

# Ondes électromagnétiques 1 :

## Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

Ce chapitre est consacré aux ondes électromagnétiques se propageant dans le vide. On suppose donc que l'espace est vide de source mais qu'il existe un champ électromagnétique.

### I. Équation de propagation : équation de d'Alembert

#### 1. Équation de d'Alembert

Les champs électrique et magnétique satisfont dans le vide, à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$$

Il s'agit de l'équation de **propagation** d'une onde électromagnétique dans le vide à la vitesse  $c \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  (célérité de la lumière).

#### 2. Solution générale : ondes progressives

On considère une équation de d'Alembert à une dimension pour la fonction  $(x, t) \mapsto \psi(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre le problème, on effectue le changement de variable suivant :

*démo pas à savoir*

$$\begin{cases} p = x - ct \\ q = x + ct \end{cases} \quad \text{c'est un difféomorphisme tel que} \quad \boxed{\forall (x, t), \psi(x, t) = f(p, q)}$$

On cherche à retrouver l'équation de d'Alembert pour  $f$ , on rappelle la différentielle de  $f$  :  $df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq$  ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial p} + c \frac{\partial f}{\partial q} \end{cases} \quad \text{puis pour la dérivé seconde :}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \end{aligned} \right. \quad (\alpha)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial t} - c \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (\beta)$$

Par simple différence de  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ , on montre que l'équation de d'Alembert se simplifie en :  $\boxed{4 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = 0}$

Les solutions générales de cette équation sont de la forme de  $f(p, q) = f_1(p) + f_2(q)$  avec  $f_1$  et  $f_2$ , deux fonctions dans  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

L'expression la plus générale des solutions de d'Alembert unidimensionnelle est ainsi :

$$\boxed{\psi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

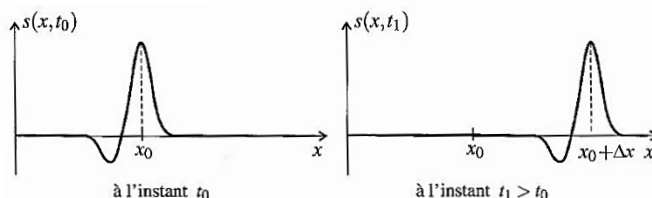
#### Interprétation physique

Considérons la solution  $\Psi(x, t) = f_1(x - ct)$ , si pour un temps ultérieur  $t + \Delta t$ , on a :

$$\Psi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \Psi(x, t) \Leftrightarrow f_1(x - ct + (\Delta x - c \Delta t)) = f_1(x - ct)$$

Il faut donc avoir  $\Delta x = c \Delta t$ , l'onde est identique en  $x$  à  $t$  et en  $x + \Delta x$  à une durée décalée de  $\Delta t = \Delta x / c$ .

Une onde de la forme  $f_1(x - ct)$  se propage, sans se déformer, à la vitesse  $c$  dans la direction des  $x$  croissants : c'est une **onde progressive**. De même, une onde de la forme de  $f_2(x + ct)$  se propage dans le sens des  $x$  décroissants.



## II. Structure d'une onde plane progressive dans le vide

### 1. Onde plane progressive (OPP)

Une **onde plane** est une solution d'une équation de propagation non constante prenant des valeurs uniformes sur tous les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{u}$ . Ces derniers sont appelés **plans d'onde**.

Les points  $M$  appartenant à un plan d'onde sont tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{cte}$  alors  $\Psi(M, t) = \text{cte}$ . Si on choisit un repère cartésien tel que  $\vec{u} = \vec{u}_x$  et  $M = (x, y, z)$  alors  $\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OM} = x$  et  $\Psi(x, t) = \text{cte}$ .

Une **onde plane progressive** est une solution d'une équation de propagation de la forme de :

$$\Psi(M, t) = f\left(t - \frac{\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{OM}}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

### 2. Structure de l'OPP électromagnétique dans le vide

Pour une onde électromagnétique plane progressive de direction de propagation selon  $Ox$ , on a, en coordonnées cartésiennes

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = E_x\left(t - \frac{x}{c}\right)\vec{u}_x + E_y\left(t - \frac{x}{c}\right)\vec{u}_y + E_z\left(t - \frac{x}{c}\right)\vec{u}_z \text{ et de même pour } \vec{B}(M, t) = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

À partir des équations de Maxwell, on peut montrer que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'une onde plane électromagnétique dans le vide sont perpendiculaires à la direction de propagation. On dit que l'onde est **transverse électrique** (TE) et **magnétique** (TM) (au total TEM).

De plus, on peut établir les relations de structure, pour une OPP dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \text{ et } \vec{E} = -c \vec{u} \wedge \vec{B}$$

En conclusion, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation :

La structure d'une OPP dans le vide est telle que le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  soit direct à tout instant et on a :  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ .

### 3. Lien entre l'OPP et une onde réelle

L'OPP est un modèle idéal qui décrit convenablement la structure locale de l'onde à grande distance de l'émetteur de cette onde. En effet, une onde réelle est plus complexe mais loin de l'émetteur, on peut considérer la source comme ponctuelle et l'onde comme sphérique. À grande distance, les plans tangents à la surface d'onde sphérique sont presque confondus avec la surface d'onde.

## III. Onde électromagnétique plane progressive et monochromatique

### 1. OPPM ou OPPH

Si l'onde varie de manière sinusoïdale avec l'espace et le temps, cette onde est dite **monochromatique ou harmonique**.

Pour une OPPM de direction de propagation  $\vec{u} = \vec{u}_x$ , de pulsation  $\omega$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi_{0x}\right]\vec{u}_x + E_{0y} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi_{0y}\right]\vec{u}_y + E_{0z} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) - \varphi_{0z}\right]\vec{u}_z$$

où  $E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, \varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$  sont des constantes d'amplitude (en  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et de phase à l'origine.

On introduit alors la **période temporelle**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , la **fréquence**  $f = \frac{1}{T}$ , le **vecteur d'onde**  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$  (dans le vide) et la longueur d'onde (ou période spatiale) :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = c T$$

L'OPPH présente ainsi une double périodicité spatiale et temporelle.

