les pertes thermiques par une fenêtre ou un mur (en parallèle) dans une maison.

IV. Transfert thermique conducto-convectif

1. Position du problème

On va étudier l'échange thermique entre un corps solide et un fluide animé de mouvement convectif (exemple chauffage dans une grande pièce). Pour simplifier, supposons le problème à une dimension, tel que dans le demi-espace avec $x > 0$, un fluide est animé de mouvement de convection qui provoque une homogénéisation de la température. On a alors une température constante T_F .

En $x < 0$, on a une paroi avec une température T_P et un transfert par conduction vers le fluide.

On constate expérimentalement qu'il existe une **couche limite** d'épaisseur e (de quelques millimètres) qui présente, à cause de la conduction, un fort gradient thermique, que l'on modélisera de manière affine :

$$T(0 \leq x \leq e) = T_P + \frac{T_F - T_P}{e} x$$

2. Coefficient de transfert conducto-convectif

En régime stationnaire, la conservation du flux thermique le long de l'axe x impose, avec la loi de Fourier :

$$j_{th} = -\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{paroi}} = -\lambda_F \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{couche limite}} = -\lambda_F \frac{T_F - T_P}{e}$$

Pour une section d'aire S , on associe un flux conducto-convectif $\Phi_{cc} = j_{th} S$ correspondant au transfert entre la paroi et le fluide et un flux surfacique $\varphi_{cc} = j_{th} = -\lambda_F \frac{T_F - T_P}{e}$.

Le transfert conducto-convectif dépend donc des conditions expérimentales par l'épaisseur e de la couche limite, la nature du fluide et la différence de température.

Déf : on pose alors h le **coefficient de transfert conducto-convectif** (ou **coefficient de Newton** en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$) tel que :

$$\varphi_{cc} = h(T_P - T_F)$$

Entre un gaz et un solide $h \sim 10 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ et entre un liquide et un solide $h \sim 100 W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

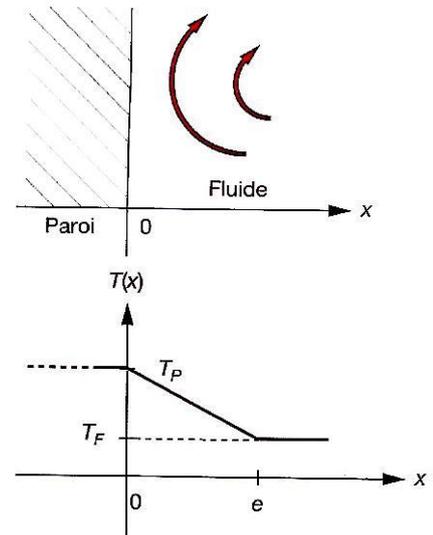
On en déduit aussi la **résistance de conducto-convection** $R_{cc} = \frac{T_P - T_F}{\Phi_{cc}} = \frac{1}{hS}$ où S est la surface d'échange.

3. Ailette de refroidissement

On se propose d'étudier, à titre d'exemple, le cas d'ailette de refroidissement faisant intervenir les phénomènes de conduction et de conducto-convection en régime stationnaire.

Il s'agit d'une tige cylindrique de rayon R , d'axe Ox , de conductivité λ en contact pour l'extrémité $x = 0$ avec une paroi à la température T_0 constante et sur le reste de sa surface avec l'atmosphère de température T_F constante. Le flux conducto-convectif est caractérisé par un coefficient de transfert h .

On cherche à définir l'équation différentielle régissant la température, les conditions aux limites puis le flux thermique évacué par l'ailette.



V. Introduction au rayonnement thermique

1. Flux surfacique

Considérons une onde électromagnétique de puissance P , reçue par un corps quelconque (transparent ou opaque), de surface S , on définit le flux surfacique φ tel que :

$$P = \iint_S \varphi dS$$

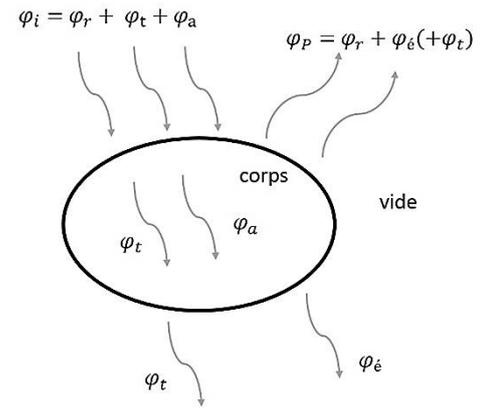
Différents phénomènes peuvent avoir lieu pour un flux incident :

$$\varphi_i = \varphi_r + \varphi_t + \varphi_a$$

- Une fraction du rayonnement peut-être réfléchi φ_r (sauf corps noir)
- Une fraction peut-être absorbée par le corps φ_a (sauf corps parfaitement transparent)
- Une fraction peut-être transmise φ_t (sauf corps noir ou opaque)

De plus, l'agitation thermique des particules à la surface du corps est responsable de l'émission d'une onde électromagnétique, ce mouvement étant désordonné, l'onde n'aura pas les propriétés (direction, polarisation, distribution spectrale) de l'onde incidente ou du rayonnement dipolaire. Il s'agit du **rayonnement thermique** auquel nous associerons le flux surfacique **émis** φ_e .