	Période	Fréquence	Pulsation
Temps	$T$ en s	$f$ ou $\nu$ en Hz	$\omega$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Espace	$\lambda$ en m	$\sigma$ en $\text{m}^{-1}$	$k$ en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$

Pour une direction de propagation quelconque  $\vec{u}$ , l'argument du cosinus se réécrit :

$$\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) - \varphi = \omega t - \frac{\omega x}{c} - \varphi = \omega t - kx - \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot x \vec{u}_x = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi$$

Alors les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'écrivent, pour une OPPM :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0x}] \vec{u}_x + E_{0y} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0y}] \vec{u}_y + E_{0z} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0z}] \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M, t) = B_{0x} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0x}] \vec{u}_x + B_{0y} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0y}] \vec{u}_y + B_{0z} \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} - \varphi_{0z}] \vec{u}_z$$

### Remarques

Une OPPM est un modèle idéalisé, comme cela a été vu en électronique, grâce à la linéarité des équations (ici de Maxwell), toute onde peut se décomposer comme une somme de sinusoïdes.

De plus, une OPPM n'a pas de réalité physique car elle n'a pas de début ni de fin (temporelle ou spatiale), cependant, par superposition d'OPPM d'amplitude et de pulsation variable, on peut reconstituer une onde réelle.

## 2. OPPM en notation complexe

Il est souvent plus pratique d'utiliser une notation complexe pour décrire un signal. On aura ainsi, pour  $\vec{OM} = \vec{r}$  :

$$\vec{E}(M, t) = \Re[\underline{\vec{E}}(M, t)] \text{ avec } \underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ et } \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \exp(-i\varphi_{0x}) \\ E_{0y} \exp(-i\varphi_{0y}) \\ E_{0z} \exp(-i\varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

Et de même pour  $\underline{\vec{B}}(M, t)$ .

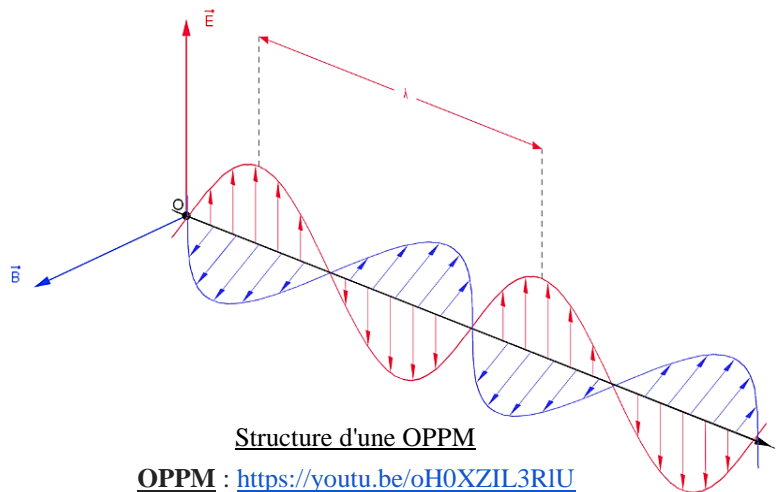
Comme la fonction cosinus est paire, on peut, par convention, choisir l'argument imaginaire opposée, on a alors :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

## 3. Équations de Maxwell dans le vide en complexe

Avec les notations complexes, on peut retrouver rapidement la **structure transverse électromagnétique** de l'OPPM ainsi que :

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}, \quad \underline{\vec{E}} = -c \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} \text{ et } \|\underline{\vec{B}}\| = \frac{\|\underline{\vec{E}}\|}{c} \text{ pour une OPPM dans le vide}$$



Alors, pour une particule de charge  $q$ , non relativiste (donc de vitesse  $v \ll c$ ) soumise à un champ électromagnétique, donc à la force de Lorentz, on a :

$$\frac{F_{\text{mag}}}{F_{\text{elec}}} = \frac{\|q \vec{v} \wedge \underline{\vec{B}}\|}{\|q \underline{\vec{E}}\|} \leq \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1$$

On peut donc négliger l'effet de la force magnétique, en général.

## 4. Spectre électromagnétique

La gamme de longueur d'onde ou de fréquence couverte par les ondes électromagnétiques est très vaste, elle s'étend sur environ 15 échelles de grandeurs de 1 MHz =  $10^6$  Hz (onde radio) à  $10^{11}$  Hz (rayon  $\gamma$ ).  $\rightsquigarrow$  doc. Spectre électromagnétique (dernière page)

On peut ainsi citer :

- Les **ondes hertziennes** comportant :
  - Les ondes radios (de 30 kHz à 900 MHz selon l'usage) : radio, télévision à modulation d'amplitude ou de fréquence.
  - Les micro-ondes (de 900 MHz à 300 GHz) pour la téléphonie mobile, le wifi et le four micro-onde (2,4 GHz  $\leftrightarrow$  10 cm), elles sont aussi appelées ondes centimétriques.Ces ondes sont générées par des dispositifs électriques macroscopiques, elles peuvent se propager dans l'air et parfois traverser l'ionosphère (communication avec les satellites).
- La **lumière** comportant :
  - Les infra-rouges IR (de 300 GHz  $\leftrightarrow$  1 mm à 800 nm) utilisées par les télécommandes, il s'agit d'une onde émise naturellement par rayonnement thermique pour un corps aux températures usuelles et affectant les rotations et vibrations des molécules.
  - Le visible (de 400 à 800 nm) est le domaine de l'optique visible par l'œil, il est lié aux transitions électroniques dans les molécules.
  - L'ultra-violet UV (de 10 à 400 nm) lié aussi aux transitions électroniques (exemple ozone et UV solaire). Il est responsable du bronzage et des coups de soleil.
- Les **rayons X** (de 1 pm (=  $10^{-12}$  m) à 1 nm) utilisés dans le domaine médical, le contrôle de bagage, le contrôle de défaut de structure, car il peut traverser la matière peu dense et se réfléchir sur la matière (cf. cristallographie). Ils sont obtenus en bombardant la matière par un faisceau d'électron.
- Les **rayons  $\gamma$**  (en dessous de 1 pm) sont produits par désexcitation de noyau atomique (radioactivité  $\gamma$ ) et utilisés pour la stérilisation du matériel médical et apparaissant dans certains phénomènes astronomiques ( $\gamma$  ray burst).

## IV. Solutions particulières de l'équation de d'Alembert : ondes stationnaires

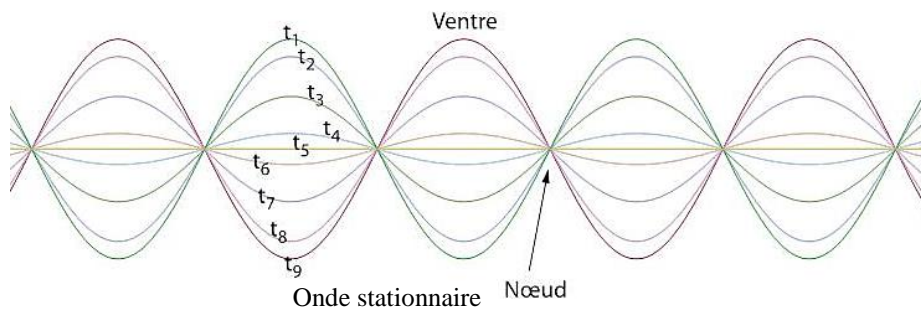
Il existe un autre type de solution à l'équation de d'Alembert pour lequel les variables spatiales et temporelles sont séparées.

### 1. Ondes stationnaires

Supposons qu'il existe des solutions à variables séparées de l'équation de d'Alembert, on peut alors établir des solutions en ondes stationnaires de la forme de  $\Psi(x, t) = D \sin(\omega t - \varphi) \sin(kx - \chi)$

### 2. Interprétation physique

Contrairement à l'onde progressive, l'onde stationnaire ne se propage pas. Elle oscille sur place d'où son nom, les nœuds sont stationnaires. C'est une onde plane (ne dépend que de  $x$ ) avec une amplitude de vibration uniforme (ici  $D$ )



Les points tels que la vibration est toujours nulle sont appelés des **nœuds** et les points d'amplitudes extrême sont des **ventres** de vibration. La distance entre deux nœuds ou deux ventres successifs est  $\lambda/2$ .

### 3. Lien entre les deux types de solutions

La solution en ondes progressives est la solution générale alors que l'onde stationnaire est un cas particulier qui peut être reliée à l'onde progressive. En effet, on a :

$$\Psi(x, t) = D \sin(\omega t - \varphi) \sin(kx - \chi) = \frac{D}{2} [\cos(\omega t - kx - \varphi + \chi) - \cos(\omega t + kx + \varphi + \chi)]$$

L'onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives monochromatiques de sens opposés de même amplitude, l'onde résultante ne se propage plus.

## V. Aspects énergétiques

Considérons une OPPM se propageant selon  $Oz$  (dans le sens  $z > 0$ ) alors, dans un repère cartésien  $\vec{E}(M, t) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$ , on choisit le repère tel que  $\vec{E}$  soit selon la direction fixe  $\vec{u}_x$ , d'où :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

Alors, le champ magnétique s'écrit (avec  $\vec{k} = \omega/c \vec{u}_z$ ) :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le champ  $\vec{B}$  a la même phase à l'origine que  $\vec{E}$  donc les mêmes nœuds de vibration (on prendra cette phase nulle dans la suite).

### 1. Énergie volumique électromagnétique

Comme, pour  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\Re(a \cdot b) \neq \Re(a) \cdot \Re(b)$ , on va repasser en notation réelle.

**Notation réelle** (à savoir faire)

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \text{ et } \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ \Rightarrow u_{EM}(M, t) &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \end{aligned}$$

Pour une OPPM, l'énergie est à moitié électrique et à moitié magnétique. Comme la fréquence des champs est, en général importante, les détecteurs ne sont sensibles qu'à la moyenne temporelle du signal.

On a ainsi :  $\langle u_{EM} \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$  cette valeur est indépendante du point de calcul  $M$ .

Cela montre aussi le caractère non physique d'une OPPM car pour tout l'espace, on a :  $\langle U_{EM} \rangle_T = \iiint_{\text{espace}} \langle u_{EM} \rangle_T dV \rightarrow \infty$

Une onde réelle est obtenue par superposition d'OPPM (de direction et fréquence variable).

**Notation complexe\***

$$\text{En notation complexe, on a : } \langle u_{EM} \rangle_T = \overset{\text{moyenne temporelle}}{\hat{T}} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

### 2. Vecteur de Poynting

**Notation réelle** (à savoir faire) Pour le calcul de la puissance rayonnée, on a :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} [E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \wedge E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y] = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$$\text{d'où } \boxed{\vec{\Pi}(M, t) = \varepsilon_0 c E^2(M, t) \vec{u}_z} \text{ et en moyenne } \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle_T = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_z}$$

**Notation complexe\***

On définit parfois le vecteur de Poynting complexe  $\vec{\Pi}$  tel que :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} = \frac{E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \wedge E_0^* e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_y}{2\mu_0 c} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_0|^2 \vec{u}_z \\ \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle_T &= \Re(\vec{\Pi}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z \end{aligned}$$

**L'intensité de l'onde  $\mathcal{J}$  (ou éclairement)** est définie par la moyenne temporelle de la composante du vecteur de Poynting selon la direction de propagation :

$$\boxed{\mathcal{J} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_0^2} \text{ en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

### 3. Bilan énergétique et vitesse de propagation de l'énergie

On peut noter que  $\vec{\Pi} = c u_{EM} \vec{u}_z$ , cela va permettre de démontrer que la vitesse de l'énergie  $v_E$  de l'onde est  $\vec{v}_E = c \vec{u}_z$ .

En effet, calculons l'énergie du champ de deux manières, pour une onde traversant la surface  $d\vec{S}$  entre  $t$  et  $t + dt$ .