Le flux surfacique partant du corps est alors $\varphi_p = \varphi_r + \varphi_t + \varphi_e$.



2. Loi de Planck

Le rayonnement thermique est isotrope, il peut être obtenu expérimentalement (de manière isolée) en analysant le rayonnement issu d'un petit orifice dans une cavité opaque à l'équilibre thermodynamique à la température T et à l'**équilibre radiatif**, c'est-à-dire tel que les flux incident et partant de la surface se compensent :

$$\boxed{\varphi_i = \varphi_p} \Leftrightarrow \boxed{\varphi_a = \varphi_e} \text{ car } \varphi_t = 0$$

On observe alors que la répartition en longueur d'onde λ ou distribution spectrale du rayonnement d'équilibre thermique s'exprime selon la **loi de Planck** :

$$d\varphi(\lambda) = g(\lambda)d\lambda \text{ avec } \boxed{g(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}}$$

$c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	célérité dans le vide	\rightarrow relativité restreinte et EM
pour : $h = 6,62.10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	constante de Planck	\rightarrow quantique
$k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	constante de Boltzmann	\rightarrow physique statistique

Formule approchée de Rayleigh-Jones

L'approximation de la loi de Planck pour les basses fréquences (hautes longueurs d'onde) s'obtient par le développement

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T} \text{ d'où : } g(\lambda) \approx \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4}$$

La constante h n'apparaît pas pour les grandes longueurs d'onde.

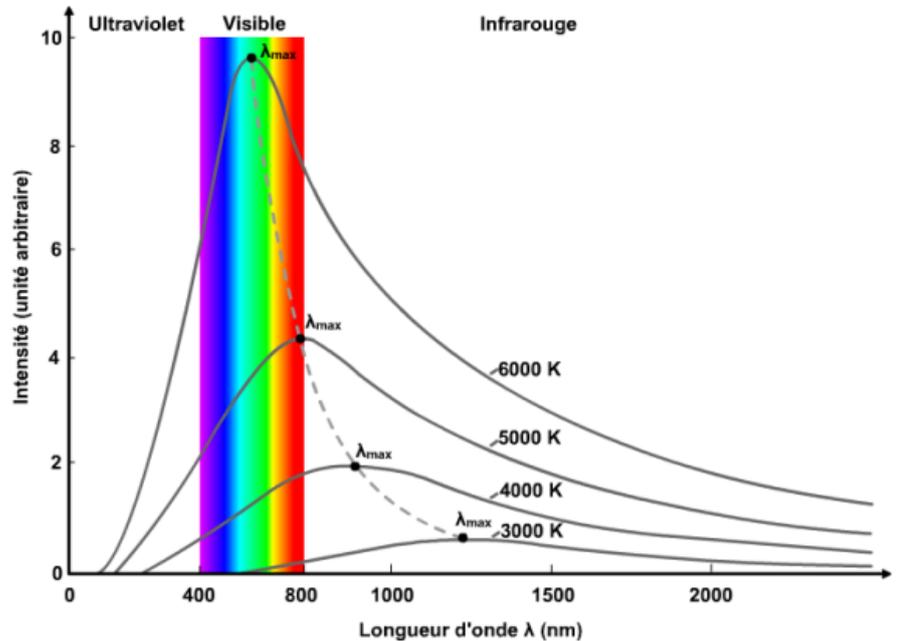
En pratique, pour $T = 3000 \text{ K}$ (lampe à filament de tungstène W), on a $hc = \lambda k_B T$ si $\lambda = 1 \mu\text{m}$ cette formule est donc acceptable jusqu'au domaine des infrarouges.

À haute fréquence, l'utilisation de cette loi donne lieu à une divergence de la distribution spectrale appelée catastrophe ultraviolette et à l'origine de la remise en question de cette loi par Planck et de la naissance de la mécanique quantique.

3. Loi de déplacement de Wien

Examinons la courbe $\lambda \mapsto g(\lambda, T)$ pour différentes températures T , on observe :

- À T fixé, un maximum du profil spectral pour une longueur d'onde λ_M .
- À T fixé, la densité spectrale tend vers zéro quand on s'éloigne de λ_M .
- À λ fixé, la loi est croissante avec la température, et en intégrant sur tout le spectre, on constate que le flux surfacique croît avec la température.