- Avec le vecteur de Poynting, l'énergie traversant la surface est :  $d^2 U_{EM} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$
- Et par l'énergie volumique, cette énergie contenue dans le volume  $dV = d\vec{S} \cdot \vec{v}_E dt$  donne  $d^2 U_{EM} = u_{EM}(M, t) d\vec{S} \cdot \vec{v}_E dt$

D'où par identification, on déduit : 
$$\vec{v}_E = \frac{\vec{\Pi}(M, t)}{u_{EM}(M, t)} = c \vec{u}_z$$

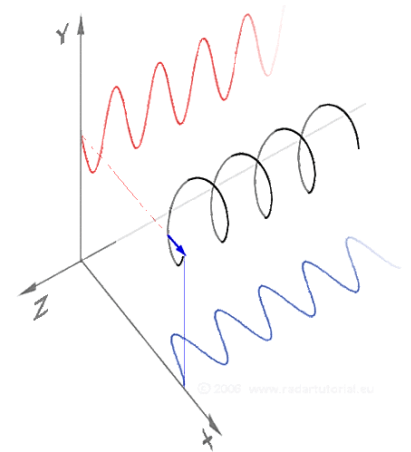
L'énergie électromagnétique se propage dans le vide à la vitesse de la lumière.

## VI. Polarisation des OPPM/OPPH

### 1. Polarisation

Dans le vide, l'OPPM est transverse électrique et magnétique, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont contenus à chaque instant dans le plan perpendiculaire à sa direction de propagation.

L'étude de la polarisation de l'onde électromagnétique consiste à suivre l'évolution du champ électrique dans un plan normal à sa direction de propagation. On étudie l'**extrémité du vecteur  $\vec{E}(z, t)$**  de telle sorte que l'**observateur voit l'onde arriver vers lui**.



#### a. Polarisation elliptique

Pour une OPPM se propageant selon  $Oz$ , en choisissant l'origine des temps telles que  $\varphi_{0x}$  (et  $\varphi_{0y} = \varphi$ ), on a :

- en notation complexe  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$  avec  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{-i\varphi} \vec{u}_y$
- en notation réelle 
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, le champ électrique d'une OPPH dans le vide en un point donné, décrit, au cours du temps, une ellipse avec une période égale à celle de l'onde, on dit que l'onde est **polarisée elliptiquement**.

Si l'ellipse est décrite dans le **sens trigonométrique** autour de  $\vec{u}_z$ , la polarisation est dite **elliptique gauche** ( $\varphi \in ]0, \pi[$ ), si elle est dans le **sens horaire**, elle est **elliptique droite** ( $\varphi \in ]\pi, 2\pi[$ ).

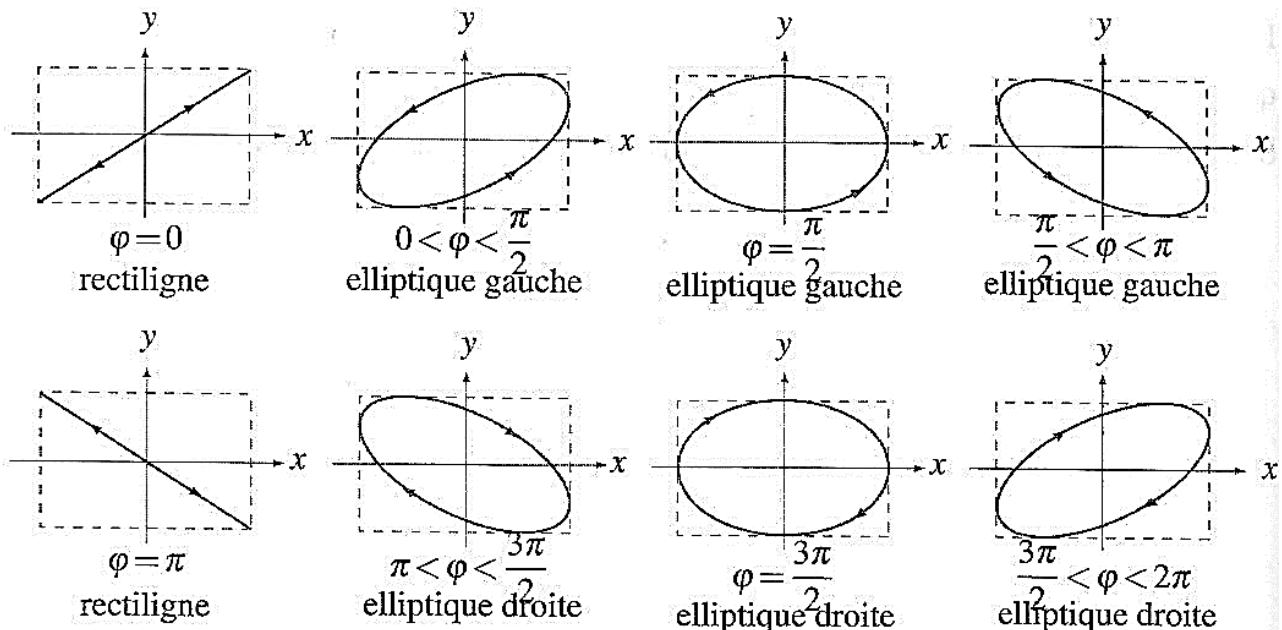


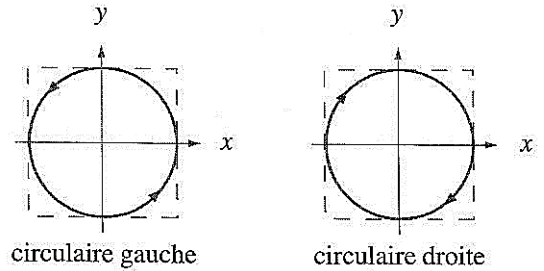
Figure 27.5 – Différents états de polarisation.

Par rotation des axes  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  (et changement d'origine du temps), on peut obtenir une ellipse d'axes  $x$  et  $y$  avec un champ réel :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E'_{0x} \cos(\omega t' - kz) \\ \pm E'_{0y} \sin(\omega t' - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } E'_{0y} > 0 \text{ pour elliptique gauche}$$

### b. Polarisation circulaire

Dans le cas particulier où  $E_{0x} = E_{0y}$  et  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'ellipse devient un cercle : **l'onde est de polarisation circulaire** gauche (pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) ou droite (pour  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ).



### c. Polarisation rectiligne

Dans le cas particulier où  $\varphi = 0 [\pi]$ , l'ellipse se réduit à un segment, la **polarisation** est alors **rectiligne**. On a alors :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ \pm E_{0y} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad \text{avec } \vec{E}_0 = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x \pm \sin \alpha \vec{u}_y), \begin{cases} E_{0x} = E_0 \cos \alpha \\ E_{0y} = E_0 \sin \alpha \end{cases}$$

### d. Lien entre les polarisations

Toutes ondes polarisées elliptiquement peuvent être décomposées comme la somme de d'ondes polarisées rectilignement ou d'ondes polarisées circulairement.

### e. Lumière polarisée et lumière naturelle

Les sources de lumière naturelle (étoile, corps chaud) fonctionnent par rayonnement thermique (cf. corps noir), chaque partie de la source émet une vibration dans une direction, polarisation et une phase aléatoire.

Il en résulte un champ  $\vec{E}$  avec une polarisation quelconque et variant constamment au cours du temps. La lumière naturelle peut donc être considérée comme la superposition de deux vibrations rectilignes orthogonales incohérentes entre elles (pas d'interférences entre ces ondes) : leurs phases et amplitudes varient aléatoirement au cours du temps.

Les lumières polarisées rectilignement, circulairement ou elliptiquement sont **totale**ment polarisées. La superposition d'une telle lumière avec une lumière naturelle donne une lumière **partiellement** polarisées.

## 2. Synthèse et analyse d'une lumière polarisée

### a. Polariseur

Un **polariseur** est une lame d'épaisseur négligeable agissant linéairement sur le champ électrique, il possède deux directions  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  telles que :

- $\vec{v} \perp \vec{w}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans le plan de polarisation
- si  $\vec{E}_{\text{entrée}} \parallel \vec{v}$ , la lame est transparente  $\vec{E}_{\text{sortie}} = \vec{E}_{\text{entrée}}$  (en théorie)
- si  $\vec{E}_{\text{entrée}} \parallel \vec{w}$ , la lame est absorbante  $\vec{E}_{\text{sortie}} = \vec{0}$  (en théorie)

Un polariseur projette le champ électrique sur sa direction de polarisation  $\vec{v}$ , la polarisation résultante est rectiligne :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{v}) \vec{v}$$

### Loi de Malus (rappel)

On considère deux polariseurs ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) de direction passante  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  faisant entre elles un angle  $\alpha$ .

À la sortie de ( $P_1$ ), on a :  $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{v}_1$  (en pratique, la moitié de la puissance est absorbée si la polarisation incidente est naturelle).

À la sortie de ( $P_2$ ) appelé **analyseur**, on a :  $\vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2 = E_0 \cos(\omega t - kz) \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{\cos \alpha} \vec{v}_2$

Les capteurs optiques captent l'intensité (ou éclaircissement)  $J$  proportionnelle à la moyenne du carré du champ  $\vec{E}$  :

$$J = K \langle E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \cos^2 \alpha \rangle_T = \frac{K E_0^2}{2} \cos^2 \alpha \Rightarrow \boxed{J = J_{\text{max}} \cos^2 \alpha} \quad \text{loi de Malus}$$

Pour un analyseur ( $P_2$ ) de direction  $\vec{v}_2$  connue et réglable, on peut modifier  $\alpha$  pour avoir  $J \approx 0$  alors  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$  (**polariseur et analyseur croisés**). Cette méthode permet de déterminer  $\vec{v}_1$  et d'analyser une polarisation rectiligne (due à ( $P_1$ )).

Illustration avec un film de polaroid : **Polariseur/analyseur** : <https://youtu.be/DmXv9XB-nP0>

## b. lame cristalline biréfringente

### Action d'une lame

Pour produire une polarisation elliptique ou circulaire, on utilise une lame taillée dans un milieu **anisotrope** transparent. Cette lame possède deux directions  $Ox$  et  $Oy$  perpendiculaires appelées **lignes neutres** de la lame, auxquelles sont associées deux indices optiques réels  $n_x$  et  $n_y$ , on suppose que  $n_x > n_y$ .

Si on envoie une OPPM se propageant selon  $Oz$  sur la lame d'épaisseur  $e$ , la composante  $E_x$  de  $\vec{E}$  selon l'**axe lent** se propage dans le milieu à la **vitesse de phase**  $v_{\varphi x} = \frac{c}{n_x}$  et la composante  $E_y$  de  $\vec{E}$ , selon l'**axe rapide** avec  $v_{\varphi y} = \frac{c}{n_y}$ .

Pour un champ en entrée :  $\vec{E}_{\text{entrée}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$  en sortie, on obtient  $\vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - k_0 z) \\ E_{0y} \cos(\omega t' - k_0 z + \varphi + \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$

### Lame demi-onde

Pour une onde de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, une lame **demi-onde** est telle que  $\Delta\varphi = \pi [2\pi]$  or

$$\text{or } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_x - n_y) e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \Rightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2} [\lambda_0]$$

Alors, en sortie  $\vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - k_0 z) \\ -E_{0y} \cos(\omega t' - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc pour une polarisation initiale circulaire ou elliptique, le sens de rotation est inversé et pour une polarisation initiale rectiligne, en sortie la polarisation est rectiligne et symétrique par rapport à une des lignes neutres.