Pour trouver λ_M , posons $x = \frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, alors : $g(x) = \frac{Kx^5}{e^x - 1}$, le maximum est donné par :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5Kx^4(e^x - 1) - Kx^4xe^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \Rightarrow e^x(5 - x) - 5 = 0$$

Une résolution numérique donne $x \approx 4,964$ et après changement de variable, on a la **loi de déplacement de Wien** :

$$\boxed{\lambda_M T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} = 2\,898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}}$$

Ce maximum est indépendant du matériau et la longueur d'onde informe sur la température du corps. Cela permet de connaître la température d'un métal chauffé ou la température d'une étoile.

4. Loi de Stefan

Le flux surfacique incident total du rayonnement thermique s'obtient par intégration de la densité spectrale et donne la

loi de Stefan, avec $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$:

$$\varphi_i = \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda=0}^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} = \frac{2\pi(k_B T)^4}{h^3 c^2} \int_{x=0}^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sigma T^4$$

$$\int_{x=0}^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(3 + 1) \cdot \zeta(3 + 1) = 3! \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \text{ avec } \begin{cases} \text{Euler } \Gamma(n + 1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{Riemann } \zeta(n) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^n} \end{cases}$$

On en déduit $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ et $\boxed{\varphi_i = \sigma T^4}$

Le flux incident est proportionnel à la puissance quatrième de la température.

Ordres de grandeur :

T	λ_M	φ_i	Cas pratiques
2,7 K	1 mm onde radio	$3 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	Rayonnement fossile de l'Univers
300 K	10 μm infrarouge (IR)	$400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	Température ambiante
2 800 K	1 μm proche IR et visible	$4 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$	Lampe à filament (W) 9,5% dans le visible
5 800 K	500 nm jaune, visible	$64 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$	Rayonnement solaire

5. Corps noir

Un **corps noir** est un corps opaque qui absorbe intégralement tout rayonnement incident quel que soit la longueur d'onde et la direction. On a donc $\varphi_t = 0 = \varphi_r$ donc $\varphi_i = \varphi_a$ et $\varphi_p = \varphi_\epsilon$.

Pour un corps noir isotherme à la température T , son émission thermique est analogue au cas de l'équilibre thermique $\varphi_i = \varphi_p = \varphi_\epsilon$ alors :

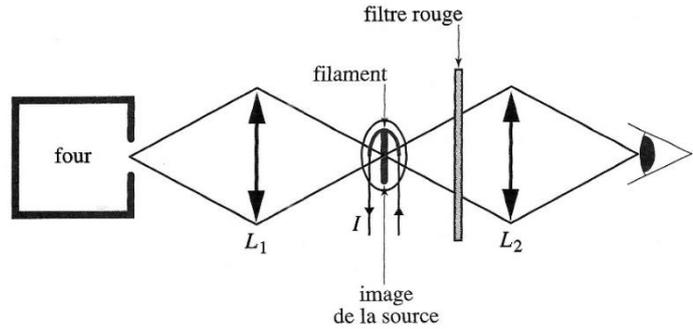
$$\boxed{\varphi_\epsilon = \sigma T^4}$$

Application pratique :

Des appareils tels que les photopiles ou le pyromètre à disparition de filament permettent d'obtenir la température à partir de la loi de Wien.

À l'aide d'un dispositif optique, on superpose l'image d'un objet (four) dont on veut connaître la température et l'image d'un filament (résistance étalonnée) dont on fait varier la couleur en changeant le courant. Quand le filament et le corps noir ont la même couleur, ils ont la même température. On déduit la température de la relation liant λ_M, T et le courant d'alimentation.

Une application plus récente est la caméra infrarouge qui permet, par exemple, de repérer les fuites thermiques et d'améliorer l'isolation. En fonction de la longueur d'onde de chaque pixel, on déduit la température et un code de couleur permet de représenter les zones chaudes (blanche, jaune, rouge) ou froide (bleu, violet, noir).



Doc. 22. Pyromètre à disparition de filament. L'objectif L_1 conjugue la source (l'orifice percé dans la porte du four) et le plan du filament. L'œil vise dans le plan commun de l'image de la source et du filament grâce à l'oculaire L_2 .

Si l'intensité I est trop faible, le filament apparaît sombre sur fond clair.

Si l'intensité I est trop importante, le filament apparaît clair sur fond sombre.



Démonstrations et notions à maîtriser :

- Opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes
- Loi de Fourier : $\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(M, t))$

■ Démonstration de l'équation de diffusion thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{th}$ et $\mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_{th}$

- Définition de la résistance thermique et son calcul dans les géométries classiques
- Notion de rayonnement thermique et de flux

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q	Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur \vec{j}_Q .
Premier principe de la thermodynamique.	Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne. Utiliser des associations de résistances thermiques.
Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.	Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la relation de Newton $\delta Q = h(T_s - T_a) dS dt$ fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.
Approche descriptive du rayonnement du corps noir : loi de Wien, loi de Stefan. Effet de serre. Albédo	Utiliser les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan pour expliquer qualitativement l'effet de serre.