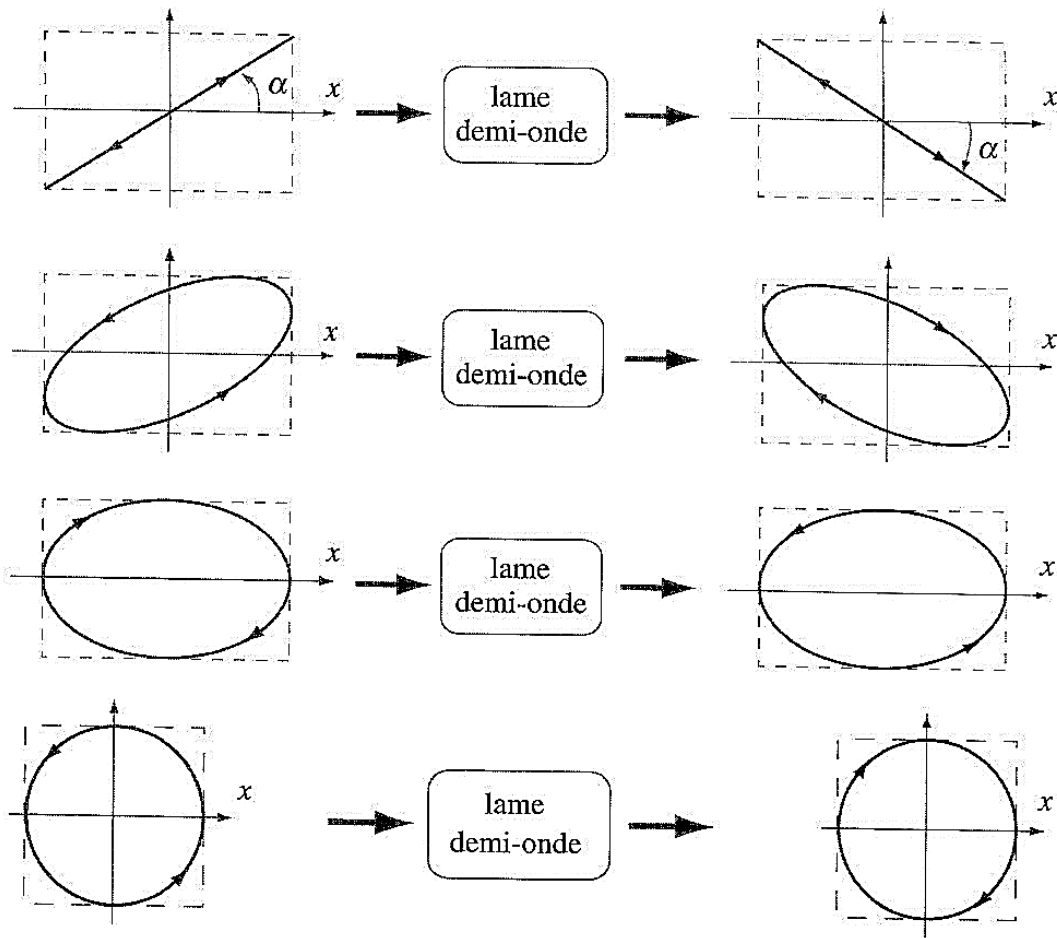


Figure 29.6 – Action d'une lame demi-onde.



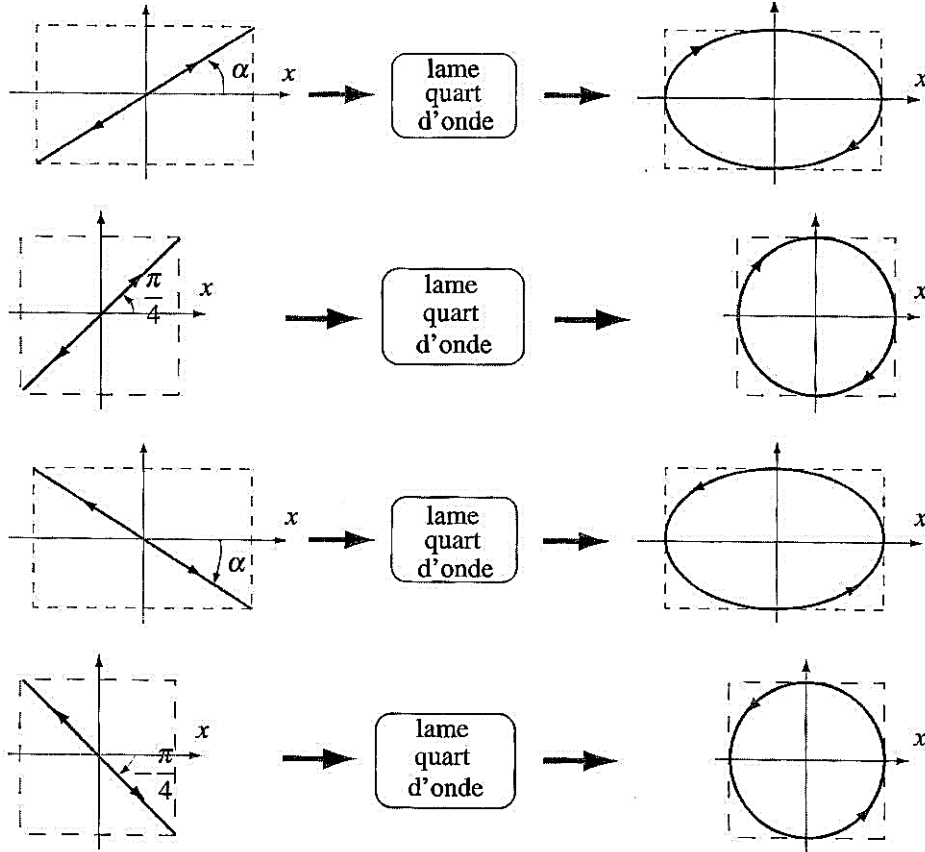
## Lame quart-d'onde

Pour une onde de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, une lame **quart-d'onde** est telle que  $\Delta\varphi = \pi/2$  [ $\pi$ ] or

$$\text{or } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_x - n_y) e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\lambda_0}{4} \left[ \frac{\lambda_0}{2} \right]}$$

Alors, en sortie

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - k_0 z) \\ -E_{0y} \sin(\omega t' - k_0 z + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Pour une polarisation incidente rectiligne,  $\varphi = 0$  ou  $\pi \Rightarrow \vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t' - k_0 z) \\ \pm E_0 \sin \alpha \sin(\omega t' - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors :

- pour  $\alpha$  quelconque, la polarisation est elliptique car  $E_{0x} \neq E_{0y}$  et les axes coïncident avec  $Ox$  et  $Oy$
- pour  $\alpha = \pm\pi/4$  [ $\pi$ ], la polarisation est circulaire car  $E_{0x} = \pm E_{0y}$
- pour  $\alpha = 0$  [ $\pi/2$ ], la polarisation est rectiligne car  $E_{0x} = 0$  ou  $E_{0y} = 0$ , l'onde incidente est selon une **ligne neutre**.

Pour une polarisation incidente elliptique quelconque  $\varphi \neq 0$  [ $\pi/2$ ] ou  $E_{0x} \neq E_{0y}$ , l'onde reste elliptique par contre si les axes de l'ellipse coïncident avec les **lignes neutres** (i. e.  $\varphi = \pm\pi/2$ ) alors, en entrée :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \\ \pm E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et en sortie, on obtient } \vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t' - k_0 z) \\ \pm E_{0y} \cos(\omega t' - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \cos(\omega t' - k_0 z) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

la polarisation est donc rectiligne.

Enfin, pour une polarisation incidente circulaire  $\varphi = \pm\pi/2$  et  $E_{0x} = \pm E_{0y} = E_0$ , on en en entrée :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en sortie, on obtient } \vec{E}_{\text{sortie}} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t' - k_0 z) \\ \mp E_0 \cos(\omega t' - k_0 z) \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \cos(\omega t' - k_0 z) \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'onde résultante est polarisée rectilignement selon une des bissectrice.

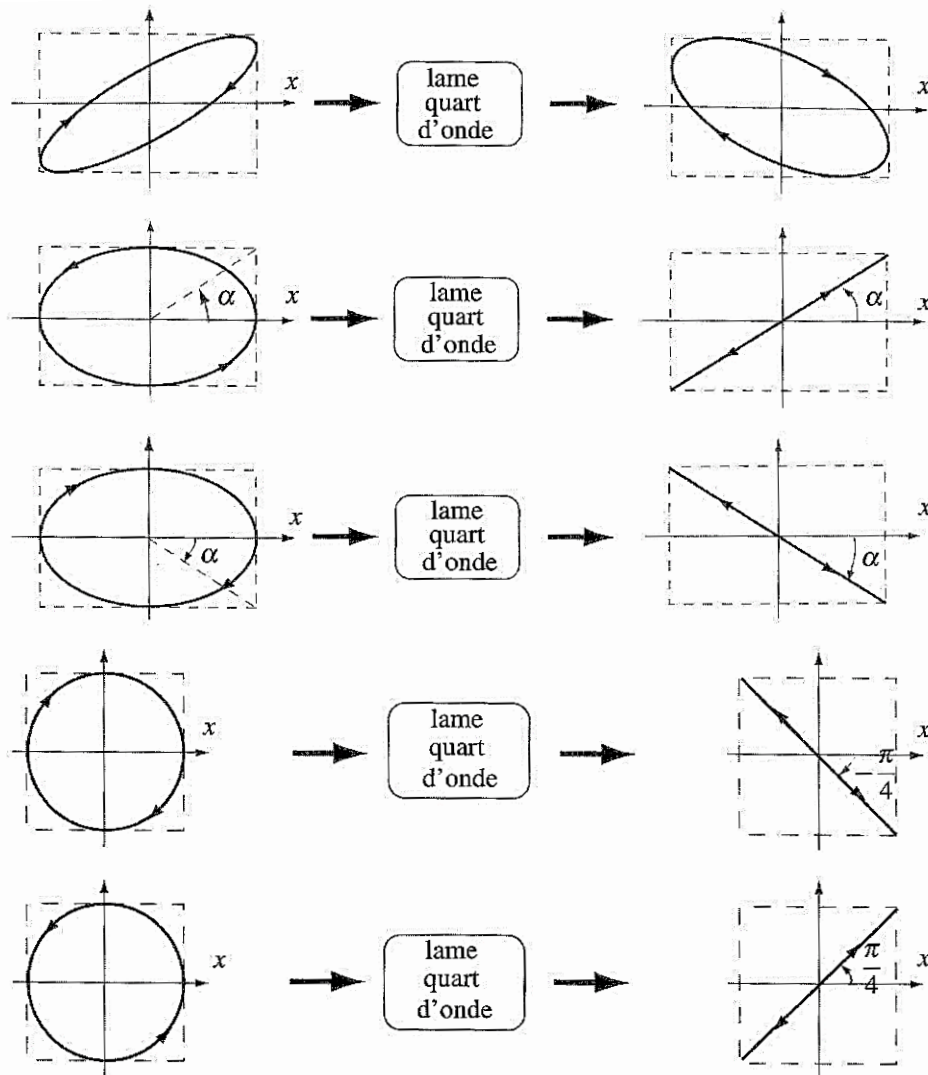


Figure 29.7 – Action d'une lame quart d'onde.

### c. Analyse d'une lumière polarisée

L'analyse d'une lumière polarisée se fait selon la procédure décrite par la figure page suivante :

### Démonstrations et notions à maîtriser :

- Démonstration de l'équation de propagation dans le vide (d'Alembert)
- Expression des ondes progressives, OPP, OPPH et stationnaires en notation réelle/complexes
- Propriétés et interprétations physiques des solutions
- Densité d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting
- Notion de polarisation, expression du champ pour différentes polarisations
- Effet d'un polariseur, loi de Malus, effet d'une lame demi-onde, quart d'onde sur le champ incident

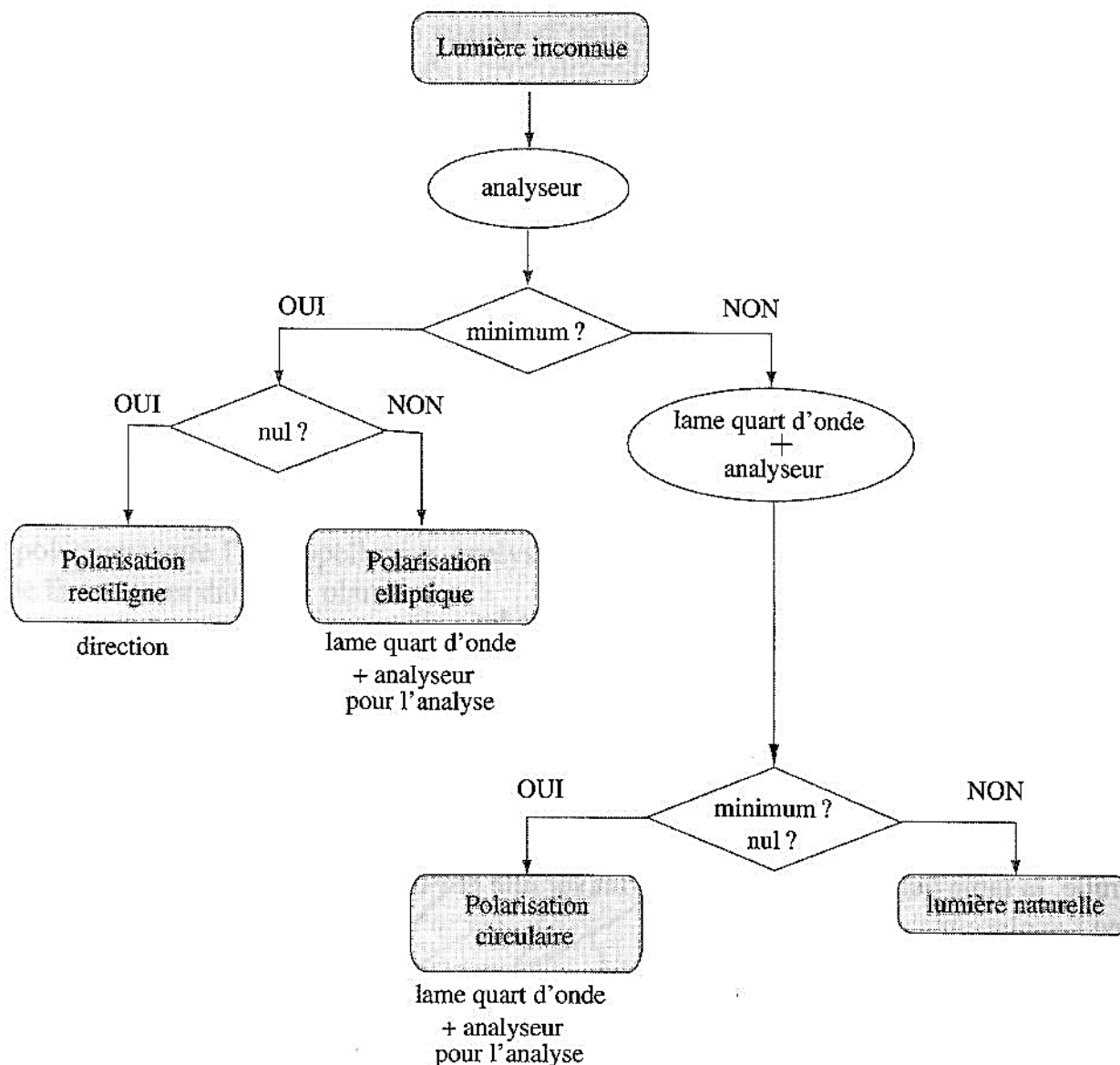
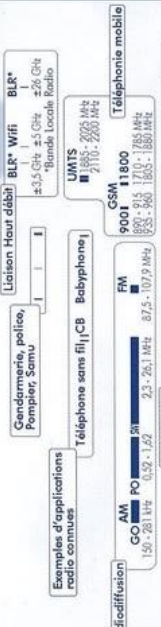


Figure 29.9 – Analyse d'une lumière quelconque.

Ondes électromagnétiques dans le vide	
Équations de propagation de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans une région sans charge ni courant.	Établir et citer les équations de propagation.
Structure d'une onde plane progressive harmonique.	Établir et décrire la structure d'une OPPH. Utiliser le principe de superposition d'OPPH.
Aspects énergétiques.	Relier la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde. Relier le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck. Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie, etc...) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.
Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne.	Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation d'une onde.
<b>Analyse d'une lumière totalement polarisée. Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.</b>	<b>Reconnaitre une lumière non polarisée. Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.</b>

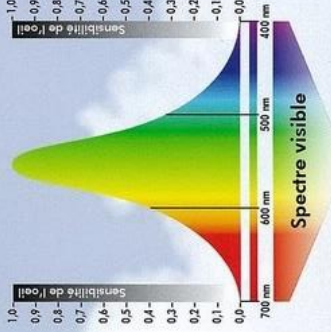
# SPECTRE ELECTROMAGNETIQUE

## SPECTRE RADIOFREQUENCE (3 Hz - 300 GHz)



**MF**: ondes câbles et "ondes de l'horizon"  
**VLF / UHF**: les ondes courtes  
**L**: contrôle aérien longue portée  
**S**: trafic aérien local, radars météo et navals  
**C**: transpondeurs satellitaires et radars météo  
**X**: radars météo, radars de navigations, radars de cartographie  
**Ku**: radars de cartographie haute résolution, altimétrie satellitaire  
**Ka**: radars de détection de nuages (méteo), radars radars météo  
**Kv**: radars de détection de nuages (méteo), radars radars météo  
**W**: radars anti-collision automobiles

### BANDES RADAR



Le spectre électromagnétique est la décomposition du rayonnement électromagnétique selon ses différentes composantes en terme de longueur d'onde ou d'énergie des photons, les deux grandeurs étant liées par la constante de Planck ( $E = h \cdot \nu$ ).  
 Si la lumière désigne un rayonnement électromagnétique visible par l'œil humain, les ondes radio, les rayons X et  $\gamma$  sont également des rayonnements électromagnétiques. À partir des rayons X, les longueurs d'onde sont rarement utilisées: comme on a affaire à des particules très énergétiques, l'énergie correspondant au photon X ou  $\gamma$  détecté est plus utile.  
 Cette énergie est exprimée en électron-volt (eV), soit l'énergie d'un électron accéléré par un potentiel de 1 volt.

Un rayonnement électromagnétique est caractérisé par un flux de particules sans masse, les photons, associé à une onde, l'onde électromagnétique. En associant simultanément des propriétés antagonistes d'ondes et de particules, la connaissance par l'Homme du rayonnement électromagnétique a fait naître la théorie de la dualité onde-particule dont le concept est l'un des fondements de la mécanique quantique.

La compatibilité électromagnétique, ou CEM, est l'aptitude d'un appareil ou d'un système à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante et sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques inacceptables pour tout ce qui se trouve dans cet environnement. Dans la perspective du spectre électromagnétique, la CEM s'applique potentiellement sur l'ensemble du spectre radiofréquence (en pratique jusqu'à GHz).

Le rayonnement électromagnétique peut également être utilisé à des fins d'espionnage mais aussi de guerre électronique. L'utilisation de radio-émetteurs, notamment en téléphonie mobile, s'accompagne de nouvelles exigences en terme d'ondes et sont pour s'assurer qu'aucun danger n'est induit sur les individus selon les conditions d'exposition.

